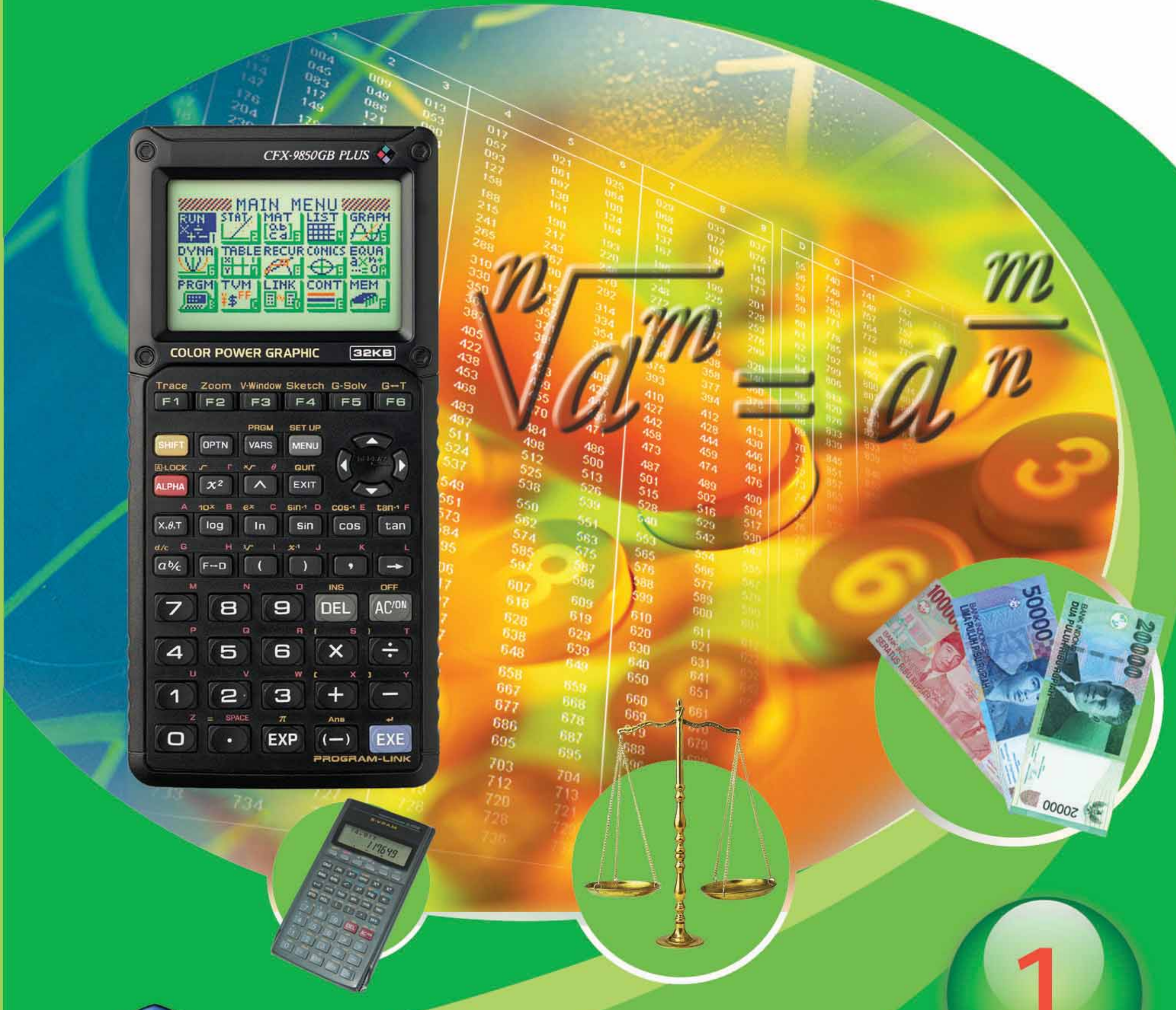
Matematika

Kelompok Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan

untuk Kelas X Sekolah Menengah Kejuruan

Hendi Senja Gumilar



1

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Kelompok Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan untuk Kelas X SMK Hendi Senja Gumilar

Matematika

Kelompok Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan

untuk Kelas X Sekolah Menengah Kejuruan

Hendi Senja Gumilar

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

1

Matematika 1

Kelompok Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan
untuk Kelas X SMK/MAK

Penulis : Hendi Senja Gumilar

Ukuran Buku : 21 x 29,7 cm

510.07
GUM GUMILAR, Hendi Senja
m Matematika 1 kelompok seni, pariwisata, dan teknologi kerumahtanggaan: untuk kelas X SMK/MAK/oleh Hendi Senja Gumilar. -- Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
viii, 122 hlm.: ilus.; 30 cm.
Bibliografi: hlm. 166
ISBN 979-462-846-8
1. Matematika-Studi dan Pengajaran

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2007, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui *website* Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 46 Tahun 2007.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para pendidik dan peserta didik di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional tersebut, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga peserta didik dan pendidik di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Selanjutnya, kepada para peserta didik kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, 25 Februari 2008
Kepala Pusat Perbukuan

Prakata

Adalah hal biasa jika terdengar ungkapan bahwa matematika adalah pelajaran yang sulit. Ungkapan ini tidak selamanya benar karena matematika justru bisa menjadi pelajaran yang mudah, menarik, dan menantang kreativitas berpikir. Sulitnya pelajaran matematika sebenarnya lebih disebabkan oleh beberapa faktor, di antaranya cara penyajian. Cara penyajian, baik secara lisan maupun tulisan, sangat berpengaruh terhadap mudah atau tidaknya pelajaran matematika diserap.

Belajar matematika bukanlah beban yang harus dipikul siswa, terutama untuk menghafal rumus-rumus matematika. Namun, belajar matematika lebih ditekankan pada pemahaman konsep-konsep matematika, kelancaran berprosedur, dan penalaran adaptif.

Berdasarkan hal tersebut, penulis mencoba mewujudkan pemikiran tentang konsep penyajian matematika yang mudah dan terarah dalam buku Matematika untuk SMK Kelompok Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan untuk Kelas X ini. Dengan demikian, diharapkan siswa dapat dengan mudah mempelajari matematika dan menjadikan matematika sebagai pelajaran favorit. Untuk mencapai tujuan ini, penulis menyajikan pelajaran secara komunikatif yang mengacu pada fenomena mutakhir dan keseharian siswa. Materi pelajaran tersaji dengan bahasa yang sederhana dan dimulai dari materi yang mudah hingga materi yang sulit. Tentu saja materi pelajaran disertai dengan contoh-contoh soal dan penyelesaiannya, serta tugas-tugas, kegiatan, dan Uji Kompetensi Bab dan Semester. Dilengkapi juga dengan soal-soal dan materi pengayaan, seperti Anda Pasti Bisa, *DigiMath*, dan *MathNews*, di mana sepenuhnya telah mengacu pada Standar Isi 2006.

Materi pelajaran dalam buku Matematika untuk SMK Kelompok Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan Kelas X merupakan materi dasar yang akan berguna untuk Anda. Oleh karena itu, siswa hendaknya benar-benar cermat mempelajarinya karena merupakan kunci untuk mempelajari pelajaran selanjutnya dengan mudah pula. Jadi, persiapkanlah diri sebaik mungkin dan buanglah perasaan bahwa pelajaran matematika adalah pelajaran yang sulit.

Akhir kata, penulis berharap buku ini benar-benar berguna sebagai pemandu mempelajari matematika secara mudah. Matematika akan bisa dikuasai jika biasa belajar dan berlatih. Selamat belajar dan semoga berhasil.

Bandung, September 2007

Penulis

Panduan untuk Pembaca

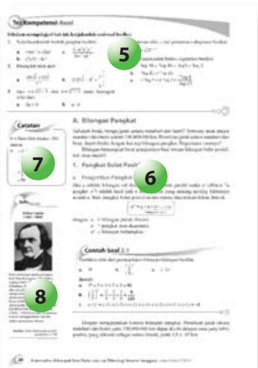
Materi-materi pembelajaran dalam buku ini didasarkan pada Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar 2006 yang berlaku saat ini disajikan secara sistematis, komunikatif, dan integratif.

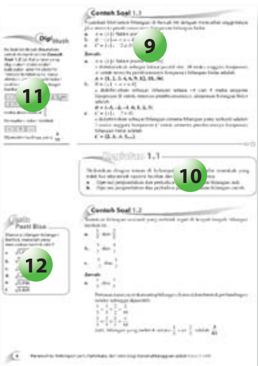
Buku Matematika Kelompok Seni, Pariwisata, dan Teknologi Kerumahtanggaan untuk Kelas X SMK ini, terdiri atas empat bab yang disajikan secara terstruktur dengan format yang menarik dan bahasa yang sederhana.

Berikut ini cara yang ditawarkan kepada Anda sebagai panduan dalam membaca buku ini, agar materi yang disajikan dapat dengan mudah dipahami oleh Anda sebagai pembaca.

Awal bab terdiri atas:

1. **Judul Bab**;
2. **Gambar Pembuka Bab**;
   Berupa foto atau sebagai gambaran awal mengenai aplikasi materi yang akan dipelajari.
3. **Judul Subbab;**
4. ***Advanced Organizer***.
   Berupa pengantar yang merupakan gambaran mengenai aplikasi materi ataupun motivasi untuk mempelajari materi.

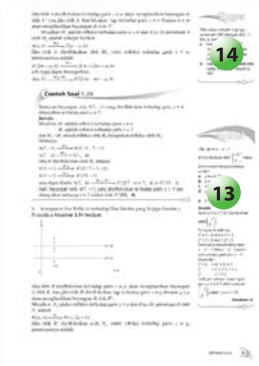




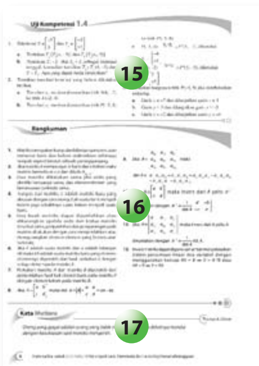
Bagian Isi

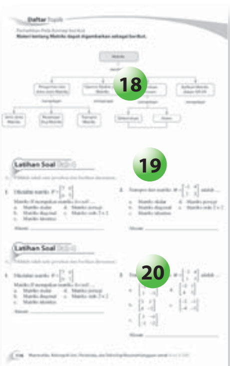
Terdiri atas:

5. **Tes Kompetensi Awal**;
   Berupa soal-soal materi prasyarat sebagai pengantar ke materi.
6. **Materi**;
7. **Catatan**;
8. ***InfoMath***;
   Berupa informasi-informasi seputar tokoh-tokoh matematika, sejarah matematika, dan informasi-informasi lain yang berhubungan dengan matematika.
9. **Contoh Soal**;
   Berupa soal-soal yang disertai langkah-langkah dalam menjawabnya.
10. **Kegiatan**;
    Berupa kegiatan yang dapat membantu siswa untuk lebih memahami materi.
11. ***DigiMath***;
    Berupa informasi mengenai alat-alat bantu yang dapat digunakan dalam pembelajaran ataupun kegiatan yang berhubungan dengan matematika.



12. **Anda Pasti Bisa**;
    Berupa soal-soal yang menguji kecerdikan Anda dalam memecahkan suatu masalah matematika.
13. **Solusi**.
    Berupa soal-soal EBTANAS, UAN, UN, UMPTN, dan SPMB beserta pembahasannya.





Soal-Soal serta Akhir Bab

Terdiri atas:

14. **Tugas**;
    Berupa soal-soal, mencari informasi, berdiskusi dan melaporkan suatu kegiatan.
15. **Uji Kompetensi Subbab**;
    Berupa soal-soal untuk mengukur pemahaman materi dari subbab tertentu.
16. **Rangkuman**;
    Berupa ringkasan materi dari sebuah bab tertentu.
17. **Kata Mutiara**;
18. **Daftar Topik**;
    Berupa pemetaan materi dari bab tertentu.
19. **Latihan Bab Bab**;
    Berupa soal-soal sebagai evaluasi akhir bab tertentu.
20. **Latihan Ulangan Semester**.
    Berupa soal-soal yang merupakan ajang latihan bagi Anda sebagai persiapan menghadapi Ujian Akhir Semester.

Daftar Isi

Sumber: *world.casio.com*

Anda dapat menggunakan kalkulator sebagai alat bantu dalam perhitungan logaritma ▶ **41**

Bab I

Sumber: *upload.wikimedia.org*

Bilangan Riil

Anda telah mempelajari konsep bilangan bulat di Kelas VII. Pada bab ini akan dibahas konsep bilangan riil yang merupakan pengembangan dari bilangan bulat.

Bilangan pecahan yang merupakan bagian dari bilangan riil sangat bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya, sebuah toko emas akan membuat satu set perhiasan. Jika emas 18 karat mengandung campuran $\frac{18}{24}$ emas murni dan $\frac{6}{24}$ campuran logam lain, tentukan berapa gram emas murni yang terdapat pada 48 gram emas 22 karat?

Dengan mempelajari bab ini, Anda akan dapat menyelesaikan permasalahan tersebut.

A. **Macam-Macam Bilangan**
B. **Operasi Hitung pada Bilangan Riil**
C. **Operasi Hitung pada Bilangan Pecahan**
D. **Konversi Bilangan**

Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Diketahui kumpulan bilangan berikut:

$\frac{1}{3}$; $\sqrt{2}$; -1; 0; $\sqrt[3]{8}$; $2\frac{1}{5}$; 0,31; $\sqrt{0,4}$; π.

Manakah yang merupakan bilangan rasional dan bilangan irasional?

2. Hitunglah nilai dari:

a. $2\frac{2}{3}+4\frac{1}{2}$

b. $-4\frac{7}{10}+3\frac{2}{5}+1$

c. $3\frac{2}{5}\times 2\frac{1}{2}$

d. $20\% - 0,3 + 2\frac{1}{3}$

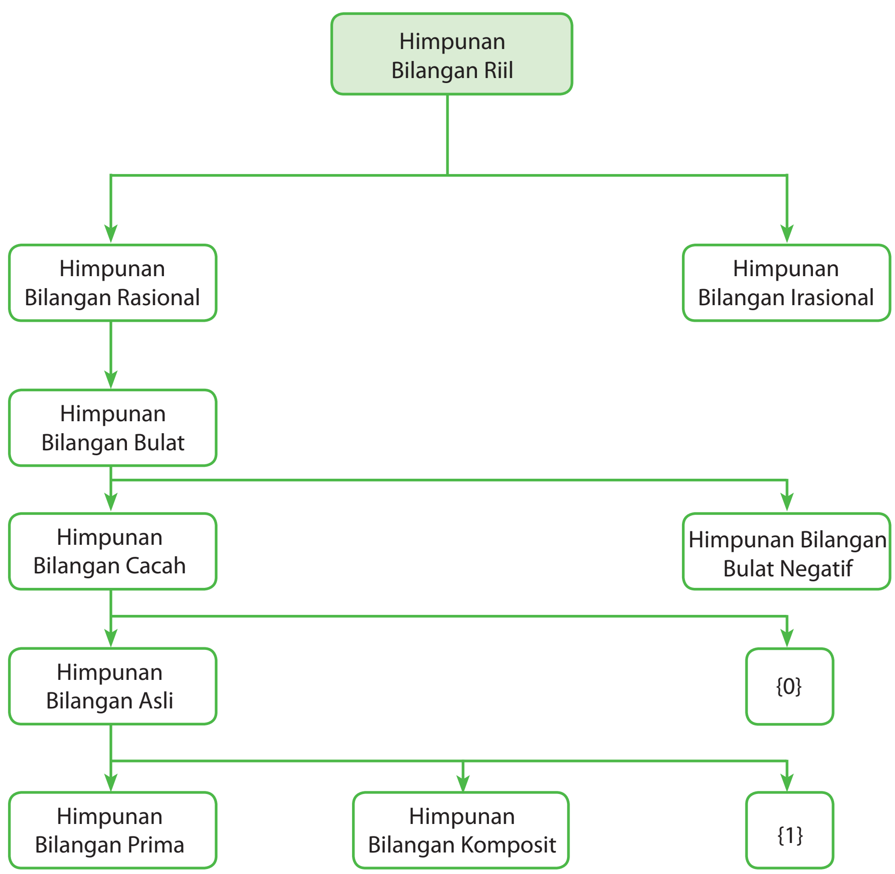
3. Tentukanlah luas persegipanjang yang berukuran panjang $4\frac{1}{2}$ cm dan lebar $2\frac{3}{1}$ cm.

4. Uang sebanyak Rp30.000,00 dibagikan kepada Fani, Siska, dan Ary. Fani memperoleh $\frac{1}{2}$, Siska memperoleh $\frac{1}{3}$, dan Ary sisanya. Berapa rupiah banyaknya uang yang diterima masing-masing?

A. Macam-Macam Himpunan Bilangan

Matematika erat sekali kaitannya dengan bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan tersebut dapat dibedakan berdasarkan definisi tertentu sehingga bilangan-bilangan tersebut dapat dikelompokkan menjadi suatu himpunan bilangan tertentu pula. Misalnya 1, 2, 3, ... dan seterusnya dapat dikelompokkan ke dalam himpunan bilangan asli. Himpunan bilangan asli tersebut dapat ditulis dengan notasi A = {1, 2 , 3, 4, 5, ...}.

Himpunan bilangan-bilangan secara skematis dapat ditunjukkan pada bagan berikut.



Dari bagan tersebut diketahui bahwa himpunan bilangan riil terdiri atas himpunan bilangan-bilangan berikut ini.

1. Himpunan Bilangan Asli

Bilangan asli merupakan bilangan yang sering kita gunakan, seperti untuk menghitung banyaknya pengunjung dalam suatu pertunjukan seni atau banyaknya tamu yang menginap di hotel tertentu. Bilangan asli sering pula disebut sebagai bilangan natural karena secara alamiah kita mulai menghitung dari angka 1, 2, 3, dan seterusnya. Bilangan-bilangan tersebut membentuk suatu himpunan bilangan yang disebut sebagai himpunan bilangan asli. Dengan demikian, himpunan bilangan asli didefinisikan sebagai himpunan bilangan yang diawali dengan angka 1 dan bertambah satu-satu. Himpunan bilangan ini dilambangkan dengan huruf A dan anggota himpunan dari bilangan asli dinyatakan sebagai berikut.
$A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

2. Himpunan Bilangan Cacah

Dalam sebuah survei mengenai hobi siswa di kelas tertentu, diketahui bahwa banyak siswa yang hobi membaca 15 orang, hobi jalan-jalan sebanyak 16 orang, hobi olahraga sebanyak 9 orang dan tidak ada siswa yang memilih hobi menari. Untuk menyatakan banyaknya anggota yang tidak memiliki hobi menari tersebut, digunakan bilangan 0. Gabungan antara himpunan bilangan asli dan himpunan bilangan 0 ini disebut sebagai himpunan bilangan cacah. Himpunan bilangan ini dilambangkan dengan huruf C dan anggota himpunan dari bilangan cacah dinyatakan sebagai berikut:
$C = \{0, 1, 2, 3, 4,...\}$.

3. Himpunan Bilangan Bulat

Himpunan bilangan bulat adalah gabungan antara himpunan bilangan cacah dan himpunan bilangan bulat negatif. Bilangan ini dilambangkan dengan huruf B dan anggota himpunan dari bilangan bulat dinyatakan sebagai berikut:
$B = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

4. Himpunan Bilangan Rasional

Himpunan bilangan rasional adalah himpunan bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$, dengan $p, q \in B$ dan $q \neq 0$. Bilangan p disebut pembilang dan q disebut penyebut. Himpunan bilangan rasional dilambangkan dengan huruf Q. Himpunan dari bilangan rasional dinyatakan sebagai berikut:

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p, q \in B, \text{dan } q \neq 0 \right\}.$$

5. Himpunan Bilangan Irasional

Himpunan bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan $p,\ q \in B$ dan $q \neq 0$. Contoh bilangan irasional adalah bilangan desimal yang tidak berulang (tidak berpola), misalnya: $\sqrt{2}$, π, e, log 2. Himpunan bilangan ini dilambangkan dengan huruf I.

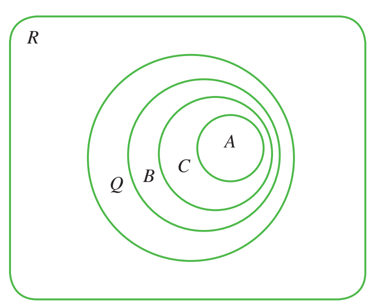
Himpunan bilangan riil adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional, yang dilambangkan dengan huruf R. Hubungan antara bilangan riil dan bilangan-bilangan pembentuknya dapat

InfoMath

Bilangan-Bilangan Istimewa

Bilangan-bilangan istimewa adalah bilangan-bilangan dengan ciri khusus yang membuat mereka berbeda dengan bilangan-bilangan lainnya. Bilangan-bilangan ini di antaranya bilangan prima, bilangan sempurna, bilangan kuadrat, dan bilangan segitiga. Sifat-sifat yang istimewa dari bilangan-bilangan ini memungkinkan mereka untuk ditulis sebagai sebuah rumus, seperti n^2 untuk bilangan kuadrat.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002



Contoh Soal 1.1

Jika semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat, nyatakan himpunan bilangan di bawah ini dengan mendaftar anggotanya.

a. $A = \{x \mid x \text{ faktor positif dari } 36\}$
b. $B = \{x \mid -4 < x < 4\}$
c. $C = \{x \mid x - 2 \geq 0\}$

Jawab:

a. $A = \{x \mid x \text{ faktor positif dari } 36\}$
x didefinisikan sebagai faktor positif dari 36 maka anggota himpunan A jika semesta pembicaranya himpunan bilangan bulat adalah
$\mathbf{A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}}$.

b. $B = \{x \mid -4 < x < 4\}$
x didefinisikan sebagai bilangan bulat antara –4 dan 4 maka anggota himpunan B
$\mathbf{B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}}$.

c. $C = \{x \mid x - 2 \geq 0\}$
x didefinisikan sebagai bilangan dimana bulat yang jika dikurangi 2 hasilnya lebih besar atau sama dengan nol. Maka:
$\mathbf{C = \{2, 3, 4, 5, ...\}}$.

Contoh Soal 1.2

Tentukan bilangan rasional yang terletak tepat di tengah-tengah bilangan berikut ini.

a. $\frac{1}{5}$ dan $\frac{2}{5}$

b. $\frac{3}{7}$ dan $\frac{4}{7}$

c. $\frac{5}{12}$ dan $\frac{1}{2}$

Jawab:

a. $\frac{1}{5}$ dan $\frac{2}{5}$

Pertama-tama, nyatakan setiap bilangan di atas dalam bentuk perbandingan senilai sehingga diperoleh:

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{10}$$

Jadi, bilangan rasional yang terletak tepat di tengah antara $\frac{1}{5}$ dan $\frac{2}{5}$ adalah $\mathbf{\frac{3}{10}}$.

b. $\frac{3}{7}$ dan $\frac{4}{7}$

Dengan cara yang sama, diperoleh:

$$\frac{3}{7} = \frac{3}{7} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{14}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times \frac{2}{2} = \frac{8}{14}$$

Jadi, bilangan rasional yang terletak tepat di tengah antara $\frac{3}{7}$ dan $\frac{4}{7}$ adalah $\mathbf{\frac{7}{14}}$.

DigiMath

Kalkulator dapat digunakan untuk menyelesaikan **Contoh Soal 1.2** (a). Kalkulator yang digunakan disini adalah kalkulator jenis *FX*-3600 *PV*. Tombol-tombol yang harus ditekan untuk menyelesaikan soal tersebut adalah sebagai berikut.

1 $a^{b/c}$ 5 + 2 $a^{b/c}$ 5 =

maka akan muncul $\frac{3}{5}$

Kemudian, tekan tombol

÷ 2 =

Diperoleh hasilnya, yaitu $\mathbf{\frac{3}{10}}$.

c. $\frac{5}{12}$ dan $\frac{1}{2}$

Dengan cara yang sama, diperoleh:

$$\frac{5}{12} = \frac{5}{12} \times \frac{2}{2} = \frac{10}{24}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{12} = \frac{12}{24}$$

Jadi, bilangan rasional yang terletak tepat di tengah antara $\frac{5}{12}$ dan $\frac{1}{2}$ adalah $\mathbf{\frac{11}{24}}$.

Latihan Soal 1.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Nyatakan himpunan-himpunan berikut dengan cara mendaftar semua anggotanya.
   a. $A = \{x \mid -3 < x < 5, x \in B\}$
   b. $B = \{x \mid 4 \le x < 9, x \in A\}$
   c. $C = \{x \mid x < 11, x \in C\}$
2. Tentukan apakah bilangan-bilangan berikut rasional atau irasional.
   a. $\sqrt{9}$
   b. $-\frac{1}{3}$
   c. 0,101001000...
   d. $\sqrt{2}$

dinyatakan dalam diagram Venn di samping.

B. Operasi Hitung pada Bilangan Riil

Sebagaimana yang telah diketahui sebelumnya, operasi-operasi hitung dalam sistem matematika di antaranya penjumlahan dan perkalian. Setiap operasi hitung memiliki sifat-sifat tersendiri sehingga membentuk sebuah sistem bilangan.

Berikut adalah sifat-sifat yang terdapat pada operasi hitung penjumlahan dan perkalian pada bilangan riil:

1. Penjumlahan
   a. Sifat tertutup
   Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = c, c \in R$
   b. Sifat komutatif
   Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a + b = b + a$
   c. Sifat asosiatif
   Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$
   d. Ada elemen identitas
   0 adalah elemen identitas penjumlahan sehingga berlaku:
   $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in R$
   e. Setiap bilangan riil mempunyai invers penjumlahan
   Untuk setiap $a \in R$, elemen invers pada penjumlahan adalah lawannya, yaitu $-a$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$
2. Perkalian
   a. Sifat tertutup
   Untuk setiap $a, b \in R$ berlaku $a \times b = c, c \in R$
   b. Sifat komutatif
   Untuk $a, b \in R$ berlaku $a \times b = b \times a$

Tugas 1.1

Diskusikanlah bersama teman Anda. Apakah sifat-sifat pada penjumlahan dan perkalian pada bilangan riil berlaku juga terhadap operasi hitung pengurangan dan pembagian?

c. Sifat asosiatif
Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

d. Terdapat elemen identitas
1 adalah elemen identitas perkalian sehingga berlaku:
$a \times 1 = 1 \times a = a$, untuk setiap $a \in R$.

e. Invers perkalian
Untuk setiap $a \in R$, $a \neq 0$ memiliki invers terhadap perkalian. Akan tetapi, jika $a = 0$ maka $0 \times \frac{1}{0} \neq 1$.

f. Sifat disributif perkalian terhadap penjumlahan
Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$; $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

g. Sifat distributif perkalian terhadap pengurangan
Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$; $(a - b) \times c = (a \times c) - (b \times c)$

Contoh Soal 1.3

Misalkan: $a = 5 \in R$, $b = \frac{1}{2} \in R$, dan $c = 3 \in R$

maka:

- $a + b = 5 + \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$, dan $\frac{11}{2} \in R$ (sifat tertutup pada penjumlahan)
- $\left.\begin{array}{l} (a + b) + c = (5 + \frac{1}{2}) + 3 = \frac{11}{2} + 3 = \frac{17}{2} \\ a + (b + c) = 5 + (\frac{1}{2} + 3) = 5 + \frac{7}{2} = \frac{17}{2} \end{array}\right]$ (sifat asosiatif pada penjumlahan)
- $a \times b = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, dan $\frac{5}{2} \in R$ (sifat tertutup pada perkalian)

Kegiatan 1.1

Diskusikan dengan teman di kelompok Anda, sifat-sifat manakah yang tidak berlaku untuk operasi berikut dan berikan contohnya.

a. Operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan asli.
b. Operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan bilangan cacah.

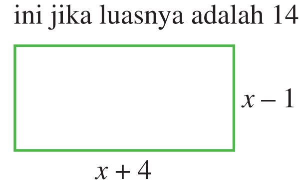
Latihan Soal 1.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Nyatakan sifat-sifat yang digunakan pada soal-soal berikut.
   a. $(4 \times 5) \times 3 = 4 \times (5 \times 3)$
   b. $2 \times (5 + 3) = (2 \times 5) + (2 \times 3)$
   c. $(2x + 4) \times 1 = 2x + 4$
   d. $(x + 2)(x + 3) = x(x + 3) + 2(x + 3)$

2. Jika $a = -2$, $b = 3$, $c = 4$, hitunglah nilai dari:
   a. $5a + b - 3c$
   b. $(2a - 4b)c$
   c. $c^2 - 3a + ab$
   d. $b^2(ab + ac + bc)$

3. Hitunglah keliling persegipanjang di bawah ini jika luasnya adalah 14 cm².



C. Operasi Hitung pada Bilangan Pecahan

Bilangan rasional disebut juga bilangan pecahan yang dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan a, $b \in B$ dan $b \neq 0$, dengan a disebut pembilang dan b penyebut.

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari operasi hitung pada bilangan pecahan.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Pecahan

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ masing-masing adalah bilangan pecahan maka berlaku operasi penjumlahan dan pengurangan sebagai berikut:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Contoh Soal 1.4

1. Hitunglah nilai operasi penjumlahan dan pengurangan pada bilangan pecahan berikut.

a. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$ d. $\frac{2}{9}-\frac{6}{5}$

b. $2\frac{1}{3}+3\frac{2}{5}$ e. $4\frac{3}{4}-2\frac{1}{6}$

c. $4+3\frac{2}{7}+\frac{5}{6}$ d. $\frac{4}{5}-2\frac{3}{4}+1\frac{7}{10}$

Jawab:

1. a. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+2\cdot 4}{4\cdot 5}=\frac{15+8}{20}=\frac{23}{20}=1\frac{3}{20}$

b. $2\frac{1}{3}+3\frac{2}{5}=(2+3)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right)$

$=5+\left(\frac{1\cdot 5+2\cdot 3}{3\cdot 5}\right)$

$=5+\left(\frac{5+6}{15}\right)=5+\frac{11}{15}=5\frac{11}{15}$

c. $4+3\frac{2}{7}+\frac{5}{6}=(4+3)+\left(\frac{2}{7}+\frac{5}{6}\right)$

$=7+\left(\frac{2\cdot 6+5\cdot 7}{7\cdot 6}\right)$

$=7+\left(\frac{12+35}{42}\right)=7+\frac{47}{42}=7+1\frac{5}{42}$

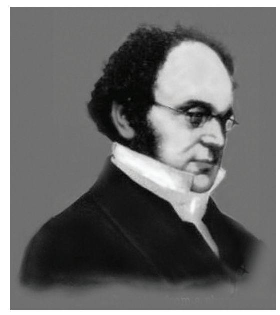
$=8\frac{5}{42}$

d. $\frac{2}{9}-\frac{6}{5}=\frac{2\cdot 5-6\cdot 9}{9\cdot 5}=\frac{10-54}{45}$

$=-\frac{44}{45}$

Info Math

Augustus De Morgan
(1806 – 1871)



Sumber: *www.filosoficas.unam.mx*

Augustus De Morgan adalah salah satu matematikawan besar yang memperkenalkan notasi garis miring (*slash*) untuk menunjukkan pecahan seperti 1/2 dan 3/4.
Pada suatu saat ada yang bertanya tahun berapa dia lahir. De Morgan menjawab "Aku lahir x tahun lebih tua dari x^2". Dapatkah Anda menentukan nilai dari x?

Sumber: *Finite Mathematics and It's Applications*, 1994

e. $$4\frac{3}{4}-2\frac{1}{6}=(4-2)+\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{6}\right)$$
$$=2+\left(\frac{3\cdot 6-1\cdot 4}{4\cdot 6}\right)$$
$$=2+\left(\frac{18-4}{24}\right)$$
$$=2+\frac{7}{12}$$
$$=2\frac{7}{12}$$

f. $$\frac{4}{5}-2\frac{3}{4}+1\frac{7}{10}=(-2+1)+\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}+\frac{7}{10}\right)$$
$$=(-1)+\left(\frac{4\cdot 4-3\cdot 5+7\cdot 2}{20}\right)$$
$$=(-1)+\left(\frac{16-15+14}{20}\right)$$
$$=-1+\frac{3}{4}$$
$$=\frac{-1\cdot 4+3}{4}$$
$$=\frac{-4+3}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}$$

2. Pada siang hari, Ardi mengerjakan $\frac{1}{4}$ dari pekerjaan rumahnya, kemudian $\frac{1}{3}$ nya ia kerjakan di sore hari, dan sisanya dikerjakan pada malam hari. Berapa bagiankah yang dikerjakan Ardi pada malam hari?

Jawab:

Ardi harus meyelesaikan satu pekerjaan sehingga bagian yang harus dikerjakan pada malam hari adalah

$$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{12-3-4}{12}$$
$$=\frac{12-7}{12}$$
$$=\frac{5}{12}\text{ pekerjaan}$$

Jadi, yang dikerjakan Ardi pada malam hari adalah $\mathbf{\frac{5}{12}}$ bagian.

Solusi

Dari sejumlah siswa baru yang diterima pada suatu SMK, $\frac{1}{3}$ bagian dari mereka memilih kriya kayu, $\frac{1}{4}$ bagian memilih kriya logam, $\frac{2}{9}$ bagian memilih kriya tekstil, dan sisanya memilih kriya keramik. Siswa yang memilih kriya keramik adalah ....

a. $\frac{7}{36}$ bagian

b. $\frac{25}{36}$ bagian

c. $\frac{27}{36}$ bagian

d. $\frac{29}{36}$ bagian

e. $\frac{32}{36}$ bagian

Jawab:

Misalkan, jumlah kegiatan kriya 1 bagian sehingga banyak siswa yang memilih kriya keramik adalah

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{2}{9}$$
$$=\frac{36-12-9-8}{36}$$
$$=\frac{7}{36}$$

Jadi, siswa yang memilih kriya keramik adalah $\mathbf{\frac{7}{36}}$ bagian.

Jawaban: **a**

Sumber: *UN SMK 2005*

2. Perkalian dan Pembagian Bilangan Pecahan

Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ masing-masing adalah bilangan pecahan maka berlaku operasi perkalian dan pembagian sebagai berikut:

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Contoh Soal 1.5

Hitunglah nilai operasi perkalian dan pembagian pada bilangan pecahan berikut.

a. $\frac{5}{7} \times \frac{4}{15}$

b. $3\frac{1}{2} \times 2\frac{3}{4}$

c. $\frac{2}{10} : \frac{4}{7}$

d. $5\frac{3}{5} : 1\frac{1}{5}$

Jawab:

a. $\frac{5}{7} \times \frac{4}{15} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 15} = \frac{4}{7 \cdot 3} = \mathbf{\frac{4}{21}}$

b. $3\frac{1}{2} \times 2\frac{3}{4} = \frac{7}{2} \times \frac{11}{4} = \frac{77}{8} = \mathbf{9\frac{5}{8}}$

c. $\frac{2}{10} : \frac{4}{7} = \frac{2}{10} \times \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot 7}{10 \cdot 4} = \frac{7}{10 \cdot 2} = \mathbf{\frac{7}{20}}$

d. $5\frac{3}{5} : 1\frac{1}{5} = \frac{28}{5} : \frac{6}{5} = \frac{28}{5} \times \frac{5}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3} = \mathbf{4\frac{2}{3}}$

Contoh Soal 1.6

Jika emas 18 karat mengandung $\frac{18}{24}$ emas murni dan $\frac{6}{24}$ campuran logam lain, tentukan berat emas murni yang terkandung dalam:

a. 72 gram emas 18 karat;

b. 120 gram emas 22 karat.

Jawab:

a. Berat emas murni dalam 72 gram emas 18 karat ada:

$$\frac{18}{24} \times 72 \text{ gram} = 54 \text{ gram.}$$

b. Berat emas murni dalam 120 gram emas 22 karat ada:

$$\frac{22}{24} \times 120 \text{ gram} = 110 \text{ gram.}$$

Anda Pasti Bisa

Biasanya pecahan dinyatakan dalam bentuk yang paling sederhana. Akan tetapi, pada persoalan kali ini, Anda dapat memutarkan prosesnya, kemudian mencari beberapa cara yang berbeda untuk menuliskan sebuah pecahan yang sama dengan $\frac{1}{2}$. Coba tuliskan pecahan-pecahan lainnya yang sama dengan $\frac{1}{2}$ dengan menggunakan semua angka 1, 2, ..., dan 9. Salah satu contoh jawabannya adalah $\frac{6.729}{13.458}$. Sebutkan enam jawaban lain!

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

Latihan Soal 1.3

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Hitunglah hasil operasi-operasi bilangan berikut ini.

   a. $\frac{2}{7} + \frac{7}{5}$

   b. $2\frac{5}{12} + 3\frac{2}{3} + \frac{11}{12}$

   c. $2 - \frac{5}{13}$

   d. $\frac{1}{8} - \frac{4}{9}$

   e. $2\frac{4}{5} - 1\frac{2}{3}$

   f. $\frac{11}{5} - \frac{6}{7} - \frac{1}{10}$

   g. $4\frac{2}{5} - 3 + 1\frac{1}{4}$

   h. $5 + 2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}$

2. Hitunglah hasil operasi-operasi bilangan berikut ini.

   a. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

   b. $1\frac{1}{4} \times 3\frac{'1}{5}$

   c. $\frac{2}{3} \times 4\frac{1}{2}$

   d. $2\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{7} \times 1\frac{5}{11}$

   e. $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$

   f. $3\frac{1}{8} : 3$

   g. $5\frac{2}{3} : 2\frac{2}{3}$

   h. $4\frac{1}{2} : 1\frac{8}{9}$

3. Diketahui $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{2}{3}$, dan $r = \frac{1}{4}$.
Hitunglah nilai dari bentuk-bentuk berikut.
   a. $p \cdot q \cdot r$
   b. $pq + qr$
   c. $(q - p) \cdot r$
   d. $pq + pr - qr$
4. Dalam pemilihan ketua suatu organisasi, terdapat tiga calon, yaitu *A*, *B*, dan *C*. Setelah diadakan pemungutan suara, ternyata *A* memperoleh $\frac{2}{5}$ bagian, *B* memperoleh $\frac{1}{4}$ bagian, dan sisanya diperoleh C.
   a. Berapa bagian jumlah suara yang diperoleh *C*?
   b. Jika pemilih 300 orang, berapa suara yang diperoleh masing-masing calon?
5. Seorang karyawan mendapat upah Rp120.000,00, per minggu. Berapakah upahnya selama seminggu jika ia mendapat kenaikan $\frac{1}{5}$ dari upah semula?

D. Konversi Bilangan

Dalam keperluan tertentu, suatu bilangan perlu dinyatakan dalam bentuk-bentuk tertentu. Seperti untuk menyatakan tingkat inflasi ekonomi suatu negara digunakan persen (%), untuk ketelitian dalam perhitungan digunakan bentuk desimal, atau untuk menyatakan perbandingan dua buah objek digunakan pecahan. Pada bagian ini, Anda akan mempelajari kembali mengenai konversi bilangan pecahan dari satu bentuk ke bentuk yang lain.

1. Konversi Bentuk Pecahan ke dalam Bentuk Desimal dan Persen

Mengubah bentuk pecahan menjadi bentuk desimal dapat dilakukan dengan cara membagi pembilang oleh penyebutnya. Adapun bentuk persen diperoleh dengan cara mengalikan bentuk pecahan atau desimal dengan 100%.

Contoh Soal 1.7

Nyatakan pecahan di bawah ini ke dalam bentuk desimal dan persen.

a. $\frac{3}{5}$

b. $2\frac{3}{4}$

Jawab:

a. **Bentuk Desimal**

$$\frac{3}{5} \Rightarrow 5 \overline{)3} = 0{,}6$$

$$\begin{array}{r} 0{,}6 \\ 5\,\overline{)\,3} \\ \underline{0}\,- \\ 30 \\ \underline{30}\,- \\ 0 \end{array}$$

Jadi, $\frac{3}{5} = 0{,}6$.

Cara lain adalah dengan mengubah penyebutnya menjadi bilangan 10, 100, 1000, dst.

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Bentuk Persen

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 100\%$$
$$= \frac{300}{5}\% = 60\%$$

b. **Bentuk Desimal**

$$2\frac{3}{4}=\frac{11}{4}\Rightarrow 4\overline{)11}=2{,}75$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 8 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 20 \\ \hline 0 \end{array}$$

Jadi, $2\frac{3}{4}=2{,}75$.

Cara lain adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 2\frac{3}{4} &= 2+\frac{3}{4}=2+\frac{3}{4}\times\frac{25}{25} \\ &= 2+\frac{75}{100} \\ &= 2+0{,}75 \\ &= \mathbf{2{,}75.} \end{aligned}$$

Bentuk Persen

$$\begin{aligned} 2\frac{3}{4} &= \frac{11}{4}\times 100\% \\ &= \frac{1100}{4}\% = 275\%. \end{aligned}$$

2. Konversi Bentuk Desimal ke dalam Bentuk Pecahan dan Persen

Mengubah bentuk desimal menjadi bentuk pecahan hanya berlaku untuk bilangan desimal dengan angka di belakang koma terbatas atau banyaknya angka di belakang koma tak terbatas dan berulang.

Contoh Soal 1.8

Nyatakan bilangan desimal berikut ke dalam bentuk pecahan dan persen.

a. 1,4
b. 2,413
c. 0,666...
d. 2,565656...
e. 2,2156101...

Jawab:

Bentuk Pecahan:

a. 1,4
Terdapat 1 angka di belakang koma maka pecahan tersebut merupakan pecahan dengan penyebut 10 sehingga

$$1{,}4=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}=1\frac{2}{5}.$$

b. 2,413
Terdapat 3 angka di belakang koma maka pecahan tersebut merupakan pecahan dengan penyebut 1000 sehingga

$$2{,}413=\frac{2.413}{1.000}=2\frac{413}{1.000}.$$

c. 0,666...

Misalkan, x = 0,666..., terdapat 1 angka berulang maka pemisalan dikali 10.

$$\begin{array}{rl} 10x &= 6,666... \\ x &= 0,666... \quad - \\ \hline 9x &= 6 \\ x &= \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{array}$$

Jadi, $0,666... = \frac{2}{3}$.

Dengan cara lain, yaitu jika banyaknya angka yang berulang satu angka maka pecahannya adalah satu angka yang berulang itu dibagi dengan 9. Jadi, 0,666... angka yang berulang satu angka, yaitu angka 6 maka

$0,666... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

d. 2,565656...

Misalkan, x = 2,565656... terdapat 2 angka berulang maka pemisalan dikali 100.

$$\begin{array}{rl} 100x &= 256,565656... \\ x &= \quad 2,565656... \quad - \\ \hline 99x &= 254 \\ x &= \frac{254}{99} \end{array}$$

Jadi, $2,565656... = \frac{254}{99}$.

e. 2,2156101...

Bentuk bilangan di atas **tidak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan** karena angka di belakang koma tak terbatas dan tidak berulang.

Bentuk Persen:

a. 1,4 = 1,4 × 100% = 140%

b. 2,413 = 2,413 × 100% = 241,3%

c. 0,666...

Angka di belakang koma tidak terbatas maka dilakukan pembulatan terlebih dahulu sehingga diperoleh:

0,666... ≈ 0,667

0,667 = 0,667 × 100% = 66,67%.

d. 2,565656...

Angka di belakang koma tidak terbatas maka dilakukan pembulatan terlebih dahulu sehingga diperoleh:

2,565656... ≈ 2,5657

2,5656 = 2,5657 × 100% = 256,57%.

e. 2,2156101...

Angka di belakang koma tidak terbatas maka dilakukan pembulatan terlebih dahulu sehingga diperoleh

2,5156101... ≈ 2,516

2,516 = 2,516 × 100% = 251,6%.

Catatan

Penulisan bilangan desimal berulang dapat ditulis dengan cara yang lebih singkat.

Misalnya:

$0,6666... = 0,\overline{6}$

$0,181818... = 0,\overline{18}$

$2,3151515... = 2,3\overline{15}$

Info Math

Fibonacci (1180–1250)

Sumber: *www.uni-ulm.de*

Pecahan telah digunakan sejak zaman Mesir kuno. Pada 1202 seorang ahli matematika Italia, Fibonacci, menjelaskan sebuah sistem bilangan pecahan yang rumit untuk digunakan dalam perubahan mata uang, ia juga menciptakan tabel-tabel konversi dari mulai pecahan-pecahan biasa, seperti 3/8, sampai dengan pecahan-pecahan yang pembilangnya selalu 1, seperti 1/8.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*, 2002

3. Konversi Persen ke dalam Bentuk Pecahan dan Desimal

Perubahan bentuk persen menjadi bentuk pecahan dapat Anda lakukan dengan mengganti tanda persen (%) menjadi seperseratus $\left(\frac{1}{100}\right)$, kemudian nyatakan dalam bentuk yang paling sederhana.

Contoh Soal 1.9

Nyatakan bentuk persen berikut ke dalam bentuk pecahan dan desimal

a. 24%

b. $5\frac{2}{5}\%$

Jawab:

a. **Bentuk Pecahan**:

$$24\% = 24 \times \frac{1}{100} = \frac{24}{100} = \mathbf{\frac{6}{25}}$$

Bentuk Desimal:

$$24\% = \frac{24}{100} = \mathbf{0,24}$$

b. **Bentuk Pecahan**:

$$5\frac{2}{5}\% = \frac{27}{5}\% = \frac{27}{5} \times \frac{1}{100} = \mathbf{\frac{27}{500}}$$

Bentuk Desimal:

$$5\frac{2}{5}\% = \frac{27}{5} \times \frac{1}{100}$$
$$= \frac{27}{500} \times \frac{2}{2}$$
$$= \frac{54}{1.000} = \mathbf{0,054}$$

Latihan Soal 1.4

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Nyatakan bentuk pecahan berikut ke dalam bentuk desimal dan persen.

a. $\frac{4}{5}$ **c.** $4\frac{3}{10}$ **e.** $10\frac{2}{9}$

b. $2\frac{5}{8}$ **d.** $6\frac{1}{7}$ **f.** $11\frac{4}{5}$

2. Nyatakan bentuk desimal berikut ke dalam bentuk pecahan dan persen.

a. 0,12 d. 0,333...

b. 8,25 e. 1,414141...

c. 14,68 f. 21,623623...

3. Nyatakan bentuk persen berikut ke dalam bentuk pecahan atau persen.

a. 20% **d.** $10\frac{1}{8}\%$

b. 5% **e.** $25\frac{2}{5}\%$

c. $2\frac{1}{4}$ **f.** $32\frac{7}{10}\%$

4. Hitunglah:

a. $5\% + \frac{4}{5} - 0,25$

b. $\frac{6}{5} + 2,4 + 11\%$

c. $6,8 - 2\frac{2}{5} + 2\frac{3}{4}\%$

d. $24\% - \frac{11}{5} + 1\frac{1}{2}$

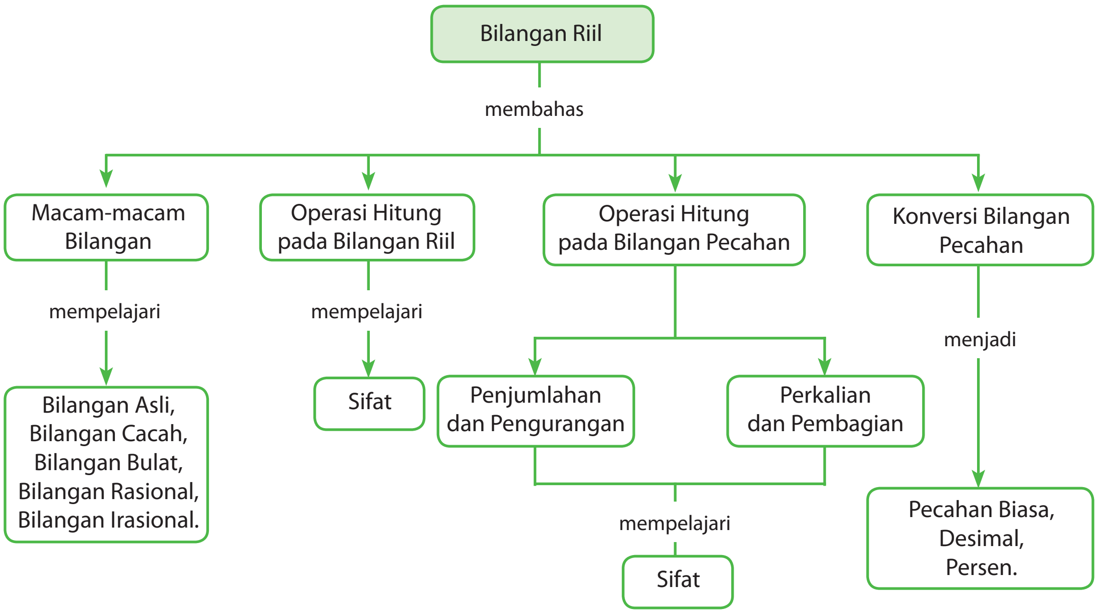
Rangkuman

1. Himpunan bilangan riil adalah gabungan antara himpunan bilangan rasional dan himpunan bilangan irasional.
2. Untuk setiap a, b, dan $c \in R$ maka berlaku sifat-sifat berikut:
   a. Tertutup terhadap operasi hitung penjumlahan dan perkalian.
   b. Komutatif terhadap operasi hitung penjumlahan dan perkalian.
   c. Asosiatif terhadap operasi hitung penjumlahan dan perkalian.
   d. Distributif terhadap operasi hitung perkalian
   e. Memiliki elemen identitas terhadap operasi hitung penjumlahan dan perkalian.
   f. Memiliki invers terhadap operasi hitung penjumlahan dan perkalian.
3. Jika $\frac{a}{b}$ dan $\frac{c}{d}$ adalah suatu bilangan pecahan maka berlaku:
   a. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
   b. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$
   c. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
   d. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$
4. Bilangan pecahan dapat dikonversi menjadi bentuk lain, yaitu pecahan biasa, desimal, dan bentuk persen.

Alur **Pembahasan**

Perhatikan alur pembahasan berikut:

Materi tentang Bilangan Riil yang sudah Anda pelajari digambarkan sebagai berikut.



Kata **Mutiara**

Pierre De Coubertin

Yang terpenting dari kehidupan bukanlah kemenangan, namun bagaimana bertanding dengan baik.

Latihan Soal Bab 1

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Jika nilai $p = -4$, $q = 5$, dan $r = -2$, nilai dari $3p^2 + q - r$ adalah ....

a. 43 d. 55
b. 45 e. 65
c. 53

Alasan: ____________________

2. Apabila nilai dari $a = 3$, $b = 0$, dan $c = -3$ maka nilai dari $[a \times (b + c - a)] \times (b + c) = ...$

a. –54 d. 54
b. –45 e. 43
c. 45

Alasan: ____________________

3. Anggota dari himpunan $A = \{x \mid -6 \leq x < 3, x \in B\}$ adalah ....

a. {–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}
b. {–5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}
c. {–6, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2}
d. {–5, –3, –1, 1, 3}
e. {–5, –3, –1, 1}

Alasan: ____________________

4. Hasil dari $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$ adalah ....

a. $\frac{1}{4}$ d. 1
b. $\frac{2}{4}$ e. $1\frac{1}{4}$
c. $\frac{3}{4}$

Alasan: ____________________

5. Hasil dari $5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4}$ adalah ....

a. 3 d. $3\frac{3}{4}$
b. $3\frac{1}{2}$ e. 4
c. $3\frac{1}{2}$

Alasan: ____________________

6. Nilai dari $\left(\frac{4}{3} : \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2} = ...$

a. 1 d. 8
b. 20 e. 16
c. 4

Alasan: ____________________

7. Seorang siswa berhasil menjawab dengan benar 28 soal, salah 9, serta tidak menjawab 3 soal. Jawaban yang benar nilainya 4, salah nilainya –1, serta tidak menjawab nilainya 0. Nilai yang diperoleh siswa tersebut adalah ....

a. 96 d. 103
b. 98 e. 121
c. 100

Alasan: ____________________

8. Dalam suatu permainan, apabila menang maka diberi nilai 3, tetapi apabila kalah diberi nilai –2, dan apabila seri diberi nilai –1. Suatu regu telah bermain sebanyak 47 kali, 21 kali menang dan 3 kali seri. Nilai yang diperoleh regu itu adalah ....

a. –23 d. 14
b. –7 e. 60
c. 7

Alasan: ____________________

9. $(6 - 5) \times 9 = (p \times 9) - ((5 \times m)$. Nilai p dan m berturut-turut adalah ....

a. 6 dan 5 d. 5 dan 9
b. 6 dan 6 e. 9 dan 6
c. 6 dan 9

Alasan: ____________________

10. Seorang karyawan menggunakan 15% dari gajinya untuk biaya transportasi selama sebulan, 23,5% untuk sewa rumah dan bayar listrik selama sebulan, dan sisanya 60% sebanyak Rp72.000,00 ditabung. Biaya untuk makan selama sebulan adalah ....

a. Rp400.000,00 d. Rp425.000,00
b. Rp410.000,00 e. Rp500.000,00
c. Rp420.000,00

Alasan: ____________________

11. Jika $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{4}$, dan $c = \frac{1}{5}$, nilai dari $a + bc = ...$

a. $\frac{5}{30}$ d. $\frac{23}{60}$
b. $\frac{23}{15}$ e. $\frac{7}{15}$
c. $\frac{7}{60}$

Alasan: ____________________

12. 85% dari suatu bilangan adalah 85. Bilangan tersebut adalah ....

a. 80
b. 90
c. 100
d. 110
e. 120

Alasan: ______________________

13. Berikut adalah data jumlah siswa yang mengikuti kegiatan ekstrakulikuler di suatu SMK. Siswa yang mengikuti kegiatan olahraga sebanyak 40%, musik 20%, Paskibra 10%, PMR 5%, dan sisanya mengikuti kegiatan Pramuka. Jika jumlah siswa seluruhnya 600 orang maka banyaknya siswa yang mengikuti kegiatan ekstrakulikuler pramuka adalah ....

a. 30 orang
b. 60 orang
c. 120 orang
d. 150 orang
e. 240 orang

Alasan: ______________________

14. Beras sebanyak 251 $\frac{3}{4}$ kg dibagikan kepada yang tidak mampu. Jika setiap orang mendapatkan $2\frac{3}{8}$ kg, orang yang mendapat beras tersebut ada .... orang.

a. 104
b. 105
c. 106
d. 107
e. 108

Alasan: ______________________

15. Pak Willy mempunyai $1\frac{3}{5}$ ha tanah 35% dari luas tanah tersebut ditanami jagung. Luas tanah yang ditanami jagung adalah .... ha.

a. $\frac{12}{25}$
b. $\frac{14}{25}$
c. $\frac{16}{25}$
d. $\frac{14}{30}$
e. $\frac{16}{35}$

Alasan: ______________________

16. Toko buku ABC menjual 3 buah buku tulis dengan harga Rp7.500,00, 4 buah pensil dengan harga Rp5.000,00, dan 6 buah penghapus seharga Rp4.500,00. Jika Toni ingin membeli 20 buku tulis, 3 buah pensil, dan 2 buah penghapus dengan masing-masing mendapat diskon 10% maka Toni harus membayar sebesar ....

a. Rp69.465,00
b. Rp63.150,00
c. Rp55.250,00
d. Rp49.725,00
e. Rp49.500,00

Alasan: ______________________

17. Pedagang elektronik menjual televisi 14 inci seharga Rp1.500.000,00 dan memperoleh keuntungan 20% dari penjualan tersebut maka harga pembelian televisi itu adalah ....

a. Rp750.000,00
b. Rp1.150.000,00
c. Rp1.200.000,00
d. Rp1.250.000,00
e. Rp1.300.000,00

Alasan: ______________________

18. Seperangkat peralatan kantor dijual dengan harga Rp2.000.000,00. Setelah dikenakan potongan, harganya menjadi Rp1.600.000,00 maka persentase potongan tersebut adalah ....

a. 16%
b. 20%
c. 25%
d. 32%
e. 40%

Alasan: ______________________

19. Rudi membeli sebuah buku. Setelah harga dipotong 20%, ia membayar sebesar Rp48.000,00. Harga sebelum dipotong adalah ....

a. Rp57.600,00
b. Rp60.000,00
c. Rp72.000,00
d. Rp86.000,00
e. Rp96.000,00

Alasan: ______________________

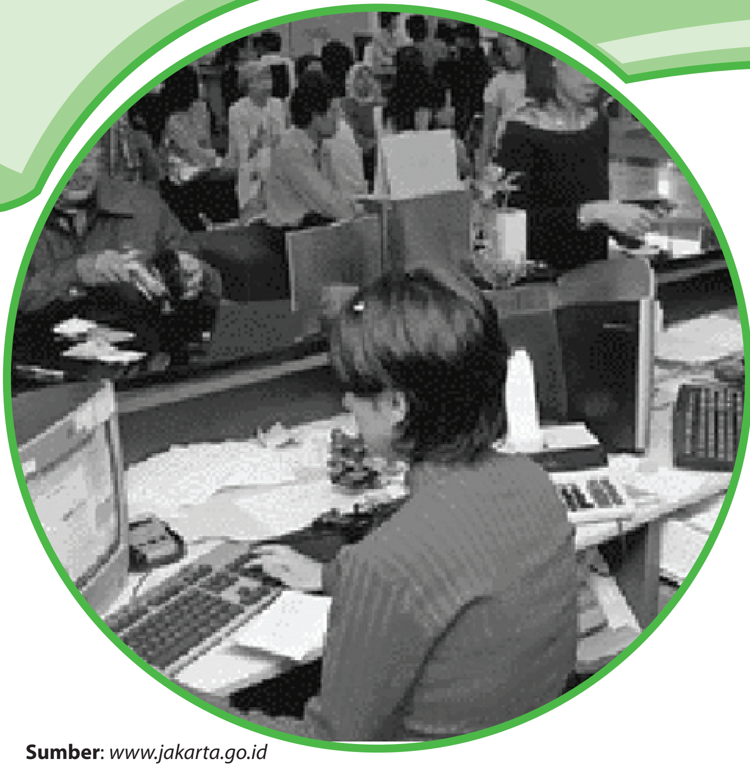
20. Menjelang hari raya, sebuah toko "M" memberikan diskon 15% untuk setiap pembelian barang. Jika Rini membayar pada kasir sebesar Rp127.500,00 maka harga barang yang dibeli Rini sebelum dikenakan diskon adalah ....

a. Rp146.625,00
b. Rp150.000,00
c. Rp152.500,00
d. Rp172.500,00
e. Rp191.250,00

Alasan: ______________________

B. Jawablah soal-soal berikut.

1. Nyatakanlah himpunan-himpunan berikut dengan cara mendaftarkan semua anggotanya.
   a. $A = \{x \mid 3 < x < 12, x \in A\}$
   b. $B = \{x \mid -5 < x < 10, x \in C\}$
2. Vina berbelanja di warung dan membeli $1\frac{1}{2}$ gula, $\frac{3}{4}$ kg mentega, dan 3 kg telur. Harga 1 kg gula Rp6.500,00, 1 kg mentega Rp8.500,00, dan harga 1 kg telur Rp10.000,00. Berapakah uang yang harus dibayarkan Vina?
3. Sebuah sekolah kejuruan memiliki siswa perempuan sebanyak $\frac{4}{6}$ dari jumlah keseluruhan siswa. Jika jumlah siswa perempuan 156 orang, berapa jumlah siswa laki-laki?
4. Nyatakanlah ke dalam bentuk desimal dan persen.
   a. $\frac{2}{5}$
   b. $\frac{1}{3}$
   c. $2\frac{4}{5}$
   d. $1\frac{5}{6}$
5. Yuli menggunakan $\frac{1}{10}$ bagian dari uangnya untuk membeli pensil, $\frac{1}{5}$ bagian untuk membeli pulpen, dan $\frac{1}{2}$ bagian untuk membeli buku. Jika sisa uang Yuli Rp2.000,00, berapa rupiahkah harga pensil, pulpen, dan buku masing-masing?



Sumber: *www.jakarta.go.id*

Bab

II

Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma

Materi tentang bilangan berpangkat telah Anda pelajari sebelumnya di Kelas IX. Pada bab ini akan dipelajari bilangan berpangkat dan dikembangkan sampai dengan bilangan berpangkat bulat negatif dan nol. Selain itu, akan dipelajari pula tentang logaritma.

Dalam kehidupan sehari-hari, banyak permasalahan yang dapat diselesaikan dengan menggunakan logaritma. Sebagai contoh, Dodi menabung di bank sebesar Rp2.500.000,00. Jika bank tersebut memberikan bunga 10% per tahun, berapa lama ia harus menabung agar nilai tabungannya menjadi Rp3.660.250,00? Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan logaritma. Untuk itu, pelajarilah bab ini dengan baik.

Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Sederhanakanlah bentuk pangkat berikut:

   a. $(4a)^{-2} \times (2a)^3$

   b. $(2a^2)^3 : 4a^3$

   c. $\dfrac{3 \cdot m^3 n^4 p^{-6}}{9m^{-2} np^{-2}}$

2. Hitunglah nilai dari:

   a. $\dfrac{(81)^{\frac{1}{4}} + (8)^{\frac{2}{3}}}{7^{-1}}$

   b. $(125)^{\frac{2}{3}} - 4^2 + \dfrac{3^{-\frac{2}{5}}}{3^{-\frac{7}{5}}}$

3. Jika $a = \sqrt[2]{2} + 3$ dan $b = \sqrt[3]{2} - 1$ maka hitunglah nilai dari:

   a. $2a + b$

   b. $a \cdot b$

4. Tentukan nilai x dari persamaan eksponen berikut:

   $5^{x+3} = \sqrt[4]{25^{x+5}}$

5. Sederhanakanlah bentuk logaritma berikut:

   a. $^2\log 48 + {}^5\log 50 - {}^2\log 3 - {}^5\log 2$

   b. $^a\log \sqrt[3]{a} \times {}^a\log \sqrt[4]{a}$

   c. $3\,{}^3\log 5 + 4\,{}^2\log 3 - \dfrac{^{16}\log 4}{^3\log \sqrt{3}}$

A. Bilangan Pangkat

Tahukah Anda, berapa jarak antara matahari dan bumi? Ternyata jarak antara matahari dan bumi adalah 150.000.000 km. Penulisan jarak antara matahari dan bumi dapat ditulis dengan bilangan pangkat. Bagaimana caranya?

Pangkat bilangan bulat dapat berupa bilangan bulat positif, nol, atau negatif.

1. Pangkat Bulat Positif

a. Pengertian Pangkat Bulat Positif

Jika a adalah bilangan riil dan n bilangan bulat positif maka a^n (dibaca "a pangkat n") adalah hasil kali n buah faktor yang masing-masing faktornya adalah a. Jadi, pangkat bulat positif secara umum dinyatakan dalam bentuk

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}}$$

dengan: a = bilangan pokok (basis);
n = pangkat atau eksponen;
a^n = bilangan berpangkat.

Contoh Soal 2.1

Tentukan nilai dari pemangkatan berikut.

a. 3^4 b. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3$ c. $(-1)^7$

Jawab:

a. $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \mathbf{81}$

b. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} = \mathbf{\dfrac{8}{125}}$

c. $(-1)^7 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = \mathbf{-1}$

Dengan menggunakan konsep bilangan pangkat penulisan jarak antara matahari dan bumi, yaitu 150.000.000 km dapat ditulis dengan cara yang lebih ringkas, yang dikenal sebagai notasi ilmiah, yaitu $1{,}5 \times 10^8$ km.

b. Sifat-Sifat Operasi Pemangkatan

1) Sifat Perkalian Bilangan Berpangkat

Untuk $a \in R$ dan m, n bilangan bulat positif, berlaku:

$$\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} a^m \times a^n &= \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } m \text{ faktor}} \times \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}} \\ &= \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a \times a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } m+n \text{ faktor}} = a^{m+n} \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

2) Sifat Pembagian Bilangan Berpangkat

Untuk $a \in R$, $a \neq 0$ dan m, n bilangan bulat positif yang memenuhi $m > n$.

$$\boxed{a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} a^m : a^n &= \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{\text{sebanyak } m \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}} \\ &= \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } (m-n) \text{ faktor}} = a^{m-n} \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

3) Sifat Pangkat dari Bilangan Berpangkat

Untuk $a \in R$ dan m, n bilangan bulat positif, berlaku:

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} (a^m)^n &= \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times \ldots \times a^m}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}} \\ &= \underbrace{(a \times a \times \ldots \times a) \times (a \times a \times \ldots \times a) \times \ldots \times (a \times a \times \ldots \times a)}_{\text{sebanyak } m \times n \text{ faktor}} = a^{m \cdot n} \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

4) Sifat Pangkat dari Perkalian Bilangan

Untuk a, $b \in R$ dan n bilangan bulat positif, berlaku:

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= \underbrace{ab \times ab \times ab \times \ldots \times ab}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}} \\ &= \underbrace{(a \times a \times a \times \ldots \times a)}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}} \times \underbrace{(b \times b \times b \times \ldots \times b)}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}} = a^n \cdot b^n \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

5) Sifat Pangkat dari Pembagian Bilangan

Untuk a, $b \in R$, $b \neq 0$ dan n bilangan bulat positif, berlaku:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b}}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}} \\ &= \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}}{\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}} = \frac{a^n}{b^n} \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

Solusi

Bentuk sederhana dari $2^3 \times (2^2)^3$ adalah ....

a. 2^7 **d.** 2^{12}
b. 2^8 **e.** 2^{18}
c. 2^9

Jawab:

$$\begin{aligned} 2^3 \times (2^2)^3 &= 2^3 \times 2^6 \\ &= 2^{3+6} \\ &= \mathbf{2^9} \end{aligned}$$

Jawaban: **c**

Sumber: *UN SMK* 2005

Contoh Soal 2.2

Sederhanakanlah bentuk pemangkatan berikut.

a. $p^5 \times p^{10} \times p^4$

b. $(x^2)^4$

c. $2^6 : 2^4$

d. $(3x^2 y)^2$

e. $\left(\dfrac{a^7 \cdot b^5}{a^5 \cdot b^2}\right)^2$

Jawab:

a. $p^5 \times p^{10} \times p^4 = \boldsymbol{p^{19}}$ (sifat perkalian bilangan pangkat)

b. $(x^2)^4 = x^{2 \cdot 4} = \boldsymbol{x^8}$ (sifat pangkat dari bilangan berpangkat)

c. $2^6 : 2^4 = 2^{6-4} = 2^2 = 2 \times 2 = \mathbf{4}$ (sifat pembagian bilangan pangkat)

d. $(3x^2y)^2 = 3^2(x^2)^2y^2$ (sifat pangkat dari perkalian bilangan)

$= 3^2x^4y^2$ (sifat pangkat dari bilangan pangkat)

$= \boldsymbol{9x^4y^2}$

e. $\left(\dfrac{a^7b^5}{a^5b^2}\right)^2 = \left(a^{7-5}b^{5-2}\right)^2$ (sifat pembagian bilangan pangkat)

$= \left(a^2b^3\right)^2$

$= \left(a^2\right)^2\left(b^3\right)^2$ (sifat pangkat dari perkalian bilangan)

$= \boldsymbol{a^4b^6}$ (sifat pangkat dari bilangan pangkat)

2. Pangkat Bulat Negatif dan Nol

a. Bilangan Berpangkat Nol

Untuk $a \in R$ dan $a \neq 0$ maka

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Bukti:

$$a^0 = a^{n-n}$$

$$= \frac{a^n}{a^n} \text{ (sifat pembagian bilangan berpangkat)}$$

$$= \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{n \text{ faktor}}}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ faktor}}}$$

$$= 1$$

Jadi, $a^0 = 1$.

Catatan

0^0 tidak terdefinisi.

karena:

$0^0 = 0^{n-n}$

$= \dfrac{0^n}{0^n}$

$= \dfrac{0}{0}$

tidak terdefinisi

Contoh Soal 2.3

Tentukan nilai dari pemangkatan bilangan-bilangan berikut.

a. 6^0

b. $(2a)^0$

c. $\left(\dfrac{x^3y^4}{4}\right)^0$

Jawab:

a. $6^0 = \mathbf{1}$

b. $(2a)^0 = \mathbf{1}$, dengan syarat $a \neq 0$

c. $\left(\dfrac{x^3y^4}{4}\right)^0 = \mathbf{1}$, dengan syarat $x \neq 0$ dan $y \neq 0$

b. Bilangan Berpangkat Negatif

Untuk $a \in R$ dan $a \neq 0$ didefinisikan:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Definisi ini berasal dari bentuk berikut.

Misalkan $a^m : a^{m+n} = a^{m-(m+n)} = a^{-n}$

$$a^m : a^{m+n} = \frac{a^m}{a^m a^n} = \frac{1}{a^n}$$

maka $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Contoh Soal 2.4

1. Nyatakan bilangan-bilangan berpangkat di bawah ini ke dalam pangkat negatif.

   a. a^4 b. $x^3 y^2$ c. $\dfrac{1}{p^5 q^2}$

   Jawab:

   a. $a^4 = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a^{-4}}}$

   b. $x^3 \cdot y^2 = \dfrac{1}{x^{-3}} \cdot \dfrac{1}{y^{-2}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x^{-3} \times y^{-2}}}$

   c. $\dfrac{1}{p^5 q^2} = \dfrac{1}{p^5} \cdot \dfrac{1}{q^2} = \boldsymbol{p^{-5} \cdot q^{-2}}$

2. Nyatakan bilangan berpangkat di bawah ini ke dalam pangkat positif.

   a. p^{-5} b. $3^{-3} pq^{-2}$ c. $\dfrac{x^2 y^{-1}}{2^{-2} z^{-5}}$

   Jawab:

   a. $p^{-5} = \dfrac{1}{p^5}$

   b. $3^{-3} pq^{-2} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^3}} \boldsymbol{p} \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{q^2}}$

   c. $$\frac{x^2 y^{-1}}{2^{-2} z^{-5}} = x^2 y^{-1} \frac{1}{2^{-2}} \frac{1}{z^{-5}}$$
   $$= x^2 \frac{1}{y} 2^2 z^5$$
   $$= \frac{\boldsymbol{4x^2 z^5}}{\boldsymbol{y}}$$

Solusi

Bentuk sederhana dari $\dfrac{(a^{-1}b^2)^3}{a^{-9}b^3}$ adalah ....

a. a^5b^3
b. a^6b^3
c. a^6b^8
d. a^7b^6
e. a^8b^3

Jawab:

$$\frac{(a^{-1}b^2)^3}{a^{-9}b^3} = \frac{a^{-1\times3}b^{2\times3}}{a^{-9}b^3} = \frac{a^{-3}b^6}{a^{-9}b^3}$$
$$= a^{-3-(-9)} \cdot b^{6-3}$$
$$= \boldsymbol{a^6 b^3}$$

Jawaban: **b**

Sumber: *UN SMK* 2006

Latihan Soal 2.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Sederhanakan bentuk pangkat berikut.

   a. $m^5 \times m^7$
   b. $2a^5 \times 5a^2 \times 3a$
   c. $\dfrac{1}{2}a^4 \times 5a^3 \times 3a$
   d. $(5^3x^5y) \times (5^2y^4)$
   e. $(7p^3q^2r) \times \left(\dfrac{1}{4}p^4qr^6\right)$

2. Sederhanakan bentuk pangkat berikut.

   a. $5^{10} : 5^8$
   b. $a^3b : ab^4$
   c. $(2p^3q^5r^2) : (4pq^2r^2)$
   d. $\dfrac{27x^3y^5z^2}{3xy^2z}$

e. $\left(\dfrac{12ba^5b^2}{32ab^4}\right)\times\left(\dfrac{2^3a^3b^5}{a^7b^3}\right)$

3. Sederhanakan bentuk pangkat berikut.
   a. $(2p)^3$
   b. $(3m^2n^5)^3$
   c. $(-4\, m^3\, n^4)^2 : (64\, m\, n^2)^3$
   d. $\left(\dfrac{x^3}{y^2z}\right)^5$
   e. $\dfrac{\left(a^2b^{-3}\right)^4}{\left(a^2b^6\right)^{-1}}$

4. Sederhanakan bentuk pangkat berikut. Kemudian, nyatakan dalam pangkat positif.
   a. $\dfrac{3^{-7}\times3^6}{3^{-5}\times3^{-4}}$
   b. $(-2a^3b^{-1}) : (2a^{-2}b^3)^2$
   c. $\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2x^4}{y^2}\right)^{-1}$
   d. $\dfrac{c-d}{c^{-1}-d^{-1}}$
   e. $\dfrac{1}{a^{-1}+b^{-2}}$

5. Jika $a = 2$ dan $b = 3$, tentukan nilai dari:
   a. $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-2}+b^{-2}}$
   b. $(a-b)^{-3}\left(\dfrac{a+b}{b-a}\right)^{-2}\cdot\dfrac{1}{(a+b)^{-3}}$
   c. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+ab^{-1}}}$

B. Bentuk Akar

1. Konsep Bilangan Irasional

Info Math

Notasi radikal $\sqrt{\ }$ diperkenalkan pertama kali pada 1525 oleh seorang ahli aljabar Jerman, Christoff Rudolf (1500–1545) dalam bukunya yang berjudul *Die Coss*. Simbol ini dipilih karena kelihatan seperti huruf *r* dari kata *radix*, yang dalam bahasa latin berarti akar.

Sumber: *Finite Mathematics and It's Applications*, 1994

Pada Bab 1, Anda telah diperkenalkan mengenai bilangan rasional dan bilangan irasional. Bilangan irasional didefinisikan sebagai bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan $\dfrac{a}{b}$ dengan a , $b \in$ B dan $b \neq 0$. Sedangkan bilangan rasional adalah blangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk perbandingan $\dfrac{a}{b}$ dengan a , b, $\in$ B dan $b \neq 0$.

Contoh bilangan irasional:

a. $\pi = 3{,}141592$ ...
b. $e = 2{,}718281$ ...
c. $\sqrt{2} = 1{,}414213$ ...
d. $\sqrt{7} = 2{,}\ 6457$...

Contoh bilangan rasional:

a. $\dfrac{17}{99} = 0{,}171717\cdots$
b. $\sqrt{9} = 3{,}0000$ ...
c. $4 = 4{,}0000$ ...
d. $1{,}\bar{6} = 1{,}6666... = \dfrac{15}{9}$

Perlu diketahui bahwa bilangan irasional umumnya terdapat pada bilangan bentuk akar, tetapi tidak semua bentuk akar merupakan bilangan irasional.

2. Bentuk Akar

Dalam bilangan bentuk akar (radikal), ada 3 bagian yang perlu diketahui, yaitu lambang bentuk akar, radikan, dan indeks. Secara umum, bentuk akar ditulis dalam bentuk:

$$\boxed{\sqrt[n]{a}}$$

($\sqrt[n]{a}$ dibaca "akar pangkat n dari a")

dengan: $\sqrt[n]{a}$ disebut bentuk akar (radikal),

$\sqrt{\ }$ disebut lambang bentuk akar,

n disebut indeks (pangkat akar),

a disebut radikan (bilangan di bawah tanda akar), dengan a bilangan riil positif untuk n bilangan asli dan untuk n bilangan ganjil, a dapat berupa bilangan riil negatif.

Bentuk akar terbagi atas 2 jenis:

1. **Akar Senama**

   Suatu bentuk akar dikatakan akar senama jika indeks (pangkat akar) nya sama.

   Contoh:

   a. $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, mempunyai indeks 2

   b. $\sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{11}$, mempunyai indeks 3.

2. **Akar sejenis**

   Suatu bentuk akar dikatakan akar sejenis jika indeks dan radikannya sama.

   Contoh:

   $\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{2}$, $5\sqrt[3]{2}$ mempunyai indeks 3, radikannya 2

Seperti halnya bilangan pangkat, bentuk akar pun memiliki sifat-sifat tertentu, yaitu sebagai berikut:

Untuk a, b bilangan riil dengan n bilangan asli yang sesuai berlaku:

1. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
3. $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$

Sifat-sifat bentuk akar di atas menjelaskan bahwa perkalian dua bentuk akar senama dengan indeks n, sama dengan perkalian radikan dari masing-masing bentuk akar dengan indeks n. Hal demikian berlaku juga untuk operasi pembagian bentuk akar senama. Untuk penjumlahan dan pengurangan dengan bentuk akar sejenis maka yang dijumlahkan atau dikurangkannya adalah koefisien dari masing-masing bentuk akar, lalu dikalikan dengan bentuk akar tersebut.

Contoh Soal 2.5

1. Dengan menggunakan sifat-sifat bentuk akar, sederhanakanlah bentuk akar berikut.

   a. $\sqrt{54}$ b. $\sqrt{72}$ c. $\sqrt{\dfrac{2}{25}}$ d. $\sqrt[3]{128}$

   Jawab:

   a. $\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

   b. $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

   c. $\sqrt{\dfrac{2}{25}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$

   d. $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{64 \cdot 2} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{2}$
   $= 4\sqrt[3]{2}$

2. Sederhanakanlah operasi bentuk pangkat berikut.

   a. $\sqrt{45} + 3\sqrt{20} - 5\sqrt{5}$ b. $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3} - 5\sqrt{2}\right)$

Anda Pasti Bisa

Di antara bilangan-bilangan berikut, manakah yang merupakan bentuk akar?

a. $\sqrt{0,016}$
b. $\sqrt{3,5}$
c. $\sqrt{0,25}$
d. $\sqrt{1,69}$
e. $\sqrt{0,036}$
f. $\sqrt{0,625}$

Solusi

Bentuk sederhana dari:

$2\sqrt{8} + \sqrt{18} + \frac{1}{4}\sqrt{32} + \sqrt{200}$

adalah ....

a. $14\sqrt{2}$
b. $17\sqrt{2}$
c. $18\sqrt{2}$
d. $20\sqrt{2}$
e. $21\sqrt{2}$

Jawab:

$2\sqrt{8} + \sqrt{18} + \frac{1}{4}\sqrt{32} + \sqrt{200}$

$= 2 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \frac{1}{4} \cdot 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 1\sqrt{2} + 10\sqrt{2}$

$= 18\sqrt{2}$

Jawaban: **c**

Sumber: *Ebtanas* 1998

Jawab:

a. $\sqrt{45}+3\sqrt{20}-5\sqrt{5}=3\sqrt{5}+3\left(2\sqrt{5}\right)-5\sqrt{5}$

$=3\sqrt{5}+6\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

$=(3+6-5)\sqrt{5}$

$=\mathbf{4\sqrt{5}}$

b. $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)=6\cdot 3-10\sqrt{6}+3\sqrt{6}-5\cdot 2$

$=18-7\sqrt{6}-10$

$=\mathbf{8-7\sqrt{6}}$

Latihan Soal 2.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan nilai dari bentuk akar berikut ini. Kemudian, manakah yang merupakan bilangan irasional?
   a. $\sqrt[3]{8}$
   b. $\sqrt{0,04}$
   c. $\sqrt[3]{32}$
   d. $\sqrt[5]{243}$
   e. $\sqrt{0,036}$
2. Sederhanakanlah operasi bentuk pangkat berikut.
   a. $\sqrt{150}-\sqrt{24}+2\sqrt{54}$
   b. $3\sqrt{108}+2\sqrt{75}+5\sqrt{12}$
   c. $\frac{1}{2}\sqrt{72}+2\sqrt{27}-5\sqrt{2}$
   d. $\left(\sqrt{3}-2\right)^2$
   e. $\left(2\sqrt{5}+3\right)\left(2\sqrt{5}+3\right)$
   f. $\left(5\sqrt{2}-2\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)$
   g. $\left(3\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-3\sqrt{2}\right)$
3. Diketahui $p=5+\sqrt{75}$, $q=6+\sqrt{12}$ dan $r=8-\sqrt{27}$. Tentukan bentuk paling sederhana dari $2p+q-2r$.
4. Diketahui, sebuah persegipanjang dengan panjang $\left(7\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)$ cm dan lebar $\left(2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$ cm. Berapa luas persegipanjang tersebut?
5. Jika $x=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$ dan $y=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$, tentukan nilai dari $x\cdot y$.

3. Pangkat Tak Sebenarnya

Bilangan berpangkat dengan pangkat nol, bulat negatif, dan pecahan disebut juga sebagai bilangan berpangkat tak sebenarnya. Adapun bilangan berpangkat dengan pangkat bulat positif disebut juga bilangan berpangkat sebenarnya. Untuk sebarang nilai a dengan $a \neq 0$, m bilangan bulat, n bilangan asli, dan $n \geq 2$ berlaku:

a. $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

b. $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$

Bilangan $a^{\frac{1}{n}}$ dan $a^{\frac{m}{n}}$ disebut bilangan dengan pangkat tak sebenarnya.

Contoh Soal 2.6

1. Ubahlah bilangan-bilangan berikut ke dalam bentuk bilangan dalam bentuk pangkat tak sebenarnya.

   a. $\sqrt{x}$ b. $\sqrt[3]{5}$ c. $\sqrt[4]{p^3}$ d. $\sqrt[5]{a^{10}}$

   Jawab:

   a. $\sqrt{x} = \boldsymbol{x^{\frac{1}{2}}}$

   b. $\sqrt[3]{5} = \boldsymbol{5^{\frac{1}{3}}}$

   c. $\sqrt[4]{p^3} = \boldsymbol{p^{\frac{3}{4}}}$

   d. $\sqrt[5]{a^{10}} = a^{\frac{10}{5}} = \boldsymbol{a^2}$

2. Ubahlah bilangan berikut ke dalam bentuk akar:

   a. $\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ c. $3x^{\frac{2}{5}} \cdot y^{\frac{3}{5}}$

   b. $(6p)^{\frac{3}{4}}$ d. $\left(2^4 x^3 y^2\right)^{\frac{1}{2}}$

   Jawab:

   a. $\left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

   b. $(6p)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(6p)^3} = \sqrt[4]{6^3 p^3}$
   $= \sqrt[4]{216p^3}$

   c. $3x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{3}{5}} = 3\left(x^2 y^3\right)^{\frac{1}{5}}$
   $= 3\sqrt[5]{x^2 y^3}$

   d. $\left(2^4 x^3 y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{2}} \left(x^3\right)^{\frac{1}{2}} \left(y^2\right)^{\frac{1}{2}}$
   $= 2^2 x^{\frac{3}{2}} y$
   $= 4yx^{\frac{3}{2}}$
   $= 4y \cdot x \cdot x^{\frac{1}{2}}$
   $= 4xy\sqrt{x}$

Anda Pasti Bisa

Nilai dari:

$(64)^{\frac{2}{3}}(125)^{\frac{1}{6}} \dfrac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = ...$

a. 0,16
b. 1,6
c. 6,4
d. 16
e. 64

4. Sifat-Sifat Operasi Pangkat Tak Sebenarnya

Untuk $a, b \in R$ dengan $a, b \neq 0$, serta p, q bilangan rasional maka berlaku sifat-sifat operasi pangkat tak sebenarnya sebagai berikut.

1. $a^p \times a^q = a^{p+q}$
2. $a^p : a^q = a^{p-q}$
3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
4. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}, b \neq 0$
6. $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}, a \neq 0$

Operasi pada bilangan bentuk pangkat tak sebenarnya menjelaskan bahwa pada dasarnya operasi yang berlaku sama dengan operasi pada bilangan bentuk pangkat sebenarnya. Perlu diperhatikan di sini bahwa pangkat yang dipakai adalah pangkat bilangan nol, bilangan bulat negatif, dan bilangan pecahan.

Anda Pasti Bisa

Tentukan bentuk sederhana dari $\sqrt[4]{\dfrac{25x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{5}}}}$.

Contoh Soal 2.7

Sederhanakan operasi bentuk pangkat tak sebenarnya dari:

a. $x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{4}{3}}$

b. $a^{\frac{2}{5}} : a^{\frac{3}{2}}$

c. $\left(a^4 b^6 c^7\right)^{\frac{1}{2}}$

d. $\left(2^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{7}{6}}$

Jawab:

a. $x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$

b. $a^{\frac{2}{5}} : a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{5}-\frac{3}{2}} = a^{\frac{4}{10}-\frac{15}{10}}$

$$= a^{-\frac{11}{10}}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{11}{10}}} = \frac{1}{a \cdot a^{\frac{1}{10}}}$$

$$= \frac{1}{a\sqrt[10]{a}}$$

c. $\left(a^4 b^6 c^7\right)^{\frac{1}{2}} = a^2 b^3 c^{\frac{7}{2}}$

$$= a^2 b^3 c^3 c^{\frac{1}{2}}$$

$$= a^2 b^3 c^3 \sqrt{c}$$

d. $\left(2^{\frac{3}{7}}\right)^{\frac{7}{6}} = 2^{\frac{3}{7}\times\frac{7}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Latihan Soal 2.3

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Nyatakan bilangan berikut ke dalam bentuk pangkat sebenarnya:
   a. $\sqrt[3]{ab^2}$
   b. $\sqrt{4xy^6}$
   c. $\sqrt{\sqrt{x^3}}$
   d. $\sqrt[4]{16x^8y^6}$
2. Nyatakan bilangan berikut ke dalam bentuk akar:
   a. $5^{\frac{-2}{3}}$
   b. $2p^2 - q^{\frac{1}{3}}$
   c. $\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^4\right)^{\frac{1}{4}}$
   d. $\left(x^2 - 8\right)^{\frac{-1}{2}}$
3. Tentukan hasil operasi dari:
   a. $(27)^{\frac{2}{3}} + (8)^{\frac{1}{3}} + \dfrac{10}{(25)^{\frac{-1}{2}}} - 4^{\frac{5}{2}}$
   b. $(125)^{\frac{1}{3}} - (81)^{\frac{3}{4}} + \left(\dfrac{27}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$

4. Jika $x = 25$ dan $y = 64$, tentukan nilai dari
$$\frac{x^{\frac{-3}{2}} \cdot \sqrt[3]{y^2}}{y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}}$$

5. Tentukan bentuk sederhana dari:

a. $\sqrt[5]{16\sqrt[3]{4\sqrt{4}}}$

b. $\frac{1}{5}\sqrt{5} \times \sqrt[4]{25} \times \sqrt[4]{\frac{1}{625}} \times \sqrt[4]{0,04}$

C. Merasionalkan Penyebut Bentuk Akar

Dalam suatu bentuk operasi bilangan, ada kalanya bilangan tersebut memiliki penyebut dalam bentuk akar, seperti: $\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{3}+1}, \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Bentuk-bentuk bilangan tersebut dapat disederhanakan dengan cara merasionalkan penyebut pecahan-pecahan tersebut. Kegiatan merasionalkan pada intinya mengubah bentuk akar pada penyebut menjadi bentuk bilangan rasional, yang pada akhirnya bilangan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih sederhana.

Suatu bentuk pecahan yang memuat bilangan bentuk akar dikatakan sederhana jika dipenuhi:

1. setiap bilangan bentuk akarnya sudah dalam bentuk sederhana, dan
2. tidak ada bentuk akar pada penyebut jika bilangan tersebut pecahan.

Pada bagian ini, Anda akan mempelajari mengenai cara merasionalkan berbagai bentuk pecahan agar lebih sederhana.

1. Pecahan Bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$

Bentuk akar $\frac{a}{\sqrt{b}}$ dengan $b \neq 0$ dapat dirasionalkan penyebutnya dengan cara mengalikan pecahan dengan $\sqrt{b}$ sehingga:

$$\boxed{\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\sqrt{b}}$$

Contoh Soal 2.8

Sederhanakanlah penyebut dari bentuk pecahan berikut.

a. $\frac{3}{\sqrt{6}}$ b. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ c. $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ d. $\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}$

Jawab:

a. $\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3}{6}\sqrt{6} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$

b. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3}\sqrt{15} = \frac{1}{6}\sqrt{15}$

c. Agar penyebut $\sqrt[3]{3}$ dapat dirasionalkan, maka $\sqrt[3]{3}$ dikalikan dengan $\sqrt[3]{3^2}$ sehingga didapat penyelesaian sebagai berikut:
$$\frac{2}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{2\sqrt[3]{9}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$$

d. $$\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

2. Pecahan Bentuk $\dfrac{a}{b-\sqrt{c}}$

Untuk menyederhanakan bentuk pecahan $\dfrac{a}{b+\sqrt{c}}$ atau $\dfrac{a}{b-\sqrt{c}}$ adalah dengan mengalikan pecahan dengan bentuk sekawan dari penyebut. Bentuk sekawan dari $b+\sqrt{c}$ adalah $b-\sqrt{c}$. Sebaliknya, bentuk sekawan dari $b-\sqrt{c}$ adalah $b+\sqrt{c}$ sehingga

$$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a}{b+\sqrt{c}}\times\frac{b-\sqrt{c}}{b-\sqrt{c}}=\frac{a\left(b-\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$$

$$\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a}{b-\sqrt{c}}\times\frac{b+\sqrt{c}}{b+\sqrt{c}}=\frac{a\left(b+\sqrt{c}\right)}{b^2-c}$$

Solusi

Bentuk sederhana dari $\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}$ adalah ....

a. $3\sqrt{5}$

b. $4+\sqrt{5}$

c. $3+\sqrt{5}$

d. $4-\sqrt{5}$

e. $3-\sqrt{5}$

Jawab:

$$\frac{4}{3+\sqrt{5}}=\frac{4}{3+\sqrt{5}}\times\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$$
$$=\frac{4\times\left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5}$$
$$=\frac{12-4\sqrt{5}}{4}$$
$$=\mathbf{3-\sqrt{5}}$$

Jawaban: **e**

Sumber: *UN SMK* 2006

Contoh Soal 2.9

Sederhanakan penyebut dari bentuk pecahan berikut.

a. $\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$ **b.** $\dfrac{2}{\sqrt{7}+1}$ **c.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+3}$

Jawab:

a. $$\frac{4}{3-\sqrt{5}}=\frac{4}{3-\sqrt{5}}\times\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$$
$$=\frac{4\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5}$$
$$=\frac{4\left(3+\sqrt{5}\right)}{4}$$
$$=3+\sqrt{5}$$

b. $$\frac{2}{\sqrt{7}+1}=\frac{2}{\sqrt{7}+1}\times\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-1}$$
$$=\frac{2\left(\sqrt{7}-1\right)}{7-1}$$
$$=\frac{2\left(\sqrt{7}-1\right)}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

c. $$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+3}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+3}\times\frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}-3}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{8-9}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{-1}$$
$$=3\sqrt{3}-2\sqrt{6}$$

3. Pecahan Bentuk $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$

Dan untuk menyederhanakan penyebut dari bentuk pecahan $\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ atau $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, yaitu dengan cara mengalikan pecahan dengan bentuk sekawan dari penyebutnya. Bentuk sekawan dari $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ adalah $\sqrt{b}-\sqrt{c}$. Sebaliknya, bentuk sekawan dari $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ adalah $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ sehingga

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\times\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}\times\frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)}{b-c}$$

Contoh Soal 2.10

Sederhanakanlah penyebut dari bentuk pecahan berikut.

a. $\dfrac{7}{2\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ **b.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ c. $\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{14}-\sqrt{5}}$

Jawab:

a.
$$\frac{7}{2\sqrt{5}+\sqrt{6}}=\frac{7}{2\sqrt{5}+\sqrt{6}}\times\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}$$
$$=\frac{7\left(2\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)}{20-6}$$
$$=\frac{7\left(2\sqrt{5}-\sqrt{6}\right)}{14}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}{2}$$

b.
$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2\sqrt{18}+2\cdot 3}{6-3}$$
$$=\frac{6\sqrt{2}+6}{3}$$
$$=2\sqrt{2}+2$$

c.
$$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{14}-\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{14}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{14}+\sqrt{5}}{\sqrt{14}+\sqrt{5}}$$
$$=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{5}-\sqrt{28}-\sqrt{10}}{14-5}$$
$$=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{5}-2\sqrt{7}-\sqrt{10}}{9}$$

Solusi

Dengan merasionalkan penyebut, bentuk sederhana dari $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}-\sqrt{10}}$ adalah ....

a. $-\frac{2}{5}\sqrt{15}-\frac{3}{5}\sqrt{10}$

b. $\frac{2}{5}\sqrt{15}-\frac{3}{5}\sqrt{10}$

c. $\frac{3}{5}\sqrt{10}-\frac{2}{5}\sqrt{15}$

d. $-\frac{2}{5}\sqrt{15}+\frac{3}{5}\sqrt{10}$

e. $\frac{3}{5}\sqrt{10}+\frac{2}{5}\sqrt{15}$

Jawab:

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}+\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{15}+\sqrt{10}}$$
$$=\frac{\sqrt{6}\times\left(\sqrt{15}+\sqrt{10}\right)}{15-10}$$
$$=\frac{\sqrt{90}+\sqrt{60}}{5}$$
$$=\frac{3\sqrt{10}+2\sqrt{15}}{5}$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{5}\sqrt{10}+\frac{2}{5}\sqrt{15}}$$

Jawaban: **e**

Sumber: *Ebtanas* 1998

4. Menyederhanakan Bentuk Akar $\sqrt{(a+b)-2\sqrt{a\cdot b}}$

Bentuk $\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{a\cdot b}}$ dapat diubah menjadi bentuk $\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)$ dengan syarat $a, b \in R$ dan $a > b$.
Bukti:

$$\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2 = a \pm 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + b$$
$$= (a+b) \pm 2\sqrt{ab}$$
$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b} = \sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}$$

Jadi, $\boxed{\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$

Contoh Soal 2.11

Sederhanakan bentuk akar berikut.

a. $\sqrt{12-2\sqrt{20}}$

b. $\sqrt{21+2\sqrt{80}}$

c. $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$

d. $\dfrac{5}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$

Jawab:

a. $\sqrt{12-2\sqrt{20}} = \sqrt{(10+2)-2\sqrt{10\cdot 2}}$ (cari faktor dari 20 yang jika dijumlahkan bernilai 12)
$$= \sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{10}-\sqrt{2}$$

b. $\sqrt{21+2\sqrt{80}} = \sqrt{(16+5)+2\sqrt{16\cdot 5}}$ (cari faktor dari 80 yang jika faktornya dijumlahkan bernilai 21)
$$= \sqrt{\left(\sqrt{16}+\sqrt{5}\right)^2}$$
$$= \left(\sqrt{16}+\sqrt{5}\right)$$
$$= 4+\sqrt{5}$$

c. $\sqrt{11+6\sqrt{2}} = \sqrt{11+2\cdot 3\sqrt{2}}$ (cari faktor dari 18 yang jika faktornya dijumlahkan bernilai 11)
$$= \sqrt{11+2\sqrt{18}}$$
$$= \sqrt{(9+2)+2\sqrt{9\cdot 2}}$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{9}+\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \left(\sqrt{9}+\sqrt{2}\right)$$
$$= 3+\sqrt{2}$$

d. $\dfrac{5}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (penyebutnya diubah menjadi $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$)
$$= \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{5\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3-2}$$
$$= 5\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$$

Anda Pasti Bisa

Nilai dari $\dfrac{7x-\frac{9}{2}\sqrt[6]{y^5}}{\left(x^{\frac{5}{6}}-6y^{-\frac{1}{3}}\right)x^{-2}}$

untuk $x = 4$ dan $y = 27$ adalah ....

a. $\left(1+2\sqrt{2}\right)9\sqrt{2}$

b. $\left(1+2\sqrt{2}\right)9\sqrt{3}$

c. $\left(1+2\sqrt{2}\right)18\sqrt{3}$

d. $\left(1+2\sqrt{2}\right)27\sqrt{2}$

e. $\left(1+2\sqrt{2}\right)27\sqrt{3}$

Sumber: *UAN* 2002

Latihan Soal 2.4

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Sederhanakan penyebut dari bentuk akar berikut.

   a. $\frac{5}{\sqrt{2}}$ d. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ g. $\frac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt{8}}$

   b. $\frac{6}{2\sqrt{3}}$ e. $\frac{-3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$ h. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{25}}$

   c. $\frac{-4}{\sqrt{10}}$ f. $\frac{7}{\sqrt[3]{2}}$

2. Sederhanakanlah penyebut dari bentuk akar berikut.

   a. $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ d. $\frac{3+\sqrt{3}}{2-\sqrt{2}}$

   b. $\frac{5}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$ e. $\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{7}}{\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$

   c. $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$ f. $\frac{5\sqrt{2}-4}{7\sqrt{2}+4}$

3. Sederhanakan bentuk-bentuk akar berikut.

   a. $\sqrt{15+2\sqrt{54}}$ d. $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$

   b. $\sqrt{9-2\sqrt{8}}$ e. $\frac{12}{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}$

   c. $\sqrt{20-10\sqrt{3}}$ f. $\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}$

4. Dengan merasionalkan penyebut, tentukan bentuk sederhana dari:

   a. $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

   b. $\sqrt{11-\sqrt{120}}+\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\sqrt{24}$

   c. $\left(3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

5. Jika diketahui sebuah persegipanjang *PQRS* dengan panjang $\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)$ cm dan lebar $\left(\frac{2}{5+2\sqrt{3}}\right)$ cm. Tentukan:

   a. keliling persegipanjang tersebut;

   b. luas persegipanjang tersebut.

D. Logaritma

Pada pembahasan sebelumnya, Anda telah mempelajari mengenai bilangan berpangkat, misalnya $2^4 = 16$, 2 disebut sebagai basis, 4 sebagai pangkat (eksponen), dan 16 sebagai hasil pemangkatan 2 oleh 4. Jika pertanyaannya dibalik, 2 pangkat berapa menghasilkan nilai 16, Anda akan menjawab 4. Operasi kebalikan dari menentukan nilai pemangkatan menjadi menentukan pangkatnya disebut sebagai operasi logartima, yang dapat ditulis:

$2^4 = 16 \Leftrightarrow {}^2\log 16 = 4$

Secara umum:

Jika $x = a^n$ maka ${}^a\log x = n$, dan sebaliknya jika ${}^a\log x = n$ maka $x = a^n$.

Hubungan antara bilangan berpangkat dan logaritma dapat dinyatakan sebagai berikut:

${}^a\log x = n \Leftrightarrow x = a^n$

dengan: a = bilangan pokok atau basis, $a > 0$; $a \neq 1$;

x = *numerus* (yang dicari nilai logaritmanya), $x > 0$

n = hasil logaritma.

(${}^a\log x$ dibaca"logaritma x dengan basis a")

Bentuk logaritma dapat dinyatakan dalam bentuk pangkat dan sebaliknya, bentuk pangkat dapat dinyatakan dalam bentuk logaritma.

Info Math

John Napier
(1550–1617)

Sumber: *cantiques.karaokes.free.fr*

Metode logaritma pertama kali dipublikasikan oleh matematikawan Scotlandia, yaitu John Napier pada 1614 dalam bukunya yang berjudul *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*. Metode ini memberikan kontribusi yang besar untuk kemajuan ilmu pengetahuan, salah satunya pada bidang astronomi dengan menjadikan perhitungan rumit menjadi mudah.

Sumber: *en.wikipedia.org*

Contoh Soal 2.12

1. Nyatakan logaritma berikut dalam bentuk pangkat.
   a. ${}^{3}\log 9 = 2$
   b. ${}^{5}\log \frac{1}{125} = -3$
   c. ${}^{2}\log 32 = 2p$

   Jawab:
   a. ${}^{3}\log 9 = 2 \Leftrightarrow 9 = \mathbf{3^2}$
   b. ${}^{5}\log \frac{1}{125} = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{125} = \mathbf{5^{-3}}$
   c. ${}^{2}\log 32 = 2p \Leftrightarrow 32 = \mathbf{2^{2p}}$

2. Nyatakan bentuk pangkat berikut ke dalam bentuk logaritma.
   a. $7^{-2} = \frac{1}{49}$
   b. $2^{\frac{3}{2}a} = 4$
   c. $\sqrt{3^{3p}} = 3^{\frac{3p}{2}}$

   Jawab:
   a. $7^{-2} = \frac{1}{49} \Leftrightarrow \mathbf{{}^{7}\log \frac{1}{49} = -2}$
   b. $2^{\frac{3}{2}a} = 4 \Leftrightarrow \mathbf{{}^{2}\log 4 = \frac{3}{2}a}$
   c. $\sqrt{3^{3p}} = 3^{\frac{3p}{2}} \Leftrightarrow \mathbf{{}^{3}\log \sqrt{3^{3p}} = \frac{3p}{2}}$

1. Sifat-Sifat Logaritma

a. Sifat 1

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, berlaku:

$$\boxed{{}^{a}\log a = 1,\ {}^{a}\log 1 = 0,\ \log 10 = 1}$$

Bukti:

- Setiap bilangan apabila dipangkatkan dengan 1 hasilnya adalah bilangan itu sendiri. Jadi, $a^1 = a \Leftrightarrow {}^{a}\log a = 1$
- Setiap bilangan tidak sama dengan nol apabila dipangkatkan nol hasilnya selalu satu. Jadi, $a^0 = 1 \Leftrightarrow {}^{a}\log 1 = 0$
- Log 10 adalah suatu bentuk logaritma dengan basis 10 dan numerusnya 10. Jadi, $\log 10 = 1$

b. Sifat 2

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ dan $y > 0$ serta a, x, dan $y \in R$ berlaku:

$$\boxed{{}^{a}\log x + {}^{a}\log y = {}^{a}\log xy}$$

Bukti:
${}^{a}\log x = n \Leftrightarrow a^n = x$
${}^{a}\log y = m \Leftrightarrow a^m = y$
${}^{a}\log xy = p \Leftrightarrow a^p = xy$
Dari bentuk pangkat tersebut diperoleh
$xy = a^n a^m \Leftrightarrow xy = a^{n+m}$
$a^p = a^{n+m} \Leftrightarrow p = n+m$

Solusi

Nilai dari ${}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 8 - {}^{2}\log 6$ adalah ....

a. 3 **d.** 1
b. 2 **e.** $\frac{1}{2}$
c. $\frac{3}{2}$

Jawab:
${}^{2}\log 3 + {}^{2}\log 8 - {}^{2}\log 6 =$
${}^{2}\log \frac{3 \times 8}{6} = {}^{2}\log 4 = {}^{2}\log 2^2$
$= 2\,{}^{2}\log 2 = \mathbf{2}$

Jawaban: **b**
Sumber: *UN SMK 2003*

Maka:

$n = {}^a\log x,\ m = {}^a\log y$ dan $p = {}^a\log xy$, sehingga

${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log xy$

c. Sifat 3

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ dan $y > 0$ serta a, x, dan $y \in R$, berlaku:

$$\boxed{{}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \frac{x}{y}}$$

Bukti:

${}^a\log x = n \Leftrightarrow a^n = x$

${}^a\log y = m \Leftrightarrow a^m = y$

${}^a\log \frac{x}{y} = p \Leftrightarrow a^p = \frac{x}{y}$

Dari bentuk pangkat tersebut diperoleh:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^n}{a^m} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = a^{n-m}$$
$$\Leftrightarrow a^p = a^{n-m}$$
$$\Leftrightarrow p = n - m$$

Jadi, ${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \frac{x}{y}$.

d. Sifat 4

Untuk $a > 0$, $a \neq 1$, a, n dan $x \in R$ berlaku:

$$\boxed{{}^a\log x^n = n\,{}^a\log x}$$

Bukti:

$$\begin{aligned} {}^a\log x^n &= {}^a\log\ \overbrace{(x \times x \times x \times \ \dots\ \times x)}^{n\ \textit{faktor}} \\ &= \underbrace{{}^a\log x + {}^a\log x + \dots + {}^a\log x}_{n\ \textit{faktor}} \\ &= n\,{}^a\log x \end{aligned}$$

Jadi, ${}^a\log x^n = n\,{}^a\log x$.

e. Sifat 5

Untuk a, $m > 0$, serta a, m, n, $x \in R$, berlaku:

$$\boxed{{}^{a^m}\log x^n = \frac{n}{m}\,{}^a\log x}$$

Bukti:

${}^a\log x = p \Leftrightarrow a^p = x$

${}^{a^m}\log x^n = q \Leftrightarrow a^{m \cdot q} = x^n$

Dari bentuk pangkat di atas diperoleh:

$x^n = a^{m \cdot q} \quad \Leftrightarrow \quad (a^p)^n = a^{mq}$

$\Leftrightarrow a^{np} = a^{mq} \quad \Leftrightarrow \quad np = mq$

$\Leftrightarrow\ q = \frac{n}{m}p$

Jadi, ${}^{a^m}\log x^n = \frac{n}{m}\,{}^a\log x$.

Solusi

Nilai dari ${}^2\log 48 + {}^5\log 50 - {}^2\log 3 - {}^5\log 2$ adalah ....

a. -2 **d.** 2

b. -6 **e.** 6

c. $\frac{16}{25}$

Jawab:

${}^2\log 48 + {}^5\log 50 - {}^2\log 3 - {}^5\log 2$

$\Leftrightarrow {}^2\log 48 - {}^2\log 3 + {}^5\log 50 - {}^5\log 2$

$\Leftrightarrow {}^2\log \frac{48}{3} + {}^5\log \frac{50}{2}$

$\Leftrightarrow {}^2\log 16 + {}^5\log 25$

$\Leftrightarrow \mathbf{4 + 2 = 6}$

Jawaban: **e**

Sumber: *UN SMK* 2005

Contoh Soal 2.13

1. Sederhanakan bentuk logaritma berikut.

   a. ${}^{2}\log 6 + {}^{2}\log 18 - {}^{2}\log 27$

   b. ${}^{3}\log 9 + {}^{3}\log \sqrt{3} - 2\,{}^{3}\log 27$

   c. ${}^{8}\log 32 + {}^{8}\log 16 - {}^{8}\log 128$

   Jawab:

   a.
$$
\begin{aligned}
{}^{2}\log 6 + {}^{2}\log 18 - {}^{2}\log 27 &= {}^{2}\log \frac{6 \cdot 18}{27} \\
&= {}^{2}\log 4 \\
&= {}^{2}\log 2^{2} \\
&= 2 \cdot {}^{2}\log 2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

   b.
$$
\begin{aligned}
{}^{3}\log 9 + {}^{3}\log \sqrt{3} - 2 \cdot {}^{3}\log 27 &= {}^{3}\log 3^{2} + {}^{3}\log 3^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot {}^{3}\log 3^{3} \\
&= 2\,{}^{3}\log 3 + \frac{1}{2} \cdot {}^{3}\log 3 - 2 \cdot 3\,{}^{3}\log 3 \\
&= 2 + \frac{1}{2} - 6 \\
&= \frac{1}{2} - 4 \\
&= -\frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

   c.
$$
\begin{aligned}
{}^{8}\log 32 + {}^{8}\log 16 + {}^{8}\log 128 &= {}^{8}\log \frac{32 \cdot 16}{128} \\
&= {}^{8}\log 4 \\
&= {}^{2^{3}}\log 2^{2} \\
&= \frac{2}{3} \cdot {}^{2}\log 2 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

2. Tentukan nilai x dari bentuk logaritma

$$\log x = \frac{1}{3}\log 8 + \log 9 - \frac{1}{3}\log 27$$

   Jawab:

$$
\begin{aligned}
\log x &= \frac{1}{3}\log 8 + \log 9 - \frac{1}{3}\log 27 \\
&= \log 8^{\frac{1}{3}} + \log 9 - \log 27^{\frac{1}{3}} \qquad (\textit{sifat } 4) \\
&= \log \left(2^{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \log 9 - \log \left(3^{3}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \log 2 + \log 9 - \log 3 \\
&= \log \frac{2 \cdot 9}{3} \\
&= \log 6 \\
\log x &= \log 6 \\
x &= 6
\end{aligned}
$$

Solusi

Jika log 3 = 0,4771 dan log 2 = 0,3010 maka nilai dari log 75 = ...

a. 0,7781 **d.** 1,2552

b. 0,9209 **e.** 1,8751

c. 1,0791

Jawab:

$$
\begin{aligned}
\log 75 &= \log \frac{300}{4} \\
&= \log 300 - \log 4 \\
&= \log 100 + \log 3 - 2\log 2 \\
&= 2 + 0{,}4771 - 2(0{,}3010) \\
&= 2{,}4771 - 0{,}6020 \\
&= \mathbf{1{,}8751}
\end{aligned}
$$

Jawaban: **e**

Sumber: *UN SMK* 2003

f. Sifat 6

Untuk a, $p > 0$, dan a, $p \neq 1$, serta a, p, dan $x \in R$, berlaku:

$$\boxed{{}^{a}\log x = \frac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log x} = \frac{1}{{}^{x}\log a}}$$

Bukti:

${}^{a}\log x = n \Leftrightarrow x = a^{n}$

$\log x = \log a^{n}$ (sifat 4 logaritma)

$\Leftrightarrow \log x = n \log a$

$$\Leftrightarrow n = \frac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log a}$$

$$\Leftrightarrow {}^{a}\log x = \frac{{}^{p}\log x}{{}^{p}\log a} \quad \text{(terbukti)}$$

Jika $p = x$ maka

$$\begin{aligned} {}^{a}\log x &= \frac{{}^{x}\log x}{{}^{x}\log a} \\ &= \frac{1}{{}^{x}\log a} \end{aligned}$$

g. Sifat 7

Untuk $a > 0$, $x > 0$, $y > 0$, a, x, dan $y \in R$ berlaku:

$$\boxed{{}^{a}\log x \cdot {}^{x}\log y = {}^{a}\log y}$$

Bukti:

${}^{a}\log x = p \Leftrightarrow a^{p} = x$

${}^{x}\log y = q \Leftrightarrow x^{q} = y$

Dari bentuk pangkat tersebut diperoleh

$y = x^{q} \Leftrightarrow y = (a^{p})^{q}$

$\Leftrightarrow y = a^{pq}$

$\Leftrightarrow {}^{a}\log y = {}^{a}\log a^{pq}$

$\Leftrightarrow {}^{a}\log y = pq\ {}^{a}\log a$

$\Leftrightarrow {}^{a}\log y = pq$

$\Leftrightarrow {}^{a}\log y = {}^{a}\log x \cdot {}^{x}\log y$

h. Sifat 8

Untuk $a > 0$, serta a dan $x \in R$, berlaku:

$$\boxed{a^{{}^{a}\log x} = x}$$

Bukti:

${}^{a}\log x = n \Leftrightarrow a^{n} = x$

$x = a^{n} \Leftrightarrow x = a^{{}^{a}\log x}$

Jadi, $a^{{}^{a}\log x} = x$.

i. Sifat 9

Untuk $a > 0$, serta a dan $x \in R$ berlaku:

$$\boxed{a^{n\,{}^{a}\log x} = x^{n}}$$

Bukti:

$n\,{}^{a}\log x = p \Leftrightarrow {}^{a}\log x^{n} = p$

$x^{n} = a^{p}$

$x^{n} = a^{n\,{}^{a}\log x}$

Jadi, $a^{n\,{}^{a}\log x} = x^{n}$.

Anda Pasti Bisa

Jika diketahui $\log x = a$ dan $\log y = b$, $\log \dfrac{10x^{3}}{y^{2}} = ...$

a. $\dfrac{10a^{3}}{b^{2}}$

b. $\dfrac{30a}{2b}$

c. $10\,(3a - 2b)$

d. $10 + 3a - 2b$

e. $1 + 3a - 2b$

Sumber: *UN SMK* 2004

Contoh Soal 2.14

1. Jika ${}^{2}\log 3 = a$ dan ${}^{3}\log 5 = b$, nyatakan ${}^{12}\log 30$ dalam a dan b.

Jawab:

$$
\begin{aligned}
{}^{12}\log 30 &= \frac{{}^{3}\log 30}{{}^{3}\log 12} && (\textit{sifat } 6)\\
&= \frac{{}^{3}\log (5\cdot 6)}{{}^{3}\log (4\cdot 3)}\\
&= \frac{{}^{3}\log 5 + {}^{3}\log 6}{{}^{3}\log 4 + {}^{3}\log 3} && (\textit{sifat } 2)\\
&= \frac{{}^{3}\log 5 + {}^{3}\log (2\cdot 3)}{{}^{3}\log 2^2 + 1}\\
&= \frac{{}^{3}\log 5 + {}^{3}\log 2 + {}^{3}\log 3}{2\cdot {}^{3}\log 2 + 1}\\
&= \frac{b + \frac{1}{a} + 1}{2\left(\frac{1}{a}\right) + 1}\\
&= \frac{\frac{ab + 1 + a}{a}}{\frac{2 + a}{a}}\\
&= \frac{ab + 1 + a}{2 + a}\\
&= \frac{ab + a + 1}{a + 2}
\end{aligned}
$$

2. Sederhanakanlah bentuk logaritma berikut.

   a. ${}^{2}\log 25 \times {}^{3}\log 8 \times {}^{5}\log 9$

   b. $2^{{}^{2}\log 7} - 9^{{}^{3}\log 2} + 5^{{}^{25}\log 4}$

Jawab:

a.

$$
\begin{aligned}
{}^{2}\log 25 \times {}^{3}\log 8 \times {}^{5}\log 9 &= {}^{2}\log 5^2 \times {}^{3}\log 2^3 \times {}^{5}\log 3^2\\
&= 2\,{}^{2}\log 5 \times 3\,{}^{3}\log 2 \times 2\,{}^{5}\log 3\\
&= 2\cdot 3\cdot 2\cdot {}^{2}\log 5 \times {}^{3}\log 2 \times {}^{5}\log 3\\
&= 12\cdot {}^{2}\log 5 \times {}^{5}\log 3 \times {}^{3}\log 2\\
&= 12\cdot {}^{2}\log 2\\
&= 12\cdot 1 = 12
\end{aligned}
$$

b.

$$
\begin{aligned}
2^{{}^{2}\log 7} - 9^{{}^{3}\log 2} + 5^{{}^{25}\log 4} &= 7 - \left(3^2\right)^{{}^{3}\log 2} + 5^{{}^{5^2}\log 2^2}\\
&= 7 - 2^2 + 5^{\frac{2}{2}\,{}^{5}\log 2}\\
&= 7 - 4 + 5^{{}^{5}\log 2}\\
&= 7 - 4 + 2\\
&= 5
\end{aligned}
$$

Latihan Soal 2.5

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Nyatakan bentuk pangkat berikut ke dalam bentuk logaritma.
   a. $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$
   b. $2^{2q} = \frac{1}{4}$
   c. $a^{m+n} = x$
   d. $\sqrt{3^{5p}} = q$
   e. $4^{x+1} = 8$
2. Nyatakan bentuk logaritma berikut ke dalam bentuk pangkat.
   a. ${}^{2}\log \frac{1}{32} = -5$
   b. ${}^{3}\log x = \frac{1}{2}$
   c. ${}^{5}\log(2p+1) = q$
   d. ${}^{\sqrt{2}}\log a^2 = 4$
   e. $4 \cdot {}^{3}\log r = 24$
3. Tentukan nilai x dari logaritma berikut.
   a. ${}^{2}\log (2x - 6) = 3$
   b. ${}^{3}\log x^2 = 2$
   c. ${}^{5}\log (x^2 - 2x + 22) = 2$
4. Sederhanakan bentuk logaritma berikut.
   a. ${}^{12}\log 3 + {}^{12}\log 4$
   b. ${}^{3}\log 16 + {}^{3}\log 5 - {}^{3}\log 4$
   c. ${}^{4}\log 200 - {}^{4}\log 25$
   d. ${}^{\frac{1}{3}}\log 7^{\frac{1}{2}} + {}^{\frac{1}{3}}\log \frac{5}{6} - {}^{\frac{1}{3}}\log \frac{25}{36}$
   e. ${}^{3}\log\left(\frac{1}{243}\right) + {}^{\sqrt{5}}\log 125 - {}^{81}\log 3 - {}^{16}\log \frac{1}{2}$
5. Sederhanakan bentuk logaritma berikut.
   a. ${}^{5}\log 4 \times {}^{2}\log 3 \times {}^{9}\log 5$
   b. ${}^{6}\log \frac{1}{27} \times {}^{4}\log 36 \times {}^{3}\log 8$
   c. $5^{{}^{5}\log 10} + 4^{{}^{2}\log 3} + 27^{{}^{3}\log 2}$
   d. $9^{{}^{3}\log 2} + 16^{{}^{4}\log 2} - \dfrac{5^{{}^{5}\log 3}}{3^{{}^{3}\log \frac{1}{2}}}$
6. Jika $a = {}^{5}\log 1$; $b = {}^{10}\log 0{,}01$; $c = {}^{5}\log 0{,}2$; $d = {}^{\frac{1}{2}}\log 8$.

   Tentukan nilai dari $\dfrac{a-(b+c)^2}{d}$.
7. Jika ${}^{2}\log (2x-1) = 4$; ${}^{y}\log 0{,}125 = -3$; ${}^{\sqrt{2}}\log z = 2$, tentukan nilai dari $x \cdot y \cdot z$.
8. Jika $\log 2 = x$ dan $\log 3 = y$, tentukan nilai dari ${}^{5}\log 24$.
9. Jika ${}^{5}\log 3 = a$ dan ${}^{3}\log 4 = b$, tentukan nilai dari ${}^{12}\log 75$.
10. Jika ${}^{2}\log 3 = a$, tentukan nilai dari nilai dari
    $${}^{3}\log 4 + {}^{\sqrt{27}}\log \sqrt{2} + \frac{1}{{}^{3}\log \frac{1}{4}}.$$

2. Menentukan Logaritma Berbasis 10 dari Suatu Bilangan dengan Menggunakan Tabel Logaritma

Dalam perhitungan matematika, untuk logaritma biasanya digunakan basis 10. Pada logaritma dengan basis 10, bilangan pokok 10 biasanya tidak ditulis. Selanjutnya, Anda akan mempelajari tabel logaritma (Tabel 2.1) seperti berikut.

Catatan

Selain menggunakan tabel, perhitungan logaritma suatu bilangan dapat juga dilakukan dengan menggunakan kalkulator. Kalkulator yang dapat digunakan untuk menghitung logaritma adalah kalkulator ilmiah.

Tabel 2.1 Tabel Logaritma

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		0000	3010	4771	6021	6990	7782	8451	9031	9542
1	0000	0414	0792	1139	1461	1761	2041	2304	2553	2788
2	3010	3222	3424	3617	3802	3979	4150	4314	4472	4624
3	4771	4914	5051	5158	5315	5441	5563	5682	5798	5911
4	6021	6128	6232	6335	6435	6532	6628	6721	6812	6902
5	6990	7076	7160	7243	7324	7404	7482	7559	7634	7709
6	7782	7853	7924	7993	8062	8129	8195	8261	8325	8388
7	8451	8513	8573	8533	8692	8751	8808	8865	8921	8976
8	9031	9085	9138	9191	9243	9294	9345	9395	9445	9494
9	9542	9590	9638	9638	9731	9777	9823	9868	9912	9956
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2101	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2404	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2993	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3304
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3978	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4165	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4785	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900

Sebelum menentukan nilai logaritma dengan menggunakan tabel ini, Anda perlu memahami terlebih dahulu hal-hal yang berhubungan dengan tabel logaritma tersebut.

Logaritma suatu bilangan nilainya terdiri atas dua bagian, yaitu karakteristik (bilangan yang terletak di depan koma desimal) dan mantisa (bilangan yang terletak di belakang koma).

Contoh:

$$\log 4{,}65 = \underbrace{0}_{\text{karakteristik}},\underbrace{667}_{\text{mantisa}}$$

Dalam tabel logaritma terdapat kolom-kolom, kolom pertama (disebut kolom N). Dari atas ke bawah memuat bilangan-bilangan yang berurutan mulai dari 0 sampai dengan 1000. Baris judul pada kolom kedua sampai dengan kolom kesebelas dari kiri ke kanan berturut-turut diisi dengan angka 0,1,...,9. Pada kolom-kolom tersebut dari atas ke bawah memuat mantisa, yang terdiri atas 4 angka (digit).

Besar karakteristik dari logaritma dapat ditentukan berdasarkan nilai numerusnya.

${}^a\log x = n$

a. Jika $1 < x < 10$ karakteristiknya 0

b. Jika $10 < x < 100$ karakteristiknya 1

c. Jika $100 < x < 1000$ karakteristiknya 2

Berikut akan diberikan langkah-langkah mencari logaritma suatu bilangan dengan tabel logaritma, seperti pada Contoh Soal 2.15.

Contoh Soal 2.15

Dengan menggunakan tabel logaritma, tentukan:

a. log 2,6;
b. log 2,65;
c. log 26,5;
d. log 265.

Jawab:

a. log 2,6 = 0,...

Bagian desimalnya (mantisa) diperoleh dari pertemuan antara baris yang memuat angka 2 dan kolom yang memuat angka 6, yaitu 4150. Jadi, log 2,6 = 0, 4150.

b. log 2,65 = 0,...

Bagian desimalnya (mantisa) diperoleh dari pertemuan antara baris yang memuat angka 26 dan kolom yang memuat angka 5, yaitu 4232. Jadi, log 2,65 = 0, 4232.

c. log 26,5 = 1,...

Langkah yang dilakukan sama seperti pada bagian (**b**) tersebut. Jadi log 26,5 = 1,4232.

d. log 265 = 2,...

Langkah yang dilakukan sama seperti pada bagian (**b**) dan (**c**) tersebut. Jadi log 265 = 2,4232.

Catatan

Tabel logaritma yang lebih lengkap dapat Anda lihat di akhir halaman buku ini.

Tugas 2.1

Dengan menggunakan tabel logaritma dari sifat-sifat logaritma, hitunglah:

1. $\log \sqrt[3]{7}$

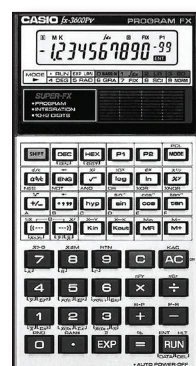
2. $\log \sqrt{15}$

3. $\log \dfrac{1}{27}$

Kemudian, diskusikan hasilnya dengan temanmu.

DigiMath

Perhitungan pada Contoh Soal 2.15 (a) dapat juga dilakukan dengan bantuan kalkulator. Kalkulator yang digunakan di sini adalah kalkulator jenis *FX-3600 PV* seperti pada gambar berikut.



Sumber: *world.casio.com*

Cara untuk menentukan log 2,6 adalah sebagai berikut. Tekanlah tombol-tombol

$\boxed{2}$ $\boxed{\bullet}$ $\boxed{6}$ $\boxed{\log}$

sehingga hasil yang diperoleh adalah 0,414973348 ≈ **0,4150.**

Jika numerus dari logaritma $0 < x < 1$ maka sebelum dilogaritmakan, nyatakan bilangan itu dalam bentuk baku $a \times 10^{-n}$ dengan $1 \le a \le 10$, n bilangan bulat positif.

Tugas 2.2

Dengan menggunakan kalkulator, hitunglah nilai-nilai logaritma pada **Contoh Soal 2.15** dan **Contoh Soal 2.16**. Kemudian bandingkanlah apakah hasilnya sama?

Contoh Soal 2.16

Dengan menggunakan tabel logaritma, tentukan:

a. log 0,471;
b. log 0,087;
c. log 0,00984.

Jawab:

a. $\log 0{,}471 = \log 4{,}71 \times 10^{-1}$
$= \log 4{,}71 + \log 10^{-1}$
$= \log 4{,}71 - 1$
$= 0{,}673 - 1$
$= -0{,}327$

b. $\log 0{,}087 = \log 8{,}7 \times 10^{-2}$
$= \log 8{,}7 + \log 10^{-2}$
$= \log 8{,}7 - 2$
$= 0{,}939 - 2$
$= -1{,}061$

c. $\log 0{,}00984 = \log 9{,}84 \times 10^{-3}$
$= \log 9{,}84 + \log 10^{-3}$
$= \log 9{,}84 - 3$
$= 0{,}993 - 3$
$= -2{,}007$

Daftar logaritma juga merupakan daftar antilogaritma. Artinya, jika diketahui log a = 0,4955, berapakah nilai a? Untuk lebih memahaminya, pelajarilah contoh-contoh berikut.

Contoh Soal 2.17

Tentukan nilai x dengan menggunakan anti logaritma berikut:

a. $\log x = 0{,}2304$
b. $\log x = 1{,}2304$
c. $\log x = -0{,}752$
d. $\log x = -1{,}752$

Jawab:

a. $\log x = 0{,}2304$
Mantisa dari 0,2304 adalah 2304, bilangan 2304 dapat Anda temukan pada pertemuan antara baris yang memuat angka 17 dan kolom yang memuat angka 0. Oleh karena karakteristiknya 0 maka numerusnya adalah satuan. Jadi, $\log x = 0{,}2304$ maka $x = 1{,}7$.

b. $\log x = 1{,}2304$
Langkah -langkah yang dilakukan sama seperti pada contoh soal (a), yang membedakan adalah nilai dari karakteristiknya yang memuat angka 1 maka numerusnya adalah puluhan. Jadi, $\log x = 1{,}2304$ maka $x = 17$.

DigiMath

Untuk menghitung antilpgaritma dari **Contoh Soal 2.17** (**a**) dengan bantuan kalkulator, terutama untuk kalkulator *scientific FX*-3600 *PV*, dapat dilakukan dengan menekan tombol-tombol sebagai berikut.

0	•	2	3
0	4	Shift	log

Sehingga hasil yang diperoleh adalah 1,73957308 ≈ **1,714**

c. $\log x = -0{,}752$
$= 0{,}248 - 1$
$= \log 1{,}77 - \log 10$

$= \log \dfrac{1{,}77}{10} = \log 0{,}177$

$x = 0{,}177$

d. $\log x = -1{,}752$
$= 0{,}248 - 2$
$= \log 1{,}77 - \log 100$

$= \log \dfrac{1{,}77}{100}$

$x = 0{,}0177$

Latihan Soal 2.6

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Dengan menggunakan tabel logaritma, tentukan:
   a. log 7,56
   b. log 80,5
   c. log 756,1
   d. log 0,591
   e. log 0,0642
   f. log 0,00021

2. Dengan menggunakan tabel anti logaritma, tentukan nilai x dari:
   a. $\log x = 0{,}843$
   b. $\log x = 0{,}794$
   c. $\log x = 1{,}72$
   d. $\log x = 3{,}463$
   e. $\log x = -0{,}257$
   f. $\log x = -2{,}477$

Rangkuman

1. Bilangan berpangkat a^n (dibaca: "a pangkat n") adalah hasil kali n buah faktor yang masing-masing faktornya adalah a.
2. Bilangan berpangkat bulat positif secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk:
   $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n faktor}$

   dengan: a = bilangan pokok
   n = pangkat atau eksponen
3. Sifat-sifat bilangan pangkat
   Untuk $a \in R$ dan m, n bilangan bulat positif berlaku:
   a. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
   b. $a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
   c. $(a^m)^n = a^{m \times n}$
   d. $(ab)^n = a^n b^n$
   e. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

   Untuk $a \in R$ dan $a \neq 0$ berlaku $a^0 = 1$
   Untuk $a \in R$ dan $a \neq 0$ berlaku $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
4. Bilangan irasional adalah bilangan yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\dfrac{a}{b}$.
   untuk $a, b \in$ B, $b \neq 0$
5. Bilangan bentuk akar ditulis dalam bentuk $\sqrt[n]{a}$
   dengan: a = radikan;
   n = indeks (pangkat akar);
   $\sqrt{\ }$ = lambang bentuk akar.
6. Sifat-sifat bilangan bentuk akar
   Untuk a, b bilangan bulat maka berlaku
   a. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
   b. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
   c. $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$
7. Hubungan antara bentuk akar dengan pangkat tak sebenarnya, yaitu:
   Untuk sebarang a dengan $a \neq 0$ berlaku:
   a. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
   b. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
8. Logaritma didefinisikan sebagai kebalikan dari bentuk pangkat sehingga berlaku
   ${}^a\log x = n \Leftrightarrow x = a^n$
9. Sifat-sifat logaritma
   Untuk $a, x,$ dan y bilangan riil positif dan $a \neq 1$ maka berlaku:
   a. ${}^a\log a = 1$
   b. ${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log xy$
   c. ${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \dfrac{x}{y}$
   d. ${}^a\log x^n = n\,{}^a\log x$
   e. ${}^{a^m}\log x^n = \dfrac{n}{m}\,{}^a\log x$
   f. ${}^a\log x = \dfrac{{}^p\log x}{{}^p\log a} = \dfrac{1}{{}^x\log a}$
   g. ${}^a\log x\,{}^x\log y = {}^a\log y$
   h. $a^{{}^a\log x} = x$
   i. $a^{n\,{}^a\log x} = x^n$

Alur **Pembahasan**

Perhatikan alur pembahasan berikut:

Materi tentang Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma dapat digambarkan sebagai berikut.

Kata **Mutiara**

Alexander Graham Bell

Ketika satu pintu tertutup, pintu lain terbuka, namun terkadang kita melihat dan menyesali pintu tertutup tersebut terlalu lama hingga kita tidak melihat pintu lain yang telah terbuka.

Latihan Soal Bab 2

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Bentuk akar dari $a \times a \times a \times a$ adalah ....
a. $a + 4$ d. $4 \times a$
b. 4^a e. $6a^7$
c. a^4

Alasan: ____________________

2. Bentuk sederhana dari $3a^2 \times 2a^4$ adalah ....
a. $5a^6$ d. $5a^8$
b. $6a^8$ e. $6a^7$
c. $6a^6$

Alasan: ____________________

3. Bentuk sederhana dari $(p^2)^5 \times (p^2)^3$ adalah ....
a. p^{12} d. p^{35}
b. p^{16} e. p^{60}
c. p^{15}

Alasan: ____________________

4. Bentuk sederhana dari $\dfrac{a^4a^{-2}}{a^{-3}}$ adalah ....
a. a^6 d. a^{-5}
b. a^5 e. a^{-11}
c. a^{-1}

Alasan: ____________________

5. Bentuk $\sqrt[3]{125a^3}$ sama dengan ....
a. $25a^3$ d. $5a^9$
b. $25a$ e. $5a^3$
c. $5a$

Alasan: ____________________

6. Bentuk sederhana dari $\dfrac{5}{4-\sqrt{3}}$ adalah ....
a. $\dfrac{5}{13}\left(4+\sqrt{3}\right)$ d. $\dfrac{5}{7}\left(4-\sqrt{3}\right)$
b. $\dfrac{5}{13}\left(4-\sqrt{3}\right)$ e. $\dfrac{5}{4-\sqrt{3}}$
c. $\dfrac{5}{7}\left(4+\sqrt{3}\right)$

Alasan: ____________________

7. Bentuk sederhana dari $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{8}}$ adalah ....
a. $2\left(\sqrt{30}+\sqrt{40}\right)$ d. $\sqrt{30}-\sqrt{40}$
b. $-\left(\sqrt{30}+\sqrt{40}\right)$ e. $-\sqrt{30}+\sqrt{40}$
c. $\sqrt{30}+\sqrt{40}$

Alasan: ____________________

8. Bentuk notasi ilmiah dari 83.256 adalah ....
a. $8{,}3256 \times 10^2$ d. $83{,}256 \times 10^2$
b. $8{,}3256 \times 10^4$ e. $8{,}3256 \times 10^3$
c. $8{,}3256 \times 10^5$

Alasan: ____________________

9. Nilai dari ${}^3\log 729$ adalah ....
a. 5 d. 8
b. 6 e. 9
c. 7

Alasan: ____________________

10. Jika ${}^2\log 12 = 3{,}6$ dan ${}^2\log 3 = 1{,}6$ maka nilai dari ${}^2\log 36$ adalah ....
a. 4,2 d. 5,6
b. 4,6 e. 6,2
c. 5,2

Alasan: ____________________

11. ${}^2\log 16 + {}^2\log 4 - {}^2\log 2 =$ ....
a. 3 d. 6
b. 4 e. 7
c. 5

Alasan: ____________________

12. ${}^2\log 16 + {}^2\log \dfrac{1}{3} =$ ....
a. 1 d. 4
b. 2 e. 5
c. 3

Alasan: ____________________

13. Jika, log 2 = 0,3010; log 3 = 0,4771; dan log 5 = 0,6990 maka nilai dari $\log \sqrt{30}$ adalah ....
a. 1,4771 d. 0,73855
d. 1,08805 e. 0,21365
c. 0,7855

Alasan: ____________________

14. Jika log 2 = 0,3010; log 3 = 0,4771; dan log 7 = 0,8451 maka nilai dari $\log \sqrt[3]{12}$ adalah ....
a. 1,0791 d. 0,3597
b. 1,2791 e. 3,2373
c. 0,3797

Alasan: ____________________

15. Diketahui ${}^{9}\log 5 = n$ maka ${}^{3}\log 125$ dapat dinyatakan dengan ....

a. 5^n
b. n^6
c. 6^n
d. $\frac{n}{5}$
e. $\frac{n}{6}$

Alasan: ____________________

16. Bentuk sederhana dari bentuk akar $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$ adalah ....

a. $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$
b. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$
c. $\left(1+\sqrt{7}\right)$
d. $\left(\sqrt{7}-1\right)$
e. $\left(1-\sqrt{7}\right)$

Alasan: ____________________

17. Jika ${}^{x}\log 6 = p$ dan ${}^{x}\log 8 = q$ maka $3p - q$ adalah ....

a. ${}^{x}\log 1$
b. ${}^{x}\log 3$
c. $3\ {}^{x}\log 3$
d. ${}^{x}\log 10$
e. ${}^{x}\log 30$

Alasan: ____________________

18. Jika ${}^{a}\log b = x$ dan ${}^{b}\log d = y$ maka ${}^{d}\log a$ dinyatakan dalam x dan y adalah ....

a. $x + y$
b. $x - y$
c. $x - y$
d. $\frac{x}{y}$
e. $\frac{x}{y}$

Alasan: ____________________

19. Jika log 3 = 0,4771 dan log 2 = 0,3010 maka nilai dari log 75 = ...

a. 0,7781
b. 0,9209
c. 1,0791
d. 1,2552
e. 1,8751

Alasan: ____________________

20. Jika $\log (2x + 10) = 2$, nilai x adalah ....

a. 2
b. 7
c. 9
d. 45
e. 90

Alasan: ____________________

B. Jawablah soal-soal berikut.

1. Sederhanakan bentuk-bentuk berikut.

a. $3e^7p^6 \times 5e^2p^4$

b. $\dfrac{a^7b^9}{6b^3a^{10}}$

c. $\dfrac{25x^{-2}y^3}{5x^{-7}y^2}$

2. Rasionalkan penyebut pecahan berikut, kemudian sederhanakan.

a. $\dfrac{5}{6+\sqrt{5}}$

b. $\dfrac{7}{5+3\sqrt{2}}$

c. $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{8}}$

d. $\dfrac{3\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$

3. Sederhanakan soal-soal berikut.

a. ${}^{2}\log 4 + {}^{2}\log 32$
b. $\log 2 + \log 50$
c. ${}^{2}\log 160 - {}^{2}\log 20$
d. ${}^{3}\log 81 + {}^{3}\log 9$
e. ${}^{6}\log 96 - {}^{6}\log 16$

4. Jika, ${}^{4}\log 3 = x$; ${}^{4}\log 5 = y$; dan ${}^{4}\log 8 = z$, hitunglah:

a. ${}^{4}\log 15 + {}^{4}\log 8$
b. ${}^{4}\log 2 + {}^{4}\log 20$
c. ${}^{4}\log 40 - {}^{4}\log 15$

5. Eli menabung di bank sebesar Rp 3.500.000,00 yang memberikan bunga 7% per tahun. Hitunglah jumlah uang Eli setelah ditabungkan selama 6 bulan.

Latihan Ulangan Semester 1

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Anggota dari himpunan $A = \{x \mid -4 \le x < 6, x \in C\}$ adalah ....
   a. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   b. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   c. $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   d. $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   e. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   Alasan: ____________________

2. Bilangan-bilangan berikut adalah bilangan rasional, *kecuali*....
   a. $\frac{5}{9}$ d. 3,142857142....
   b. $\frac{1}{3}$ e. 0,345345....
   c. 0,595959....

   Alasan: ____________________

3. Hasil dari $3\frac{2}{5} - 1\frac{4}{6} + \frac{5}{6}$ = ...
   a. $2\frac{16}{30}$ d. $2\frac{5}{6}$
   b. $2\frac{17}{30}$ e. $2\frac{1}{50}$
   c. $2\frac{27}{30}$

   Alasan: ____________________

4. Nilai dari $\left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} : \frac{7}{5}\right)$ = ...
   a. $\frac{48}{63}$ d. $\frac{51}{63}$
   b. $\frac{49}{63}$ e. $\frac{52}{63}$
   c. $\frac{50}{63}$

   Alasan: ____________________

5. Pak Budi mempunyai $1\frac{2}{5}$ ha tanah. Kemudian $\frac{1}{3}$ dari luas tanah keseluruhan tersebut dijual kepada Pak Anto. Luas tanah yang dijual oleh Pak Budi adalah ... ha.
   a. $4\frac{1}{5}$ d. $\frac{8}{15}$
   b. $4\frac{2}{5}$ e. $\frac{11}{15}$
   c. $\frac{7}{15}$

   Alasan: ____________________

6. Jika harga 1 kg minyak kelapa Rp9.500,00 maka harga $2\frac{3}{4}$ kg minyak kelapa tersebut adalah ....
   a. Rp25.225,00 d. Rp26.125,00
   b. Rp25.525,00 e. Rp27.225,00
   c. Rp25.875,00

   Alasan: ____________________

7. Tabungan unit produksi SMK terdiri atas tabungan kria logam $\frac{2}{5}$ bagian, tabungan kria kayu $\frac{1}{3}$ bagian, tabungan kria tekstil $\frac{1}{6}$ bagian, dan sisanya tabungan kria kulit. Besar tabungan kria kulit adalah ....
   a. $\frac{1}{10}$ bagian d. $\frac{5}{7}$ bagian
   b. $\frac{2}{7}$ bagian e. $\frac{9}{10}$ bagian
   c. $\frac{3}{10}$ bagian

   Alasan: ____________________

8. Dalam satu kelas, siswa yang berkacamata ada 2%. Jika jumlah seluruh siswa ada 40 orang, maka banyaknya siswa yang tidak berkacamata adalah ....
   a. 8 orang d. 36 orang
   b. 16 orang e. 38 orang
   c. 32 orang

   Alasan: ____________________

9. Bentuk notasi ilmiah dari 108.000 adalah ....
   a. $10{,}8 \times 10^4$ d. $1{,}08 \times 10^3$
   b. $1{,}08 \times 10^5$ e. 108×10^4
   c. $10{,}8 \times 10^2$

   Alasan: ____________________

10. Bentuk sederhana dari $4a^2\, b^4 \times 2a^3\, b^6$ adalah ...
    a. $6a^5\, 6^{10}$ d. $8a^5\, b^{24}$
    b. $6a\, 6b^{24}$ e. $8a^6\, b24$
    c. $8a^5\, b^{10}$

    Alasan: ____________________

11. Bentuk sederhana dari $\frac{a^3 b^2 \times a^5 b^{-4}}{a^7 b^{-3}}$ adalah ....
    a. ab d. $a^{15}\, b^{-5}$
    b. ab^{-5} e. $a^{15}\, b^{-6}$
    c. $a^8\, b^{-6}$

    Alasan: ____________________

12. Bentuk sederhana dari $\dfrac{p^{\frac{1}{2}} \times p^{-\frac{1}{3}}}{p^{-\frac{1}{6}}}$ adalah ....

a. $\dfrac{1}{6}$
d. $\dfrac{4}{3}$
b. $\dfrac{1}{3}$
e. $\dfrac{5}{3}$
c. $\dfrac{2}{3}$

Alasan: ____________________

13. $\sqrt{625p^8}$ dapat ditulis sebagai ....

a. $5\ b^2$
d. $25\ b^4$
b. $5\ b^4$
e. $25\ b^3$
c. $25\ b^2$

Alasan: ____________________

14. Bentuk sederhana dari $\dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ adalah ....

a. $\dfrac{3\sqrt{35}+3\sqrt{5}}{12}$
d. $\dfrac{3\sqrt{35}+15}{2}$
b. $\dfrac{3\sqrt{35}+3\sqrt{5}}{2}$
e. $\dfrac{3\sqrt{35}+8}{2}$
c. $\dfrac{3\sqrt{35}+15}{12}$

Alasan: ____________________

15. Bentuk sederhana dari $\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$ adalah ....

a. $8+3\sqrt{7}$
d. $1+3\sqrt{7}$
b. $8-3\sqrt{7}$
e. $2-3\sqrt{7}$
c. $1-3\sqrt{7}$

Alasan: ____________________

16. Bentuk sederhana dari $\sqrt{20-10\sqrt{3}}$ adalah ....

a. $2+\sqrt{5}$
d. $3\sqrt{5}+\sqrt{5}$
b. $\sqrt{15}+\sqrt{5}$
e. $\sqrt{3}+\sqrt{5}$
c. $\sqrt{4}+\sqrt{5}$

Alasan: ____________________

17. Nilai x jika ${}^{x}\log 125 = 3$ adalah ....

a. 3
d. 6
b. 4
e. 7
c. 5

Alasan: ____________________

18. Jika ${}^{b}\log 4 = 3$ dan ${}^{b}\log 5 = 7$ maka nilai dari ${}^{b}\log 80$ adalah ....

a. 11
d. 14
b. 12
e. 15
c. 13

Alasan: ____________________

19. Nilai dari ${}^{3}\log (18 \times 9)$ adalah ....

a. 4
d. 7
b. 5
e. 8
c. 6

Alasan: ____________________

20. Jika ${}^{4}\log 3 = p$; ${}^{4}\log 5 = q$; dan ${}^{4}\log 8 = r$ maka nilai dari ${}^{4}\log 15 + {}^{4}\log 8$ adalah ....

a. $p + q + r$
d. $p + 2q + r$
b. $2p + q + r$
e. $pq + r$
c. $\dfrac{2p+q}{r}$

Alasan: ____________________

21. Jika log 2 = 0,3010; log 3 = 0,4771; dan log 7 = 0,8451 maka nilai dari log $\sqrt[3]{21}$ adalah ....

a. 0,4207
d. 1,4407
b. 0,4407
e. 1,4427
c. 0,4427

Alasan: ____________________

22. Nilai x dari $\dfrac{1}{2}$ log $(x + 2)$ + log 5 = 1 adalah ....

a. 1
d. 4
b. 2
e. 5
c. 3

Alasan: ____________________

23. ${}^{a}\log\left(\dfrac{1}{b}\right) \cdot {}^{b}\log\left(\dfrac{1}{c}\right) \cdot {}^{c}\log\left(\dfrac{1}{a}\right) = ...$

a. $1 - abc$
d. -1
b. $1 + abc$
e. 2
c. 1

Alasan: ____________________

24. Nilai dari log 33.000 adalah ....

a. 1,518
d. 4,5158
b. 2,5158
e. 1,56
c. 3,5158

Alasan: ____________________

25. Nilai dari ${}^{15}\log 30$ adalah ....

a. 0,256
d. 12,56
b. 0,1256
e. 1,56
c. 1,256

Alasan: ____________________

B. Jawablah soal-soal berikut.

1. Tentukan hasil dari:

a. $\left(1\frac{1}{7}\times 2\frac{1}{3}\right)+2\frac{1}{5}$

b. $3\frac{2}{7}-1\frac{5}{6}+\frac{7}{6}$

2. Seorang ayah mewariskan 18 ekor sapi kepada 3 orang anaknya dengan aturan sebagai berikut: putra yang sulung mendapat $\frac{1}{2}$ dari jumlah sapi; putra kedua mendapat $\frac{1}{3}$ dari jumlah sapi; putra ke tiga mendapatkan sisanya. Tanpa memotong seekor sapi pun, berapa ekor masing-masing anak mendapatkan bagiannya?

3. Sederhanakan bentuk pangkat berikut.

a. $\sqrt[4]{625f^4g^8h^{12}}$

b. $\frac{a^7b^9}{6b^3a^{10}}$

4. Jika log 2 = 0,301 dan log 5 = 0,699, tentukan:

a. $\sqrt[3]{27}$

b. $\sqrt[3]{40}$

5. Dwi menabung di sebuah bank dengan bunga 8% per hari. Jika tabungan awal adalah Rp1.000.000,00, harus berapa lama Dwi menabung agar jumlah tabungannya tiga kali lipatnya?

Sumber: *mycityblogging.com*

Bab III

Persamaan dan Pertidaksamaan

Konsep persamaan dan pertidaksamaan telah Anda pelajari sebelumnya di Kelas VII dan Kelas VIII. Konsep persamaan dan pertidaksamaan sangat berguna jika diterapkan dalam kehidupan sehari-hari seperti contoh berikut ini.

Bu Dian membeli 1 karung beras beratnya 25 kg yang harganya sama dengan 3 kali dari harga 10 kg cabe, sedangkan harga 1 kuintal beras dan 60 kg cabe adalah Rp900.000,00. Jika Bu Dian membeli 50 kg beras dan 5 kg cabe, berapa uang yang harus dibayar oleh Bu Dian? Dengan mempelajari bab ini dengan baik, Anda akan dapat menyelesaikan masalah tersebut.

Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Sederhanakanlah bentuk aljabar berikut.

a. $3(a+5) - 10$

b. $2p(3+5) - p$

c. $2(x+1) + 3(x+2)$

2. Tentukan nilai x dari persamaan-persamaan berikut.

a. $4x + 16 = 0$

b. $5x + 12 = -13$

c. $4(x+2) + 10 = 22$

A. Persamaan Linear

Persamaan linear adalah suatu persamaan dengan satu variabel (peubah) yang mempunyai pangkat bulat positif dan pangkat tertinggi variabelnya satu.

Bentuk umum persamaan linear adalah

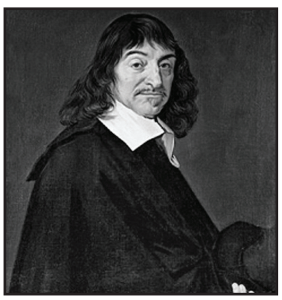
$$\boxed{ax + b = 0}$$

dengan $a, b \in R$ dan $a \neq 0$, x disebut variabel; a, b disebut konstanta.

Dalam menyelesaikan persamaan linear dapat dilakukan dengan memisahkan variabel dengan variabel dan konstanta dengan konstanta pada ruas yang berbeda.

Info Math

Rene Descartes (1596 – 1650)



Sumber: *centros5.pntic.mec.es*

Pada 1637, Rene Descartes menjelaskan bagaimana susunan-susunan geometris dapat diubah ke dalam persamaan-persamaan aljabar. Dalam bukunya "*Discours de la Methode*" (*Discourse on Method*), ia memperkenalkan huruf *x*, *y*, dan *z* untuk mewakili variabel-variabel, sama halnya dengan simbol-simbol + dan – untuk penambahan dan pengurangan.

Sumber: *Ensiklopedi Matematika & Peradaban Manusia*, 2002

Contoh Soal 3.1

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut ini

a. $5x - 2 = 3x + 10, \quad x \in Q$

b. $\dfrac{7x+2}{3} = 4x - 1, \quad x \in R$

c. $5x + 2(x-4) = 4(x-2) - 7(x+4), x \in R$

Jawab:

a.
$$\begin{aligned} 5x - 2 &= 3x + 10 \\ 5x - 3x &= 10 + 2 \\ 2x &= 12 \\ x &= \frac{12}{2} \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {**6**}.

b.
$$\begin{aligned} \frac{7x+2}{3} &= 4x - 1 \\ 7x + 2 &= 3(4x-1) \\ 7x + 2 &= 12x - 3 \\ 7x - 12x &= -3 - 2 \\ -5x &= -5 \\ x &= \frac{-5}{-5} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {**1**}.

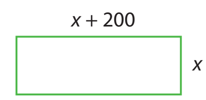
c. $5x + 2(x - 4) = 4(x - 2) - 7(x + 4)$
$$\begin{aligned}
5x + 2x - 8 &= 4x - 8 - 7x - 28\\
7x - 8 &= -3x - 36\\
7x + 3x &= 8 - 36\\
10x &= -28\\
x &= \frac{-28}{10} = -2\frac{8}{10} = -2\frac{4}{5}
\end{aligned}$$
Jadi, himpunan penyelesaiannya $\{-2\frac{4}{5}\}$.

2. Harga sebuah tas adalah delapan kali harga tempat pensil. Harga 2 buah tas dan sebuah tempat pensil adalah Rp285.000,00. Berapakah harga sebuah tas dan harga sebuah tempat pensil?

Jawab:
Misalkan, harga sebuah tempat pensil adalah x rupiah; harga sebuah tas adalah $8x$ rupiah
sehingga 2 buah tas + 3 buah tempat pensil = Rp285.000,00
$$\begin{aligned}
2(8x) + 3x &= 285.000\\
16x + 3x &= 285.000\\
19x &= 285.000\\
x &= \frac{\mathbf{285.000}}{\mathbf{19}} = 15.000
\end{aligned}$$
Jadi, harga sebuah tempat pensil adalah Rp15.000,00 dan harga sebuah tas adalah 8 × Rp15.000,00 = Rp 120.000,00.

Anda Pasti Bisa

Suatu persegipanjang mempunyai lebar x meter dan panjangnya $(x + 200)$ meter. Jika keliling persegipanjang 960 meter, tentukan lebarnya?



Sumber: *New Course Mathematics Year 9 Advanced*, 1996

Latihan Soal 3.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan himpunan penyelesaian setiap persamaan di bawah ini, $x \in B$.
   a. $-8 - 5x = 17$
   b. $3x + 6 = 4x - 1$
   c. $\frac{2}{5}x + 6 = 4x - 1$
   d. $3(2x + 3) = 5(7x - 4)$
   e. $4x - 5(x - 3) = 4(x - 5) - 7(x + 1)$
   f. $2(x + 4) + 3(2x - 4) = 4(3x - 1)$
2. Tentukan himpunan penyelesaian setiap persamaan di bawah ini, $x \in R$.
   a. $2x - \frac{1}{3} = 4x + \frac{5}{6}$
   b. $\frac{3x-4}{5} = \frac{5x-2}{3} + \frac{3x+4}{2}$
   c. $\frac{1}{2}(3x-1) - \frac{3}{4}(2x-4) = \frac{2}{5}(x-10)$
   d. $4(2x - 3) + 5 - 4(x + 2) = 7(x - 2)$
3. Harga 1 kg apel sama dengan 2 kg jeruk, sedangkan harga 3 kg apel dan 1 kg jeruk adalah Rp91.000,00. Jika Dewi membeli 2 kg apel dan 5 kg jeruk. Berapakah harga yang harus Dewi bayar?
4. Harga untuk sebuah kompor gas adalah 6 kali harga kompor minyak tanah. Jika harga 3 kompor gas dan 2 kompor minyak tanah Rp1.680.000,00. Berapakah harga sebuah kompor gas dan harga sebuah kompor minyak tanah?

B. Persamaan Kuadrat

1. Bentuk Umum Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat didefinisikan sebagai kalimat terbuka yang menyatakan hubungan sama dengan (=) dan pangkat tertinggi dari variabelnya dua. Persamaan kuadrat memiliki bentuk umum:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

dengan a, b, dan $c \in R$ dan $a \neq 0$.

Contoh Soal 3.2

Tentukan setiap koefisien variabel x^2, koefisien variabel x dan konstanta dari persamaan kuadrat berikut:

a. $3x^2 - 2x + 4 = 0$

b. $-x^2 + 5x - 7 = 0$

Jawab:

a. $3x^2 - 2x + 4 = 0$
koefisien $x^2 = 3$
koefisien $x = -2$
konstanta $= 4$

b. $-x^2 + 5x - 7 = 0$
koefisien $x^2 = -1$
koefisen $x = 5$
konstanta $= -7$

Contoh Soal 3.3

Ubahlah setiap persamaan kuadrat di bawah ini ke dalam bentuk umum dan tentukanlah koefisien-koefisiennya serta konstantanya.

a. $\dfrac{3}{2x} + 5x = 4$

b. $\dfrac{7}{x-1} - \dfrac{2x-1}{3x} = 2$

c. $\dfrac{4}{x+1} - \dfrac{2}{x-2} = 1$

d. $\dfrac{2x-1}{x-3} + \dfrac{5}{x+1} = 3$

Jawab:

a.

$$\frac{3}{2x} + 5x = 4$$

$$\frac{3}{2x} + \frac{5x \cdot 2x}{2x} = 4$$

$$\frac{3 + 10x^2}{2x} = 4$$

$$3 + 10^2 = 8x$$

$$\mathbf{10x^2 - 8 + 3 = 0}$$

koefisien $x^2 = 10$
koefisien $x = -8$
konstanta $= 3$

b.

$$\frac{7}{x-1} - \frac{2x-1}{3x} = 2$$

$$\frac{7(3x) - (x-1)(2x-1)}{(x-1)3x} = 2$$

$$\frac{21x - (2x^2 - 3x + 1)}{(x-1)3x} = 2$$

$$\frac{21x - 2x^2 + 3x - 1}{3x^2 - 3x} = 2$$

$$-2x^2 + 24x - 1 = 6x^2 - 6x$$

$$\mathbf{-8x^2 + 30x - 1 = 0}$$

koefisien $x^2 = -8$
koefisien $x = 30$
kontanta $= -1$

c. $\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{2}{x-2}=1$

$\dfrac{4(x-2)-2(x+1)}{(x+1)(x-2)}=1$

$\dfrac{4x-8-2x-2}{x^2-x-2}=1$

$\dfrac{2x-10}{x^2-x-2}=1$

$2x-10=x^2-x-2$

$x^2-3x+8=0$

koefisien x^2 = 1

koefisien x = –3

konstanta = 8

d. $\dfrac{2x-1}{x-3}+\dfrac{5}{x+1}=3$

$\dfrac{(2x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}+\dfrac{5(x-3)}{(x-3)(x+1)}=3$

$\dfrac{2x^2+x-1+5x-15}{x^2-2x-3}=3$

$2x^2+6x-16=3x^2-6x-9$

$x^2-12x+7=0$

koefisien x^2 = 1

koefisien x = –12

konstanta = 7

2. Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Dalam menyelesaikan setiap persamaan kuadrat yang Anda cari adalah akar-akar persamaan kuadrat atau nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut. Menyelesaikan persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan beberapa cara, yaitu memfaktorkan, menyempurnakan, dan dengan rumus *abc*.

a. Memfaktorkan

Sifat yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara memfaktorkan adalah sifat faktor nol, yaitu:
Untuk setiap p dan q bilangan riil dan berlaku $p \cdot q = 0$ maka $p = 0$ atau $q = 0$

1) **Memfaktorkan Jenis $ax^2 + bx = 0$**

Untuk memfaktorkan persamaan kuadrat dengan bentuk $ax^2 + bx = 0$ dapat dilakukan dengan memisahkan x sesuai dengan sifat distributif, yaitu:

$ax^2 + bx = 0$

$x(ax + b) = 0$

Jadi, $x = 0$ atau $ax + b = 0$.

Contoh Soal 3.4

Selesaikanlah persamaan kuadrat di bawah ini:

a. $x^2 - 5x = 0$ **b.** $4x^2 + 3x = 0$

Jawab:

a. $x^2 - 5x = 0$

$x(x - 5) = 0$

$x = 0$ atau $x - 5 = 0$

$x = 5$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{0, 5\}$.

b. $4x^2 + 3x = 0$
$x(4x + 3) = 0$
$x = 0$ atau $4x + 3 = 0$
$4x = -3$
$x = -\frac{3}{4}$
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-\frac{3}{4}, 0\}$.

2) Memfaktorkan Jenis $ax^2 + bx + c = 0$

Untuk persamaan kuadrat jenis $ax^2 + bx + c = 0$ dapat difaktorkan dalam bentuk $(ax+p)\left(x+\frac{q}{a}\right)$ dengan p dan q bilangan bulat atau

$$ax^2 + bx + c = (ax+p)\left(x+\frac{q}{a}\right)$$
$$= ax^2 + ax\frac{q}{a} + px + \frac{pq}{a}$$
$$= ax^2 + qx + px + \frac{pq}{a}$$
$$= ax^2 + (p+q)x + \frac{pq}{a}$$

sehingga dapat disimpulkan

$$\boxed{ax^2 + bx + c = (ax+p)\left(x+\frac{q}{a}\right)}$$

dengan $b = p + q$
$c = \frac{pq}{a}$ atau $ac = pq$.

Solusi

Himpunan penyelesaian dari persamaan $5x^2 + 4x - 12 = 0$ adalah ....

a. $\{-2, \frac{5}{6}\}$
b. $\{2, -\frac{5}{6}\}$
c. $\{2, \frac{5}{6}\}$
d. $\{-2, -\frac{6}{5}\}$
e. $\{-2, \frac{6}{5}\}$

Jawab:

$5x^2 + 4x - 12 = 0$
$(5x-6)(x+2) = 0$
$5x - 6 = 0$ atau $x + 2 = 0$
$5x = 6$ atau $x = -2$
$x = \frac{6}{5}$ atau $x = -2$

Jawaban: **e**

Sumber: *UN SMK* 2006

Contoh Soal 3.5

Dengan memfaktorkan, tentukan himpunan penyelesaian untuk persamaan kuadrat di bawah ini.

a. $x^2 - 5x - 14 = 0$
b. $x^2 + 2x - 48 = 0$
c. $2x^2 + 9x + 7 = 0$
d. $3x^2 - 7x - 6 = 0$
e. $6x^2 - 23 + 7 = 0$

Jawab:

a. $x^2 - 5x - 14 = 0$
Dengan nilai $a = 1$, $b = -5$, $c = -14$, maka $p + q = -5$; $p \cdot q = -14$
Nilai p dan q dapat ditentukan dengan cara mencari bilangan yang apabila dijumlahkan menghasilkan –5 dan dikalikan menghasilkan –14.
Untuk itu, didapat $p = -7$ dan $q = 2$ sehingga:
$x^2 - 5x - 14 = 0$
$(x - 7)(x + 2) = 0$
$x - 7 = 0$ atau $x + 2 = 0$
$x = 7$ atau $x = -2$
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-2, 7\}$.

b. $x^2 + 2x - 48 = 0$
Dengan nilai $a = 1$, $b = 2$, $c = -48$, maka $p + q = 2$; $p \cdot q = -48$
Untuk nilai p dan q dapat ditentukan dengan cara mencari bilangan yang apabila dijumlahkan menghasilkan 2 dan dikalikan menghasilkan –48. Didapat $p = 8$ dan $q = -6$ sehingga:

$x^2 + 2x - 48 = 0$
$(x + 8)(x - 6) = 0$
$x + 8 = 0$ atau $x - 6 = 0$
$x = -8$ atau $x = 6$
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-8, 6\}$.

c. $2x^2 + 9x + 7 = 0$
Dengan nilai $a = 2$, $b = 9$, $c = 7$
$p + q = 9$; $p \cdot q = a \cdot c = 14$
Untuk nilai p dan q dapat ditentukan dengan cara mencari bilangan yang apabila dijumlahkan menghasilkan 9 dan dikalikan menghasilkan 14. Didapat $p = 7$ dan $q = 2$ sehingga:
$2x^2 + 9x + 7 = 0$
$(2x + 7)(x + \frac{2}{2}) = 0$
$2x + 7 = 0$ atau $x + 1 = 0$
$x = -\frac{7}{2}$ atau $x = -1$
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-\frac{7}{2}, -1\}$.

d. $3x^2 - 7x - 6 = 0$
Dengan nilai $a = 3$, $b = -7$, $c = -6$
$p + q = -7$; $p \cdot q = 3 \cdot -6 = -18$
Dengan cara yang sama, untuk menentukan nilai p dan q yang apabila dijumlahkan menghasilkan -7 dan dikalikan menghasilkan -18. Didapat $p = 2$ dan $q = -9$ sehingga:
$3x^2 - 7x - 6 = 0$
$(3x + 2)(x + -\frac{9}{3}) = 0$
$(3x + 2)(x - 3) = 0$
$3x + 2 = 0$ atau $x - 3 = 0$
$x = -\frac{2}{3}$ atau $x = 3$
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{-\frac{2}{3}, 3\}$.

e. $6x^2 - 23x + 7 = 0$
Dengan nilai $a = 6$, $b = -23$, $c = 7$
$p + q = -23$; $p \cdot q = 6 \cdot 7 = 42$
Dengan cara yang sama pula, nilai p dan q dapat dicari dengan cara mencari bilangan yang apabila dijumlahkan menghasilkan -23 dan dikalikan menghasilkan 42. Didapat $p = -2$ dan $q = -21$ sehingga:
$6x^2 - 23 + 7 = 0$
$(6x - 2)(x - \frac{21}{6}) = 0$
$6x - 2 = 0$ atau $x - \frac{21}{6} = 0$
$6x = 2$ atau $x = \frac{21}{6}$
$x = \frac{1}{3}$ atau $x = \frac{7}{2}$
Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\}$.

Solusi

Himpunan penyelesaian dari persamaan $5x^2 + 4x - 12 = 0$ adalah ....

a. $\{-2, \frac{5}{6}\}$
b. $\{2, -\frac{5}{6}\}$
c. $\{2, \frac{6}{5}\}$
d. $\{-2, -\frac{6}{5}\}$
e. $\{-2, \frac{6}{5}\}$

Jawab:
$5x^2 + 4 - 2 = 0$
$(5x - 6)(x + 2) = 0$
$5x - 6 = 0$ atau $x + 2 = 0$
$5x = 6$ atau $x = -2$
$x = \frac{6}{5}$ atau $x = -2$

Jawaban: **e**

Sumber: *UN SMK* 2004

b. Menyempurnakan Kuadrat

Dalam melengkapkan kuadrat terhadap persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dapat dilakukan dengan beberapa tahap, yaitu sebagai berikut.

1) Pisahkan konstanta atau pindahkan konstanta ke ruas kanan.
$ax^2 + bx = c$

2) Jika $a \neq 1$, bagi kedua ruas dengan a.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$$

3) Tambahkan pada kedua ruas kuadrat dari $\frac{1}{2}$ kali koefisien x.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

4) Nyatakan dalam bentuk kuadrat sempurna pada ruas kiri.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

5) Tentukan penyelesaian persamaan kuadrat sempurna di atas dengan menarik akar.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

Contoh Soal 3.6

Dengan melengkapkan kuadrat, tentukanlah himpunan penyelesaian untuk persamaan kuadrat di bawah ini:

a. $x^2 - 6x + 2 = 0$ **c.** $2x^2 - 5x - 4 = 0$
b. $x^2 + 9x + 1 = 0$ **d.** $3x^2 + 2x - 6 = 0$

Jawab:

a.

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$
$$x^2 - 6x = -2$$
$$x^2 - 6x + \left(-\frac{6}{2}\right)^2 = -2 + \left(-\frac{6}{2}\right)^2$$
$$x^2 - 6x + 9 = -2 + 9$$
$$(x-3)^2 = 7$$
$$x - 3 = \pm\sqrt{7}$$
$$x = 3 \pm \sqrt{7}$$
$$x_1 = 3 + \sqrt{7} \text{ dan } x_2 = 3 - \sqrt{7}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{3 - \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}\}$.

b.

$$x^2 + 9x + 1 = 0$$
$$x^2 + 9x = -1$$
$$x^2 + 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = -1 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$
$$x^2 + 9x^2 + \frac{81}{4} = -1 + \frac{81}{4}$$
$$\left(x + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{-4+81}{4} = \frac{77}{4}$$
$$x + \frac{9}{2} = \pm\sqrt{\frac{77}{4}} = \pm\frac{\sqrt{77}}{2}$$
$$x = -\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{77}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-9+\sqrt{77}}{2} \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{-9-\sqrt{77}}{2}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{-9-\sqrt{77}}{2}, \frac{-9+\sqrt{77}}{2}\}$.

c. $2x^2 - 5x - 4 = 0$

$$x^2 - \frac{5}{2}x = \frac{4}{2}$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{-5}{4}\right)^2 = 2 + \left(\frac{-5}{4}\right)^2$$

$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{25}{16} = 2 + \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{32}{16} + \frac{25}{16} = \frac{57}{16}$$

$$x - \frac{5}{4} = \pm\sqrt{\frac{57}{16}} = \pm\frac{\sqrt{57}}{4}$$

$$x = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{57}}{4} \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{5-\sqrt{57}}{4}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya $\{\frac{5-\sqrt{57}}{4}, \frac{5+\sqrt{57}}{4}\}$.

d. $3x^2 + 2x - 6 = 0$

$$x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{6}{3}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \left(\frac{2}{6}\right)^2 = 2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 2 + \frac{1}{9}$$

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{18+1}{9} = \frac{19}{9}$$

$$x + \frac{1}{3} = \pm\sqrt{\frac{19}{9}} = \pm\frac{\sqrt{19}}{3}$$

$$x = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{19}}{3}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{19}}{3} \quad \text{dan} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{19}}{3}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya $\{\frac{-1-\sqrt{19}}{3}, \frac{-1+\sqrt{19}}{3}\}$.

c. Menggunakan Rumus *abc*

Dalam melengkapkan kuadrat sempurna, diperoleh cara mencari nilai akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah dengan menggunakan rumus

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

Rumus tersebut dapat juga ditulis dalam bentuk

$$\boxed{x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

sehingga akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{ dan } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Contoh Soal 3.7

Dengan menggunakan rumus kuadrat (rumus *abc*), tentukanlah himpunan penyelesaian persamaan kuadrat di bawah ini:

a. $x^2 - 4x - 1 = 0$

b. $2x^2 - 5x - 6 = 0$

c. $5x^2 + 7x + 1 = 0$

Jawab:

a. $x^2 - 4x - 1 = 0$

Dengan nilai $a = 1$, $b = -4$, $c = -1$ maka

$$x_{1,2} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$$

$$= \frac{4\pm\sqrt{16+4}}{2}$$

$$= \frac{4\pm\sqrt{20}}{2}$$

$$= \frac{4}{2}\pm\frac{2\sqrt{5}}{2} = 2\pm\sqrt{5}$$

$$x_1 = 2+\sqrt{5} \qquad x_2 = 2-\sqrt{5}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}\}$.

b. $2x^2 - 5x - 6 = 0$

Dengan nilai $a = 2$, $b = -5$, $c = -6$ maka

$$x_{1,2} = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot2\cdot(-6)}}{2\cdot2}$$

$$= \frac{5\pm\sqrt{25+48}}{4}$$

$$= \frac{5\pm\sqrt{73}}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{73}}{4}; \qquad x_2 = \frac{5-\sqrt{73}}{4}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{5-\sqrt{73}}{4}, \frac{5+\sqrt{73}}{4}\}$.

c. $5x^2 + 7x + 1 = 0$

Dengan nilai $a = 5$, $b = 7$, $c = 1$ maka

$$x_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot5\cdot1}}{2\cdot5}$$

$$= \frac{-7\pm\sqrt{49-20}}{10}$$

$$= \frac{-7\pm\sqrt{29}}{10}$$

$$x_1 = \frac{-7+\sqrt{29}}{10} \qquad x_2 = \frac{-7-\sqrt{29}}{10}$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{\frac{-7-\sqrt{29}}{10}, \frac{-7+\sqrt{29}}{10}\}$.

3. Menentukan Jenis Akar-Akar Persamaan Kuadrat dengan Pendekatan Diskriminan

Pada pembahasan sebelumnya telah diperoleh cara mencari akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = (a + 0, a, b$ dan $c \in$ riil) yaitu dengan menggunakan rumus *abc*:

$$x_{1,\ 2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pada rumus tersebut terdapat bentuk $(b^2 - 4ac)$ disebut diskriminan (D).

Dengan menggunakan diskriminan ($D = b^2 - 4ac$), Anda dapat menentukan jenis akar-akar dari persamaan kuadrat, yaitu:

a.
- Jika $D > 0$ maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai 2 akar riil yang berlainan.
- Jika D berbentuk kuadrat sempurna dan $D \neq 0$ maka persamaan kuadrat memiliki 2 akar riil berlainan dan rasional jika a, b, dan c bilangan rasional.
- Jika D bukan bentuk kuadrat sempurna dan $D \neq 0$ maka memiliki 2 akar riil berlainan dan irasional

b. Jika $D < 0$ maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ tidak memiliki akar riil.

c. Jika $D = 0$ maka persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki 2 akar riil yang sama.

Contoh Soal 3.8

Tentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat berikut, tanpa terlebih dahulu menentukan akar-akarnya.

a. $2x^2 + 3x - 14 = 0$ **c.** $2x^2 + 3x + 4 = 0$

b. $3x^2 - 5x + 2 = 0$ **d.** $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Jawab:

a. $2x^2 + 3x - 14 = 0$

Dengan nilai $a = 2$, $b = 3$, $c = -14$ maka

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-14)$

$= 9 + 112 = 121$

Oleh karena $D > 0$ maka persamaan kuadrat $2x^2 + 3x - 14 = 0$ mempunyai 2 akar riil yang berbeda.

b. $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Dengan nilai $a = 3$, $b = -5$, $c = 1$ maka

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$

$= 25 - 24 = 1$

Oleh karena $D > 0$ maka persamaan kuadrat $3x^2 - 5x + 2 = 0$ mempunyai 2 akar riil yang berbeda.

c. $2x^2 + 3x + 4 = 0$

Dengan nilai $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$ maka

$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4$

$= 9 - 32 = -23$

Oleh karena $D < 0$ maka persamaan kuadrat $2x^2 + 3x + 4 = 0$ tidak mempunyai akar riil.

d. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Dengan nilai $a = 4$, $b = -12$, $c = 9$ maka

$D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9$

$= 144 - 144 = 0$

Oleh karena $D = 0$ maka persamaan kuadrat $4x^2 - 12x + 9 = 0$ mempunyai 2 akar kembar.

Solusi

Diketahui $4x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ supaya kedua akarnya riil berbeda dan positif haruslah ....

a. $m > 0$

b. $m > \frac{3}{2}$

c. $\frac{3}{2} < m < 2$ atau $m > 6$

d. $m > 6$

e. $m < 2$ atau $m > 6$

Jawab:

$4x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$

Dengan nilai $a = 4$, $b = -2m$, $c = 2m - 3$, agar kedua akarnya riil berbeda dan positif maka $D > 0$

$b^2 - 4ac > 0$

$(-2m)^2 - 4(4)(2m-3) = 0$

$4m^2 - 32m + 48 = 0$

$m^2 - 8m + 12 = 0$

$(m - 6)(m - 2) = 0$

$m - 6 > 0$ atau $m - 2 > 0$

$m > 6$ atau $m > 2$

maka nilai yang memenuhi $m > 6$

Jawaban: **d**

Sumber: *SPMB* 2002

Contoh Soal 3.9

1. Persamaan kuadrat $px^2 + (2 - 2p)x + p = 0$ mempunyai 2 akar riil yang berbeda. Tentukan nilai p.

   Jawab:

   $px^2 + (2 - 2p)x + p = 0$
   Dengan nilai $a = p$, $b = 2 - 2p$, $c = p$ maka
   $D = (2 - 2p)^2 - 4 \cdot p \cdot p$
   $= 4 - 8p + 4p^2 - 4p^2$
   $= 4 - 8p$
   Agar persamaan kuadrat tersebut mempunyai dua akar riil yang berbeda maka syaratnya adalah $D > 0$ sehingga
   $4 - 8p > 0$
   $-8p > -4$
   $p < \frac{-4}{-8}$
   $p < \frac{1}{2}$

   Jadi, $\boldsymbol{p < \frac{1}{2}}$.
2. Jika persamaan kuadrat $kx^2 + kx + 3 = 0$ mempunyai akar kembar, tentukan nilai k dan tentukan akar-akar kembar tersebut.

   Jawab:

   $kx^2 + kx + 3 = 0$
   Dengan nilai $a = k$, $b = k$, $c = 3$, agar persamaan kuadrat tersebut mempunyai 2 akar riil yang sama maka syaratnya $D = 0$ sehingga
   $k^2 - 4 \cdot k \cdot 3 = 0$
   $k^2 - 12k = 0$
   $k(k - 12) = 0$
   $k = 0$ atau $k - 12 = 0$ maka $k = 12$
   $k_1 = 0$, $k_2 = 12$ dan $k_1 \neq k_2$ sehingga $\{0, 12\}$
   Jika $k = 0$ maka persamaan semula bukan merupakan persamaan kuadrat. Jika $k = 12$ maka persamaan semula menjadi
   $12x^2 + 12x + 3 = 0$
   $4x^2 + 4x + 1 = 0$
   Dengan nilai $a = 4$, $b = 4$, $c = 1$
   $p + q = 4$; $p \cdot q = a \cdot c = 4$
   Dengan cara menduga-duga diperoleh $p = 2$ dan $q = 2$, sehingga:
   $4x^2 + 4x + 1 = 0$
   $(4x + 2)\left(x + \frac{2}{4}\right) = 0$
   $(4x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$
   $4x + 2 = 0$ atau $x + \frac{1}{2} = 0$
   $x = -\frac{1}{2}$ atau $x = -\frac{1}{2}$

   Jadi, akar persamaan kuadrat tersebut adalah $-\frac{1}{2}$.

4. Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Pada pembahasan sebelumnya, Anda dapat mencari akar-akar persamaan kuadrat dengan berbagai cara. Jika akar-akar persamaan kuadrat telah Anda peroleh maka Anda dapat mencari hasil kali dan jumlah akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Bagaimana halnya jika akar-akar persamaan kuadratnya belum Anda peroleh, dan Anda akan mencari jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat? Jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dapat diperoleh dengan cara berikut ini.

Misalkan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ memiliki akar-akar x_1, x_2:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \; ; \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ maka}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Jadi, rumus akar-akar persamaan kuadrat adalah: $\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$

rumus jumlah akar-akar persamaan kuadrat adalah:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\ &= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{(2a)^2} \\ &= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \end{aligned}$$

Jadi rumus persamaan akar-akar persamaan kuadrat adalah, $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$

Bentuk-bentuk simetri akar-akar persamaan kuadrat

1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$ (jumlah kuadrat akar-akar)
2) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)$
3) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1x_2)^2$

Solusi

Akar-akar dari $2x^2 - 3x - 9 = 0$ adalah x_1 dan x_2.
Nilai dari $x_1^2 + x_2^2 = ...$

a. $11\frac{1}{4}$ **d.** $-6\frac{3}{4}$

b. $6\frac{3}{4}$ **e.** $-11\frac{1}{4}$

c. $2\frac{1}{4}$

Jawab:

$2x^2 - 3x - 9 = 0$

dengan nilai $a = 2$, $b = -3$, $c = -9$ maka

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(3)}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-9}{2}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-9}{2}\right) \\ &= \frac{9}{4} + \frac{18}{2} = \frac{9+36}{4} = \frac{45}{4} \\ &= \mathbf{11\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Jawaban: **a**

Sumber: *Ebtanas SMK 2001*

Contoh Soal 3.10

1. Diketahui x_1, x_2 merupakan akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 - 3x + 5 = 0$, tentukan nilai dari:

   a. $x_1 + x_2$

   b. $x_1 \cdot x_2$

   c. $x_1^2 + x_2^2$

   d. $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$

   e. $\dfrac{1}{x_1+2} + \dfrac{1}{x_2+2}$

   Jawab:

   $x^2 - 3x + 5 = 0$

   Dengan nilai $a = 1$, $b = -3$, c = 5, maka

   a. $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{3}{1} = 3$

   b. $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{1} = 5$

   c. $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \left(x^1 + x^2\right)^2 - 2x_1 \cdot x_2 \\ &= (3)^2 - 2 \cdot 5 \\ &= 9 - 10 \\ &= -1 \end{aligned}$$

   d. $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \dfrac{-1}{5} = -\dfrac{1}{5}$

   e. $$\begin{aligned} \frac{1}{x_1+2} + \frac{1}{x_2+2} &= \frac{x_1+2}{(x_1+2)(x_2+2)} + \frac{x_2+2}{(x_1+2)(x_2+2)} \\ &= \frac{(x_1+x_2)+4}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2)+4} \\ &= \frac{3+4}{5+(2\cdot 3)+4} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

2. Jika jumlah kuadrat akar-akar persamaan $x^2 - 2x + k - 3 = 0$ adalah 20 maka tentukan nilai k.

   Jawab:

   $x^2 - 2x + k - 3 = 0$

   Dengan nilai $a = 1$, $b = -2$, $c = k - 3$ maka

   $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = 2$

   $x_1 \cdot x_2 = k - 3$

   Jumlah kuadrat akar-akarnya = 20

   $x_1^2 + x_2^2 = 20$

   $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 20$

   $(2)^2 - 2(k-3) = 20$

   $4 - 2k + 6 = 20$

   $-2k + 10 = 20$

   $-2k = 20 - 10 = 10$

   $k = \dfrac{10}{-2} = -5$

   Jadi, nilai $k = -5$.

Anda Pasti Bisa

Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2 + px + 4 = 0$

maka $\left(\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right)^2 = ...$

a. $\dfrac{1}{q^2}\left(p^2 - 4q\right)$

b. $\dfrac{1}{q}\left(p^2 - 4q\right)$

c. $\left(p^2 - 4q\right)$

d. $q\left(p^2 - 4q\right)$

e. $q\left(p^2 - 4q\right)$

Sumber: *UMPTN* 2000

Jadi nilai $k = -5$.

3. Jika salah satu akar persamaan $x^2 - 10x + (k - 2) = 10$ adalah empat kali akar yang lain maka tentukan nilai k dan akar-akar tersebut.

Jawab:

$x^2 - 10x + (k - 2) = 10$

Dengan nilai $a = 1$, $b = -10$, $c = k - 2$ dan salah satu akar = empat kali akar yang lain

$$x_1 = 4x_2 \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad\qquad 8 \cdot 2 = k - 2$$

$$4x_2 + x_2 = -\frac{-10}{1} = 10 \qquad\qquad 16 = k - 2$$

$$5x_2 = 10 \qquad\qquad 16 + 2 = k$$

$$x_2 = 2 \qquad\qquad 18 = k$$

$$x_1 = 4x_2$$
$$= 4 \cdot 2 = 8$$

Jadi, nilai $k = 18$ serta $x_1 = 8$ dan $x_2 = 2$.

Latihan Soal 3.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Jika p dan q adalah akar dari persamaan kuadrat $x^2 - 4x + 6 = 0$, tentukan nilai dari
   a. $\frac{3}{p} + \frac{3}{q}$
   b. $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$
   c. $p^2 + q^2$
   d. $\frac{p}{q^2} + \frac{q}{p^2}$
2. Jika x_1 dan x_2 akar persamaan kuadrat $2x^2 - 5x - 7 = 0$, maka tentukanlah nilai dari:
   a. $x_1^3 + x_2^3$
   b. $\frac{2x_1}{x_2} + \frac{2x_2}{x_1}$
   c. $2x_1^2 + 2x_2^2$
   d. $\frac{3x_1}{x_2^2} + \frac{3x_2}{x_1^2}$
3. Salah satu akar persamaan $x^2 - 3x + 3n - 2 = 0$ adalah 3 kurangnya dari 2 kali akar yang lain. Tentukan nilai dari n.
4. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - ax + 2x - 2a = 0$ adalah p dan q. Jika $p^2 + q^2 = 20$, hitunglah nilai a.
5. Diketahui x_1 dan x_2 adalah akar dari persamaan kuadrat $2x^2 + 3x - n + 1 = 0$. Jika $x_1^2 - x_2^2 = -\frac{27}{4}$, tentukanlah nilai n.

5. Menyusun Persamaan Kuadrat Baru

a. Menyusun Persamaan Kuadrat jika Diketahui Akar-Akarnya

Jika suatu persamaan kuadrat memiliki akar-akar x_1 dan x_2 maka persamaan kuadratnya dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\boxed{(x - x_1)(x - x_2) = 0}$$

Contoh Soal 3.11

Susunlah persamaan kuadrat jika diketahui akar-akarnya:

a. -2 dan 3

b. $\sqrt{5}$ dan $-\sqrt{5}$

c. $\frac{1}{4}$ dan -3

Jawab:

a. $x_1 = -2$ dan $x_2 = 3$

$(x - (-2))\ (x - 3) = 0$

$(x + 2)\ (x - 3) = 0$

$x^2 - 3x + 2x - 6 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$, yaitu dengan mengambil $a = 1$

b. $x_1 = \sqrt{5}$ dan $x_2 = -\sqrt{5}$

$\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x-\left(-\sqrt{5}\right)\right)=0$

$\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)=0$

$x^2 - 5 = 0$

c. $x_1 = \frac{1}{4}$ dan $x_2 = -3$

$\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\left(-3\right)\right)=0$

$\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+3\right)=0$

$\left(4x-1\right)\left(x+3\right)=0$

$4x^2+12x-x-3=0$

$4x^2 + 11x - 3 = 0$

b. Menyusun Persamaan Kuadrat Jika Diketahui Jumlah dan Hasil Kali Akar-akarnya

Jika suatu persamaan kuadrat memiliki akar-akar x_1 dan x_2 dan diketahui $(x_1 + x_2)$ dan $(x_1 \cdot x_2)$ maka persamaan kuadratnya dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0}$$

Bentuk persamaan tersebut dapat digunakan untuk menyusun persamaan kuadrat baru jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat baru berhubungan dengan persamaan kuadrat yang lain.

Contoh Soal 3.12

1. Tentukan persamaan kuadrat dengan rumus yang akar-akarnya 3 dan $-\frac{1}{2}$.

Jawab:

$x_1 = 3$ dan $x_2 = -\frac{1}{2}$

$x_1 + x_2 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{6-1}{2} = \frac{5}{2}$

$x_1 \cdot x_2 = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$

maka persamaan kuadratnya adalah

$$x^2-(x_1+x_2)+x_1\cdot x_2=0$$

$$x^2-\left(\frac{5}{2}\right)x+\frac{3}{2}=0$$

$2x^2 - 5x - 3 = 0$

2. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya 2 lebihnya dari akar-akar persamaan $3x^2 - 4x + 2 = 0$

Jawab:

Misalkan, persamaan kuadrat baru memiliki akar α

$\alpha_1 = x_1 + 2 \Leftrightarrow x_1 = \alpha_1 - 2$

$\alpha_2 = x_2 + 2 \Leftrightarrow x_2 = \alpha_2 - 2$

Substitusikan $x = \alpha - 2$ ke dalam persamaan kuadrat semula sehingga diperoleh:

$3(\alpha - 2)^2 - 4(\alpha - 2) + 2 = 0$

$3(\alpha^2 - 4\alpha + 4) - 4\alpha + 8 + 2 = 0$

$3\alpha^2 - 12\alpha + 12 - 4\alpha + 10 = 0$

$3\alpha^2 - 16\alpha + 22 = 0$

Jadi, persamaan kuadrat barunya adalah $3\alpha^2 - 16\alpha + 22 = 0$.

3. Diketahui akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 8x - 2 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Susunlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $\frac{x_1}{x_2}$ dan $\frac{x_2}{x_1}$.

Jawab:

$x^2 - 8x - 2 = 0$

Dengan nilai $a = 1$, $b = -8$, $c = -2$ maka

$$x_1+x_2=\frac{8}{1}=8$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-2}{1}=-2$$

Misalkan, akar-akar persamaan kuadrat barunya adalah α dan β.

$$\alpha=\frac{x_1}{x_2};\quad \beta=\frac{x_2}{x_1}$$

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}}{x_1x_2}\\&=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}\\&=\frac{8^2-2\cdot(-2)}{-2}=\frac{64+4}{-2}=\frac{68}{-2}\\&=-34\end{aligned}$$

$$\alpha\cdot\beta=\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_1}=1$$

Jadi, persamaan kuadrat barunya adalah:

$x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha \cdot \beta) = 0$

$x^2 - (-34)x + 1 = 0$

$x^2 + 34x + 1 = 0$.

Solusi

Persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c$ mempunyai akar x_1 dan x_2.

Jika $x_1 + x_2 = 3$ dan $x_1x_2 = -\frac{1}{2}$, persamaan kuadrat tersebut adalah ....

a. $2x^2 - 6x - 1 = 0$

b. $2x^2 + 6x - 1 = 0$

c. $2x^2 - x + 6 = 0$

d. $2x^2 + x - 6 = 0$

e. $2x^2 - 6x - 1 = 0$

Jawab:

Diketahui, $x_1 + x_2 = 3$, $x_1x_2 = -\frac{1}{2}$

maka persamaan kuadratnya adalah

$x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$

$$x^2-(3)x+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$x^2-3x-\frac{1}{2}=0$$

$$2x^2-6x-1=0$$

Jawaban: **a**

Sumber: *UN SMK 2005*

Latihan Soal 3.3

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Susunlah persamaan kuadrat jika diketahui akar-akarnya sebagai berikut.

   a. -3 dan 5 c. 4 dan $-\frac{3}{5}$

   b. -4 dan -1 d. $-\frac{2}{5}$ dan $\frac{1}{3}$

2. Tentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 kali dari akar persamaan kuadrat $2x^2 - 4x + 10 = 0$
3. Diketahui akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 + 7x + 3 = 0$ adalah x_1 dan x_2, susunlah persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya sebagai berikut.

   a. $x_1 - 4$ dan $x_2 - 4$

   b. $\frac{1}{x_1 - 2}$ dan $\frac{1}{x_2 - 2}$

   c. $x_1 - \frac{4}{x_1}$ dan $-\frac{4}{x_2}$

4. Jika akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 2x - 7 = 0$ adalah x_1 dan x_2, susunlah persamaan kuadrat baru jika akar-akarnya x_1^2 dan x_2^2.
5. Harga 1 karung beras yang beratnya 25 kg adalah 3 kali dari harga 10 kg cabe. Sedangkan harga 1 kwintal beras dan 60 kg cabe adalah Rp900.000,00. Jika Bu Dian membeli 50 kg beras dan 5 kg cabe. Berapa uang yang harus dibayar Bu Dian.

C. Pertidaksamaan Linear

Catatan

Kalimat terbuka adalah kalimat yang belum dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Kalimat tertutup adalah kalimat yang dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Pertidaksamaan linear adalah kalimat terbuka yang menggunakan tanda <, ≤, >, atau ≥, dan mengandung variabel dengan pangkat bilangan bulat positif dan pangkat tertingginya satu.

Bentuk umum dari pertidaksamaan linear :

$$ax + b > 0;\quad ax + b \geq 0$$
$$ax + b < 0;\quad ax + b \leq 0$$

dengan $a, b \in R$, $a \neq 0$.

1. Sifat-Sifat Pertidaksamaan

a. **Sifat tak negatif**

Untuk $a \in R$ maka $a \geq 0$.

b. **Sifat transitif**

Untuk $a, b, c \in R$

jika $a < b$ dan $b < c$ maka $a < c$;

jika $a > b$ dan $b > c$ maka $a > c$.

c. **Sifat penjumlahan**

Untuk $a, b, c \in R$

jika $a < b$ maka $a + c < b + c$;

jika $a > b$ maka $a + c > b + c$.

Jika kedua ruas pertidaksamaan dijumlahkan dengan bilangan yang sama tidak mengubah tanda ketidaksamaan.

d. **Sifat perkalian**

Jika $a < b$, $c > 0$ maka $ac < bc$.

Jika $a > b$, $c > 0$ maka $ac > bc$.

Jika $a < b$, $c < 0$ maka $ac < bc$.

Jika kedua ruas pertidaksamaan dikalikan bilangan (riil) positif tidak akan mengubah tanda ketidaksamaan, sedangkan jika dikalikan bilangan negatif akan mengubah tanda ketidaksamaan.

e. **Sifat kebalikan**

Jika $a > 0$ maka $\frac{1}{a} > 0$.

Jika $a < 0$ maka $\frac{1}{a} < 0$.

Suatu bilangan dan kebalikannya memiliki tanda yang sama baik untuk bilangan positif maupun negatif.

Contoh Soal 3.13

Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan berikut.

a. $3x + 4 \geq 2x - 5$

b. $2x - 6 \leq 5x - 9$

c. $4x - 7 > 2x - 4$

Jawab:

a. $3x + 4 \geq 2x - 5$

$3x - 2x + 4 \geq 2x - 2x - 5$ (kedua ruas dikurangi $2x$)

$x + 4 \geq -5$

$x + 4 - 4 \geq -5 - 4$ (kedua ruas dikurangi 4)

$x \geq -9$

b. $2x - 6 \leq 5x - 9$

$2x - 5x - 6 \leq 5x - 5x - 9$ (kedua ruas dikurangi $5x$)

$-3x - 6 \leq -9$

$-3x - 6 + 6 \leq -9 + 6$ (kedua ruas ditambah 6)

$-3x \leq -3$

$\frac{-3x}{-3} \geq \frac{-3}{-3}$ (kedua ruas dibagi -3)

$x \geq 1$

c. $4x - 7 \geq 2x - 4$

$4x - 2x - 7 \geq 2x - 2x - 4$ (kedua ruas dikurangi $2x$)

$2x - 7 \geq -4$

$2x - 7 + 7 \geq -4 + 7$ (kedua ruas ditambah 7)

$2x \geq 3$

$\frac{2x}{2} \geq \frac{3}{2}$ (kedua ruas dibagi 2)

$x \geq \frac{3}{2}$

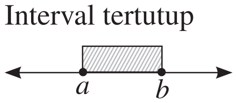
2. Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan

Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan dapat digambarkan pada garis bilangan, khususnya untuk himpunan penyelesaian berupa interval. Batas-batas interval digambarkan dengan menggunakan tanda " • " (bulatan penuh) atau " ◦ " (bulatan kosong). Tanda bulatan penuh menunjukkan bilangan tersebut termasuk ke dalam himpunan penyelesaian, dan tanda bulatan kosong menunjukkan bilangan tersebut tidak termasuk ke dalam himpunan penyelesaian.

Berikut ini beberapa bentuk dari interval yang sering dijumpai dalam pertidaksamaan.

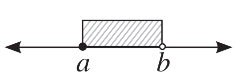
Garis bilangan **Himpunan**

Interval tertutup

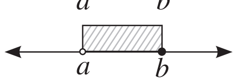


$\{x \mid a \leq x \leq b, x \in R\} = [a, b]$

Interval setengah tertutup



$\{x \mid a \leq x < b, x \in R\} = [a, b)$



$\{x \mid a < x \leq b, x \in R\} = (a, b]$

Interval terbuka

Solusi

Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{1-2x}{3} < 3$, $x \in R$ adalah ....

a. $\{x \mid x > -4, x \in R\}$

b. $\{x \mid x < 4, x \in R\}$

c. $\{x \mid x > 4, x \in R\}$

d. $\{x \mid x < -4, x \in R\}$

e. $\{x \mid x > -8, x \in R\}$

Jawab:

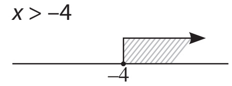
$\frac{1-2x}{3} < 3$

$1 - 2x < 9$

$-2x < 8$

$x > \frac{8}{-2}$

$x > -4$

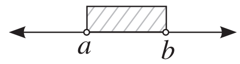


Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x \mid x > -4, x \in R\}$

$(-4, ∽)$

Jawaban: **a**

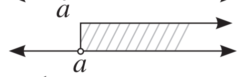
Sumber: *Ebtanas SMK 2001*



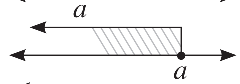
$\{x \mid a < x < b, x \in R\} = (a, b)$

Interval setengah garis

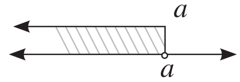
$\{x \mid x \geq a, x \in R\} = [a, \infty)$



$\{x \mid x > a, x \in R) = (a, \infty)$



$\{x \mid x \leq a, x \in R) = (-\infty, a]$



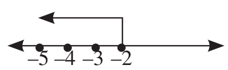
$\{x \mid x < \text{a}, x \in \text{R}) = (-\infty, a)$

Contoh Soal 3.14

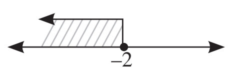
1. Tentukan himpunan penyelesaian dari $3x - 7 \geq 3 + 2x$ dan tunjukkan dengan garis bilangan jika :
   a. $x \in B$
   b. $x \in R$

   Jawab:
   $-3x - 7 \geq 3 + 2x$
   $-3x - 2x \geq 3 + 7$
   $-5x \geq 10$
   $x \leq \frac{10}{-5}$
   $x \leq -2$

   a. Himpunan penyelesaian
   $\{x \mid x \leq -2, x \in B\}$

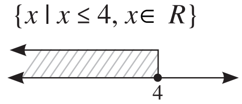
   b. Himpunan penyelesaian
   $\{x \mid x \leq -2\ x \in R\}$

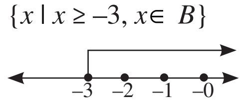
2. Tunjukkan dengan garis bilangan,
   a. $\{x \mid x \leq 4, x \in R\}$
   b. $\{x \mid x \geq -3, x \in B\}$
   c. $\{x \mid -2 < x \leq 3, x \in R\}$

   Jawab:

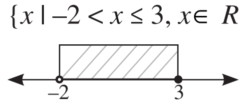
   a. $\{x \mid x \leq 4, x \in R\}$

   b. $\{x \mid x \geq -3, x \in B\}$

   c. $\{x \mid -2 < x \leq 3, x \in R\}$

Latihan Soal 3.4

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan berikut dengan $x \in R$.
   a. $4x - 7 \leq 2x - 4$
   b. $3x + 2 \leq 7x - 6$
   c. $5x - 2 \leq 3 - 2x$
   d. $\frac{7-2x}{2} \geq \frac{3x-2}{3}$
   e. $\frac{2}{5}(x + 10) + 4 \leq 3(x + 3)$
2. Tentukan himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan berikut dan sajikan dalam garis bilangan untuk $x \in R$.
   a. $5x + 2 \leq 2x + 14$ **c.** $\frac{x-3}{4} + \frac{x+2}{3} \leq \frac{1}{2}$
   b. $\frac{1}{5}x + 3 \leq 4 - \frac{2}{3}x$ **d.** $\frac{1}{3}(2x - 4) + 2 \geq \frac{x}{6} - \frac{3}{2}$
3. Gambarlah pada garis bilangan, himpunan berikut ini:
   a. $\{x \mid x \geq 3, x \in B\}$
   b. $\{x \mid x \leq -5, x \in R\}$
   c. $\{x \mid x > 2, x \in R\}$
   d. $\{x \mid -3 \leq x < 4, x \in R\}$
   e. $\{x \mid 4 < x < 9, x \in R\}$
   f. $\{x \mid x < -2$ atau $x < 4, x \in R\}$

D. Pertidaksamaan Kuadrat

Suatu kalimat terbuka yang memuat variabel dengan pangkat positif dan memiliki pangkat tertinggi dua dihubungkan dengan tanda disebut pertidaksamaan kuadrat.

Bentuk umum pertidaksamaan kuadrat :

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

dengan a, b, dan $c \in R$ dan $a \neq 0$.

1. Menyelesaikan Pertidaksamaan Kuadrat

Menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat lebih mudah apabila menggunakan garis bilangan.

Menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat berbeda dengan menentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan linear. Pada pertidaksamaan linear, Anda dapat langsung menentukan daerah penyelesaian setelah memperoleh himpunan penyelesaiannya. Adapun pada pertidaksamaan kuadrat Anda harus menentukan daerahnya terlebih dahulu untuk dapat menentukan himpunan penyelesaiannya.

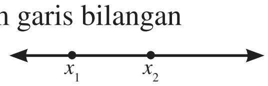
Berikut ini beberapa langkah yang harus dipahami dalam menyelesaikan pertidaksamaan kuadrat.

a. Nyatakan bantuk pertidaksamaan kuadrat dengan cara menjadikan ruas kanan sama dengan nol

b. Tentukan akar-akar dari pertidakasamaan kuadrat dengan cara memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, atau rumus *abc*

c. Tentukan nilai-nilai pembuat nol dari akar-akar petidaksamaan kuadrat pada tahap **b**.

d. Gambarkanlah nilai-nilai pembuat nol yang diperoleh pada langkah 3 pada diagram garis bilangan



e. Tentukanlah tanda di daerah sekitar pembuat nol, yaitu ⊕ atau ⊖ dengan cara menyubstitusikan nilai x yang lebih besar atau lebih kecil dari x_1 atau x_2.

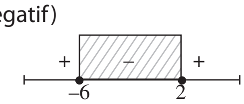
Solusi

Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 + 4x - 12 \leq 0$, $x \in R$ adalah ....

a. $\{x \mid -2 \leq x \leq 6, x \in R\}$
b. $\{x \mid -6 \leq x \leq 2, x \in R\}$
c. $\{x \mid -2 \leq x \leq -6, x \in R\}$
d. $\{x \mid x \geq 2$ atau $x \geq -6, x \in R\}$
e. $\{x \mid x \geq 6$ atau $x \geq -2, x \in R\}$

Jawab:

$x^2 + 4x - 12 \leq 0$
$x^2 + 4x - 12 = 0$
$(x + 6)(x - 2) = 0$
$x + 6 = 0$ atau $x - 2 = 0$
$x = -6$ atau $x = 2$
ambil $x = 0 \Rightarrow$
$x^2 + 4x - 12 = 0^2 + 4 \cdot 0 - 12 = -12$ (negatif)



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah **$\{x \mid -6 \geq x \leq 2, x \in R\}$**

Jawaban: **b**

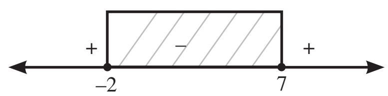
Sumber: *UAN SMK 2003*

f. Himpunan penyelesaian dari suatu pertidaksamaan dilihat dari tanda pertidaksamaannya. Jika tandanya < atau ≤ maka daerah hasil yang dimaksud adalah daerah negatif. Dan jika tandanya > atau ≥ maka daerah hasil yang dimaksud adalah daerah negatif. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut dinyatakan dalam bentuk interval.

Contoh Soal 3.15

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 -5x -14 \leq 0$, untuk $x \in R$.

Jawab:
$x^2 -5x -14 \leq 0$
$x^2 -5x -14 = 0$
$(x -7)(x + 2) = 0$
$x_1 = 7$ $x_2 = -2$
ambil $x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x -14 = 0 -5 \cdot 0 -14 = -14$ (negatif)



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $\{ x \mid \mathbf{-2 \leq x \leq 7}, x \in R\}$.

2. Tentukan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

$2x^2 + 5x + 15 < 3x^2 + 5x - 1$, untuk $x \in R$.

Jawab:

$2x^2 + 5x + 15 < 3x^2 + 5x -1$
$2x^2 + 5x + 15 -3x^2 -5x + 1 < 0$
$-x^2 + 16 < 0$
$x^2 -16 > 0$
$x^2 -16 = 0$
$(x - 4)(x + 4) = 0$
$x = 4$ atau $x = -4$
ambil $x = 0$
$x^2 -16 = 0^2 -16 = -16$ (negatif)

Jadi, himpunan penyelesaian adalah $\{x \mid x < -4 \text{ atau } x > 4, x \in R\}$.

Latihan Soal 3.5

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan di bawah ini.
   a. $x^2 + 4x -12 \geq 0$
   b. $x^2 -2x -35 \leq 0$
   c. $x^2 + 4x -6 < 0$
   d. $3x^2 + 4x -7 > 0$

2. Tentukan himpunan penyelesaian untuk pertidaksamaan di bawah ini :
   a. $4x^2 + 4x < 1$
   b. $15 -7x \leq 2x$
   c. $25 > x^2$
   d. $9x -x^2 < x^2 + 14$

3. Sebuah peluru ditembakkan ke atas dari ketinggian 2m di atas tanah. Jarak yang dicapai oleh peluru setelah t detik ditentukan oleh $s = 2 + 30t -5t^2$. Kapan peluru berada pada ketinggian tidak kurang dari 27 m di atas tanah?

E. Sistem Persamaan Linear

Di SMP, Anda telah mempelajari materi mengenai sistem persamaan linear. Masih ingatkah Anda apa sistem persamaan linear itu? Sistem persamaan linear adalah suatu sistem persamaan yang peubah-peubahnya berpangkat satu.

Sistem persamaan linear dapat terdiri dari dua atau lebih variabel. Untuk pembahasan kali ini anda akan mempelajari kembali mengenai sistem persamaan linear (SPL).

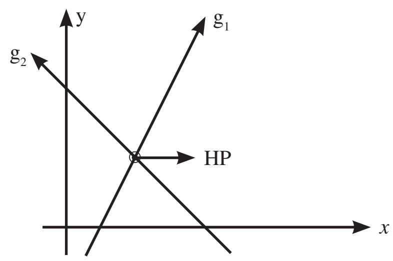
Bentuk umum dari sistem persamaan linear dua variabel adalah sebagai berikut :

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}}$$

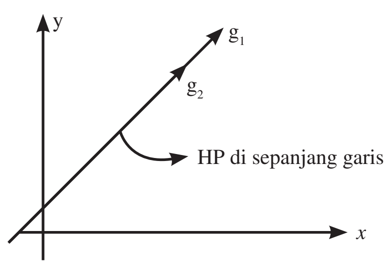
dengan a, b, dan $c \in R$.

Berdasarkan gradien garis (m) dan nilai c pada persamaan garis $y = mx + c$, SPL memiliki tiga kemungkinan banyaknya penyelesaian.

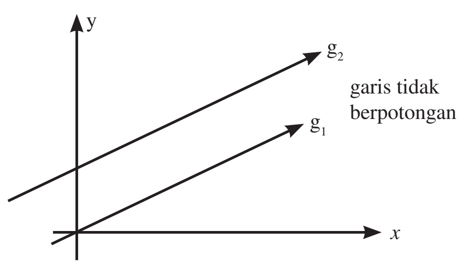
1. Memiliki sebuah penyelesaian jika $m_1 \neq m_2$.



2. Memiliki banyak penyelesaian jika $m_1 = m_2$ dan $c_1 = c_2$.



3. Tidak memiliki penyelesaian jika $m_1 = m_2$ dan $c_1 \neq c_2$.



Dalam menentukan penyelesaian dari SPL, Anda dapat menggunakan beberapa cara berikut ini :

1. grafik;
2. eliminasi;
3. substitusi;
4. gabungan (eliminasi dan substitusi);
5. Aturan Cramer (determinan).

Pada pembahasan kali ini kita akan menggunakan 3 metode untuk menentukan penyelesaian dari SPL yaitu eliminasi, substitusi, dan gabungan.

1. Metode Eliminasi

Eliminasi artinya menghilangkan salah satu variabel dari sistem persamaan linear dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan dua buah persamaan linear dalam suatu sistem persamaan.

Dalam menentukan variabel mana yang harus dieliminasi lihat variabel yang koefisiensinya sama, dan jika tidak ada yang sama maka Anda kalikan dengan koefisien-koefisien variabel yang akan dieliminasi secara silang.

Info Math

Karl Friederich Gauss (1777–1855)

Sumber: *content.answers.com*

Metode Substitusi untuk menyelesaikan persamaan dengan beberapa variabel berasal dari zaman kuno. Metode eliminasi, walaupun telah dikenal sejak beberapa abad yang lalu, tetapi baru dibuat sistematis oleh Karl Friederich Gauss (1777–1855) dan Camille Jordan (1838–1922).

Sumber: *Precalculus*, 1999

Contoh Soal 3.16

Tentukan penyelesaian dari SPL berikut:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 22 \end{cases}$$

dengan metode eliminasi.

Jawab:

Dari soal diketahui bahwa, tidak ada variabel yang memiliki koefisien sama maka Anda harus menyatakan koefisien dari variabel yang akan dieliminasi.

Misalkan, variabel y yang akan dieliminasi terlebih dahulu diperoleh :

$$\begin{array}{l|c|l} 2x - y = 3 & \times 2 & \Leftrightarrow 4x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 22 & \times 1 & \quad\ \ 3x + 2y = 22 \quad + \\ \hline & & \qquad\ 7x = 28 \end{array}$$

$$x = \frac{28}{7}$$

$$x = 4$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama eliminasi x, diperoleh:

$$\begin{array}{l|c|l} 2x - y = 3 & \times 3 & \Leftrightarrow 6x - 3y = 9 \\ 3x + 2y = 22 & \times 2 & \Leftrightarrow 6x + 4y = 44 \quad - \\ \hline & & \qquad -7y = -35 \end{array}$$

$$y = \frac{-35}{-7}$$

$$y = 5$$

Jadi, penyelesaian SPL di atas adalah $\{(4, 5)\}$.

2. Metode Substitusi

Penyelesaian dengan metode substitusi dilakukan dengan cara mengganti salah satu variabel dengan variabel yang lainnya sehingga diperoleh persamaan linear satu peubah.

Contoh Soal 3.17

Tentukan penyelesaian dari SPL berikut:

$$\begin{cases} x + 3y = 11 & \ldots(1) \\ 2x - 5y = -11 & \ldots(2) \end{cases}$$

Jawab:

$x + 3y = 11 \Leftrightarrow x = 11 - 3y$

Substitusikan $x = 11 - 3y$ ke persamaan (2) sehingga diperoleh

$2(11 - 3y) - 5y = -4$

$22 - 6y - 5y = -4$

$22 - 11y = -11$

$-11y = -11 - 22$

$-11y = -33$

$$y = \frac{-33}{-11} = 3$$

Substitusi $y = 3$ ke persamaan $x = 11 - 3y$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} x &= 11 - 3.3 \\ &= 11 - 9 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Jadi, penyelesaian SPL {(2,5)}.

3. Metode Gabungan

Metode ini merupakan perpaduan antara metode eliminasi dan substitusi. Dengan metode ini sistem persamaan linear di eliminasi terlebih dahulu, kemudian untuk menentukan variabel yang lainnya digunakan metode substitusi.

Contoh Soal 3.18

Tentukan himpunan penyelesaian dari SPL berikut:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -14 \\ 3x - 4y = 30 \end{cases}$$

Jawab:

Eliminasi nilai x untuk mendapatkan nilai y

$$\begin{array}{l|l|ll} 2x + 3y = -14 & \times 3 & 6x + 9y & = -42 \\ 3x - 4y = 30 & \times 2 & 6x - 8y & = 60 \quad - \\ \hline & & 17y & = -102 \\ & & y & = \dfrac{-102}{17} \\ & & y & = -6 \end{array}$$

Substitusikan $y = -6$ ke dalam persamaan $2x + 3y = -14$, sehingga diperoleh:

$2x + 3y = -14$

$2x + 3(-6) = -14$

$2x - 18 = -14$

$2x = 4$

$x = 2$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah {(2, –6)}.

Solusi

Harga 3 buah buku dan 2 penggaris Rp9.000,00. Jika harga sebuah buku Rp500,00 lebih mahal dari harga sebuah penggaris, harga sebuah buku dan 3 buah penggaris adalah ....

a. Rp6.500,00

b. Rp7.000,00

c. Rp8.000,00

d. Rp8.500,00

e. Rp9.000,00

Jawab:

Misalkan, harga buku = x

harga penggaris = y

maka model matematika

$3x + 2y = 9000$; $x = y + 500$

Gunakan metode substitusi:

Substitusi $x = y + 500$ ke persamaan $3x + 2y = 9.000$

$3x + 2y = 9000$

$3(y + 500) + 2y = 9.000$

$3y + 1.500 + 2y = 9.000$

$5y = 7.500$

$y = 1.500$

maka harga 1 penggaris adalah Rp1.500,00 dan harga buku $x = y + 500 = 1.500 + 500 =$ Rp2.000,00. Sehingga harga 1 buku dan 3 penggaris = $2.000 + 3\,(1.500) = 2.000 + 4.500$ = Rp6.500,00

Jawaban: **a**

Sumber: *UN SMK* 2004

Latihan Soal 3.6

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan penyelesaian dari SPL berikut :

a. $\begin{cases} x - 3y = 10 \\ 2x + 5y = -13 \end{cases}$

b. $\begin{cases} \dfrac{4}{5}x + \dfrac{2}{5}y = 1 \\ \dfrac{3}{4}x + \dfrac{3}{8}y = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 0{,}2x + 1{,}4y = 04 \\ 4{,}3x - 5{,}4y = 26{,}9 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{2}{y} = 5 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{7} = -2 \end{cases}$

2. Dua buah bilangan jumlahnya 41 dan selisihnya 15. Tentukan kedua bilangan itu.

3. Sebuah gedung bioskop jumlah penontonnya 250 orang. Setiap orang yang menonton di kelas I, karcisnya Rp25.000,00 dan penonton kelas II per orang membayar Rp15.000,00. Jika uang yang terkumpul dari penjualan karcis Rp4.500.000,00, berapakah banyaknya penonton di setiap kelas?

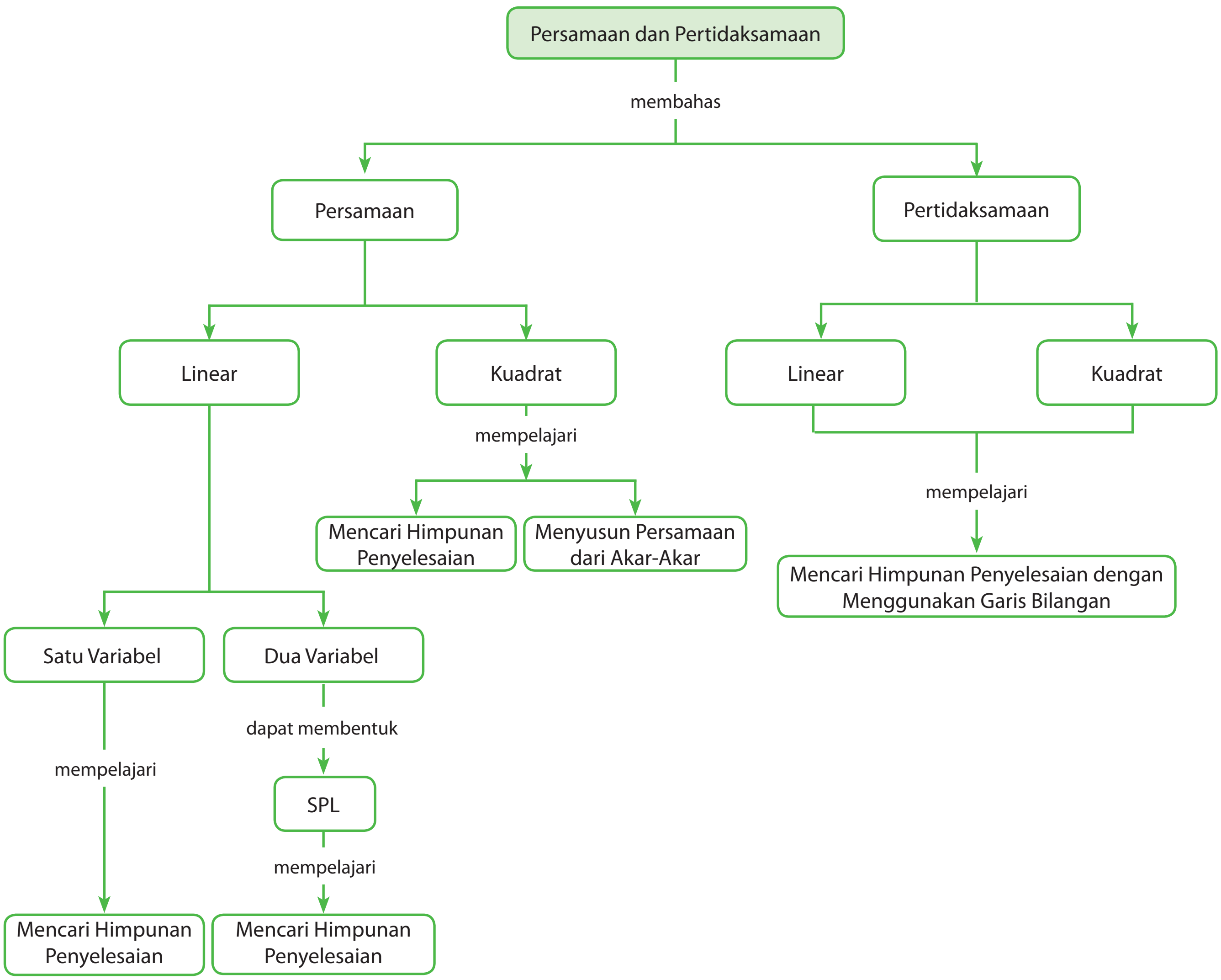
Rangkuman

1. Persamaan linear adalah suatu persamaan dengan variabel yang mempunyai pangkat bulat positif dan pangkat tertinggi variabelnya satu. Dengan bentuk umum persamaan linear adalah $ax + b = 0$ dengan $a, b \in R$ dan $a \neq 0$.
2. Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan dengan satu variabel yang mempunyai pangkat bulat positif dan pangkat tertinggi dari variabel adalah dua. Bentuk umum persamaan kuadrat adalah : $ax^2 + bx + c = 0$ dengan a, b, dan $c \in R$ dan $a \neq 0$.
3. Penyelesaian persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan beberapa cara, yaitu:
   a. memfaktorkan,
   b. menyempurnakan kuadrat,
   c. menggunakan rumus kuadrat (rumus *abc*),
   yaitu $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
4. Untuk menentukan jenis akar-akar persamaan kuadrat dapat digunakan rumus diskriminan ($D = b^2 - 4ac$)
   a. Jika $D > 0$, persamaan kuadrat memiliki 2 akar riil yang berlainan.
   b. Jika $D = 0$, persamaan kuadrat memiliki 2 akar rill yang sama.
   c. Jika $D < 0$, persamaan kuadrat tidak memiliki akar rill.
5. Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ maka dengan rumus *abc* akan diperoleh rumus berikut.
   a. Rumus jumlah akar-akar persamaan kuadrat, yaitu:
   $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$
   b. Rumus hasil kali akar-akar persamaan kuadrat, yaitu:
   $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$
6. Untuk penyusunan persamaan kuadrat
   a. jika diketahui akar-akarnya x_1 dan x_2 maka persamaan kuadratnya $(x - x_1)(x - x_2) = 0$
   b. jika diketahui jumlah dan hasil kali akar-akarnya $(x_1 + x_2)$ dan $(x_1 \cdot x_2) = 0$ maka persamaan kuadratnya $x_2 - (x_1 + x_2)\,x + (x_1 \cdot x_2) = 0$.
7. Pertidaksamaan linear adalah kalimat terbuka yang menggunakan tanda pertidaksamaan ($<$, $\leq$, $>$, dan $\geq$) dan memiliki variabel dengan pangkat bilangan bulat positif dan pangkat tertingginya satu.
   Bentuk umum : $ax + b > 0$; $ax + b \geq 0$;
   $ax + b < 0$; $ax + b \leq 0$.
8. Pertidaksamaan kuadrat adalah kalimat terbuka yang memuat variabel dengan pangkat bulat positif dan memiliki pangkat tertinggi dua yang dihubungkan dengan tanda ketidaksamaan.
   Bentuk umum : $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$;
   $ax^2 + bx + c < 0$; $ax^2 + bx + c \leq 0$.
9. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan linear dan pertidaksamaan kuadrat dinyatakan dengan menggunakan garis bilangan.
10. Untuk menentukan himpunan penyelesaian pada sistem persamaan linear dua variabel, dapat menggunakan:
    a. metode grafik,
    b. metode eliminasi substitusi,
    c. metode gabungan.

Alur Pembahasan

Perhatikan alur pembahasan berikut:

Materi tentang Persamaan dan Pertidaksamaan dapat digambarkan sebagai berikut.



Kata Mutiara

Lambert Jeffries

Kegagalan biasanya merupakan langkah awal menuju sukses, tanpa sukses itu sendiri sesungguhnya baru merupakan jalan tak berketentuan menuju puncak sukses.

Latihan Soal Bab 3

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Himpunan penyelesaian $5(x - 6) + 15 - 3(x + 5) = 4(x - 1)$ adalah ....

a. -11
b. -12
c. -13
d. -14
e. -15

Alasan: ____________________

2. Himpunan penyelesaian dari :

$\frac{3x-5}{4} = \frac{x+4}{3} + \frac{x-1}{2}$ adalah ....

a. -23
b. 23
c. -25
d. 25
e. 30

Alasan: ____________________

3. Harga 1 kg beras adalah tiga kali harga 1 kg tepung terigu. Harga 6 kg beras dan 4 kg tepung terigu adalah Rp46.200,00. Jika Putri membeli 3 kg beras dan 3 kg tepung terigu, berapa rupiahkah Putri harus membayar?

a. Rp22.500,00
b. Rp25.200,00
c. Rp52.500,00
d. Rp23.000,00
e. Rp23.100,00

Alasan: ____________________

4. Jika $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} < \frac{x}{6} + \frac{3}{4}$ maka nilai x yang memenuhi adalah ....

a. $x < \frac{4}{5}$
b. $x < \frac{4}{6}$
c. $x < \frac{5}{4}$
d. $x > \frac{6}{4}$
e. $x > \frac{3}{2}$

Alasan: ____________________

5. Nilai terbesar x agar $x - \frac{3x}{4} \geq \frac{3x}{8} + \frac{1}{2}$ adalah ....

a. -2
b. -3
c. -4
d. 1
e. -1

Alasan: ____________________

6. Penyelesaian dari $3t - 1 \leq \frac{5}{3}(-3 + t)$ adalah ....

a. $t \leq 24$
b. $t > -24$
c. $t \geq 24$
d. $0 \leq t < 24$
e. $t \leq 24$

Alasan: ____________________

7. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{1}{2}(x - 2) < 3(x - 1)$ adalah ....

a. $\{x \mid x > 4\}$
b. $\{x \mid x < 5\}$
c. $\{x \mid x < \frac{2}{3}\}$
d. $\{x \mid x > \frac{4}{3}\}$
e. $\{x \mid x > -\frac{4}{3}\}$

Alasan: ____________________

8. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 3 dan $\frac{2}{5}$ adalah ....

a. $5x^2 - 17x + 6 = 0$
b. $4x^2 - 10x + 3 = 0$
c. $5x^2 - 5x + 4 = 0$
d. $5x^2 - 12x + 2 = 0$
e. $5x^2 - 12x = 0$

Alasan: ____________________

9. Agar persamaan $x^2 + (k + 2)x + (k + 3) = 0$ mempunyai akar kembar maka nilai k = ...

a. ± 8
b. ± 4
c. $\pm 2\sqrt{2}$
d. ± 2
e. ± 1

Alasan: ____________________

10. Jika p dan q adalah akar-akar persamaan $2x^2 - 3x + 2 = 0$ maka $p^3q^2 + p^2q^3$ = ...

a. $\frac{1}{4}$
b. $\frac{3}{4}$
c. $\frac{3}{2}$
d. $\frac{9}{4}$
e. $\frac{7}{2}$

Alasan: ____________________

11. Jika persamaan $ax - 4x + 10 = 0$ mempunyai akar-akar α dan β dengan $\alpha \cdot \beta = 5$ maka $\alpha + \beta$ = ...

a. -8
b. -4
c. -2
d. 2
e. 8

Alasan: ____________________

12. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya lebih 3 dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 5x - 2 = 0$ adalah ....

a. $x^2 - x - 30 = 0$
b. $x^2 - x + 30 = 0$
c. $x^2 + x + 30 = 0$
d. $x^2 + 5x - 21 = 0$
e. $x^2 + 8x - 24 = 0$

Alasan: ____________________

13. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $4x^2 - 8x + 3 > 0$ adalah ....

a. $x < \frac{1}{2}$ atau $x > 1\frac{1}{2}$

b. $x > \frac{1}{2}$ atau $x > 1\frac{1}{2}$

c. $x < -\frac{1}{2}$ atau $x < 1\frac{1}{2}$

d. $x > -\frac{1}{2}$ atau $x < -1\frac{1}{2}$

e. $x > -\frac{1}{2}$ atau $x > -1\frac{1}{2}$

Alasan: ______________________

14. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 < 9$ adalah ....

a. $x > -3$ d. $x < -3$ atau $x > 3$
b. $x > 3$ e. $x < 3$ atau $x > -3$
c. $-3 < x < -3$

Alasan: ______________________

15. Nilai yang memenuhi $\frac{1}{5}x^2 - 2x - 15 \leq 0$ adalah ....

a. $-5 < x \leq 15$ d. $-5 \leq x < 15$
b. $-15 \leq x \leq 15$ e. $-5 \leq x \leq 15$
c. $-5 < x < 15$

Alasan: ______________________

16. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $(x + 5)x \leq 2(x^2 + 2)$ adalah ....

a. $\{x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq -1\}$
b. $\{x \mid x \leq 1 \text{ atau } x \geq 4\}$
c. $\{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$
d. $\{x \mid -4 \leq x \leq 1\}$
e. $\{x \mid x \leq 4\}$

Alasan: ______________________

17. Bentuk pertidaksamaan $-3x^2 + 5x + 2 \geq 0$ akan bernilai benar jika ....

a. $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ d. $x < \frac{1}{3}$ atau $x \geq 2$
b. $\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ e. Semua bilangan riil
c. $x < -\frac{1}{3}$ atau $x \geq 2$

Alasan: ______________________

18. Himpunan penyelesaian dari

$$\begin{cases} 2x - 3y - 4 = 0 \\ 3x + 2 = 2y \end{cases}$$

adalah ....

a. $\{\frac{14}{5}, \frac{18}{5}\}$ d. $\{-\frac{16}{5}, -\frac{14}{5}\}$
b. $\{-\frac{14}{5}, \frac{16}{5}\}$ e. $\{\frac{16}{5}, \frac{14}{5}\}$
c. $\{-\frac{14}{5}, -\frac{16}{5}\}$

Alasan: ______________________

19. Himpunan penyelesaian dari

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 4y = 19 \end{cases}$$

adalah x_0 dan y_0 maka nilai dari x_0 dan y_0 adalah ....

a. 5 d. 8
b. 6 e. 9
c. 7

Alasan: ______________________

20. Himpunan penyelesaian dari

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x + 4y = 27 \end{cases}$$

adalah ....

a. $\{-1, -6\}$ d. $\{1, 6\}$
b. $\{-1, 6\}$ e. $\{2, 6\}$
c. $\{2, -6\}$

Alasan: ______________________

B. Jawablah soal-soal berikut.

1. Tentukan himpunan penyelesaian dari persamaan kuadrat berikut.
   a. $2x^2 – 5x - 3 = 0$
   b. $x^2 = \frac{1}{2}x + 5$
2. Tentukan jenis akar-akar dari persamaan kuadrat berikut
   a. $–x^2 + 6x = 8$
   b. $3x^2 + 2x – 1 = 0$
   c. $2x^2 + 3x – 14 = 0$
3. Panjang dan lebar sebuah ruangan berselisih 3 cm. Jika luas ruangan tersebut 54 cm^2, berapakah ukuran panjang dan lebarnya?
4. Tentuan himpunan penyelesaian pertidaksamaan kuadrat berikut.
   a. $2x^2 - x \geq 6$
   b. $3x^2 - 7x + 2 \geq 0$
   c. $(x - 1)\,(x + 2) < x(4 - x)$
   d. $(x - 1)2 > 4\,x^2$
5. Himpunan penyelesaian dari
$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{6} = 2 \\ \frac{3}{5}x + \frac{2}{3}y = -1 \end{cases}$$
adalah x_0 dan y_0. Carilah nilai $x_0 - y_0$.

Bab

IV

Sumber: *www.gerryscakes.com*

Matriks

Pada bab sebelumnya, Anda telah mempelajari persamaan dan pertidaksamaan. Bentuk persamaan dapat diubah ke bentuk matriks untuk mempermudah dalam perhitungan, misalnya aplikasi berikut ini. Tia, Mirna, dan Yenny akan memesan 3 macam kue, kue yang dipesan Tia, adalah 3 kue rasa cokelat, 2 kue rasa keju, dan 2 kue rasa susu. Mirna memesan 4 kue rasa cokelat, 1 kue rasa keju, dan 1 kue rasa susu, sedangkan Yenny memesan 2 kue rasa cokelat, 3 kue rasa keju, dan 2 kue rasa susu. Jika harga untuk satu kue rasa cokelat, kue rasa keju, dan kue rasa susu masing-masing adalah Rp2.000,00, Rp2.500,00, dan Rp1.500,00. Berapakah jumlah uang yang harus dibayarkan oleh masing-masing orang?

Masalah tersebut dapat diselesaikan dengan menggunakan matriks. Untuk itu, pelajarilah bab ini dengan baik.

A. Pengertian dan Jenis Matriks
B. Operasi Aljabar pada Matriks
C. Determinan dan Invers Matriks
D. Aplikasi Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Tes Kompetensi Awal

Sebelum mempelajari bab ini, kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Selesaikan persamaan berikut ini.
   a. $2x + 5 = -3$
   b. $2(x + 9) + 6 = x + 20$
2. Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan metode gabungan eliminasi dan substitusi.
   a. $2x + 4y = 5$
   $-5x + 2y = 10$
   b. $x - y = 4$
   $2x + y = 13$

A. Pengertian dan Jenis Matriks

1. Pengertian Matriks

Sumber: *smatb.files.wordpress.com*

Gambar 4.1
Data absensi siswa dapat ditampilkan dalam bentuk matriks

Dalam kehidupan sehari-hari Anda pasti sering dihadapkan pada informasi yang disajikan dalam bentuk tabel. Sebagai contoh, jika Anda seorang pecinta sepakbola, Anda pasti sering memperhatikan dan mencari informasi mengenai klasemen sementara dari kejuaraan yang diikuti oleh tim kesayangan Anda.

Banyak informasi yang sering disajikan dalam bentuk tabel, diantaranya data rekening telepon, data tagihan listrik, data tabungan, harga penjualan barang, data absensi siswa dan lain-lain. Sebagai ilustrasi awal untuk memahami pengertian matriks, pelajari uraian berikut.

Diketahui data kunjungan wisatawan, baik domestik maupun asing di suatu objek wisata selama empat bulan berturut-turut, disajikan dalam tabel berikut (dalam ribuan).

Tabel 4.1. Jumlah kunjungan wisatawan domestik dan asing

Wisatawan \ Bulan	I	II	III	IV
Domestik	7	6	8	6
Asing	1	2	1	3

Berdasarkan Tabel 4.1, Anda pasti memperhatikan setiap keterangan yang ada terkait jumlah wisatawan domestik maupun asing dalam bentuk angka yang tertera pada tabel yang disusun letaknya berdasarkan baris dan kolom.

Tabel yang baru Anda baca dapat disederhanakan dengan menghilangkan keterangan-keterangan yang terdapat pada tabel, dan mengganti tabel dengan tanda kurung seperti berikut ini.

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Kini, data yang telah diubah bentuknya hanya terdiri atas bilangan-bilangan yang disusun menurut baris dan kolom. Bentuk baru seperti inilah yang dinamakan sebagai matriks.

Matriks merupakan kumpulan bilangan yang tersusun menurut baris dan kolom sedemikian sehingga tampak seperti bentuk sebuah persegipanjang.

Sebuah matriks memuat tanda kurung sebagai pembatas. Tanda kurung yang digunakan dapat berupa tanda kurung biasa ataupun tanda kurung siku. Pada umumnya, matriks diberi nama dengan memakai huruf kapital, seperti A,

B, C. Bilangan-bilangan yang menyusun sebuah matriks dinamakan unsur atau anggota dari matriks tersebut dan dinotasikan dengan huruf kecil berindeks yang menyatakan letak dari unsur tersebut dalam matriks (baris dan kolom).

Perhatikan kembali matriks pada uraian sebelumnya. Misalkan matriks tersebut adalah matriks A maka

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Pada matriks A, yang dimaksud dengan a_{23} adalah unsur dari matriks A yang berada pada baris kedua dan kolom ketiga, yaitu 1. Jika Anda perhatikan, matriks A terdiri atas 2 buah baris dan 4 buah kolom. Banyaknya baris dan kolom yang menyusun sebuah matriks dinamakan sebagai ordo atau ukuran matriks. Sehingga matriks A disebut sebagai matriks berordo 2×4.

Secara umum, matriks dengan m baris dan n kolom dapat disajikan sebagai berikut.

$$A_{m \times n} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{baris 1} \\ \longrightarrow \text{baris 2} \\ \\ \longrightarrow \text{baris } m \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \text{kolom 1} & \text{kolom 2} & & \text{kolom } n \end{array} \end{array}$$

Contoh Soal 4.1

Diketahui, matriks

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. ordo matriks B,

b. b_{12} dan b_{23},

c. banyaknya elemen pada matriks B.

Jawab:

a. Ordo dari matriks B adalah 2×3 karena matriks B terdiri dari 2 baris dan 3 kolom.

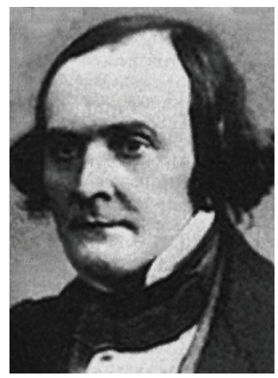
b. b_{12} artinya unsur matriks B yang terletak pada baris ke-1 dan kolom ke-2 sehingga $b_{12} = -4$.

b_{23} artinya unsur matriks B yang terletak pada baris ke-2 dan kolom ke-3 sehingga $b_{23} = -2$.

c. Matriks B memiliki 6 unsur.

*Info*Math

Arthur Cayley (1821–1895)



Teori tentang matriks pertama kali dikembangkan oleh Arthur Cayley (1821–1895) pada 1857. Sekarang, matriks telah menjadi alat yang berguna di berbagai bidang. Adapun metode determinan ditemukan oleh Seki Kowa (1642–1708) pada 1683 di Jepang dan ditemukan pula oleh Gottfried Wilhelm Von Leibnitz (1646–1716) di Jerman. Keduanya hanya menggunakan matriks dalam persamaan linear.

Sumber: *Finite Mathematics and It's Applications*, 1996

Contoh Soal 4.2

Tentukan matriks koefisien dari sistem persamaan linear berikut.

$-2x + y - z = 16$

$4x - y + 2z = 12$

$x + 2y - 3z = -9$

Jawab:

Matriks koefisien dari sistem persamaan tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Jenis-Jenis Matriks

Matriks terdiri atas berbagai jenis antara lain, matriks nol, matriks baris, matriks kolom, matriks persegi, matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, matriks diagonal, dan matriks identitas.

Agar Anda lebih memahami mengenai jenis matriks tersebut perhatikan uraian materi berikut.

a. Matriks Nol

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya bernilai nol, contohnya

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Semua unsur pada matriks A, B, dan C adalah angka 0, sehingga disebut sebagai matriks nol.

Tugas 4.1

Diskusikan dengan teman sebangku Anda.

1. Apakah matriks persegi merupakan matriks diagonal? Berikan alasannya.
2. Apakah matriks diagonal merupakan matriks persegi? Berikan alasannya.

b. Matriks Baris

Matriks baris adalah matriks yang hanya terdiri atas satu baris saja, contohnya

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 10 & -6 \end{bmatrix}$$

Matriks P berordo 1×3, Q berordo 1×2, dan R berordo 1×4. Matriks P, Q, dan R di atas hanya memiliki satu baris saja sehingga disebut sebaai matriks baris.

c. Matriks Kolom

Matriks kolom adalah matriks yang terdiri atas satu kolom, contohnya

$$K = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Matriks K berordo 2×1, matriks L beordo 3×1, dan matriks M berordo 4×1. Matriks K, L, dan M di atas hanya memiliki satu kolom saja sehingga disebut sebagai matriks kolom.

d. Matriks Persegi

Matriks persegi adalah matriks yang banyak baris dan banyak kolomnya sama, contohnya

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -12 \\ 6 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriks N berordo 2×2 dan matriks M berordo 3×3. Karena banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, maka matriks N dan M disebut sebagai matriks persegi.

e. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas adalah matriks persegi yang elemen di bawah diagonal utamanya bernilai nol, sebagai contohnya

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$ diagonal utama

f. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah adalah matriks persegi yang elemen di atas diagonal utamanya bernilai nol, contohnya

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

g. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks persegi yang elemen-elemennya bernilai nol, kecuali pada diagonal utamanya tidak selalu nol, sebagai contoh

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

h. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks skalar yang elemen-elemen pada diagonal utamanya bernilai 1,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Kesamaan Dua Matriks

Dalam matriks dikenal adanya kesamaan dua matriks yang didefinisikan sebagai berikut.

Dua matriks dikatakan sama jika ordo yang dimiliki keduanya sama, dan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak) sama.

Supaya Anda lebih memahami definisi tersebut, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.3

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & \frac{4}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solusi

Diketahui matriks

$$\begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ b & 2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2a & 2 & ab \end{bmatrix}$$

Nilai dari $a + b + c = ...$

a. 12 **d.** 18
b. 14 **e.** 20
c. 16

Jawab:

$a = 2$
$b = 2a$
$= 2 \cdot 2 = 4$
$c = a \cdot b$
$= 2 \cdot 4 = 8$
Nilai dari $a + b + c = 2 + 4 + 8 =$ **14**

Jawaban: **b**

Sumber: *UAN SMK* 2003

Tentukan apakah:

a. $A = B$, **c.** $A = D$.

b. $A = C$,

Jawab:

a. $A \neq B$ karena ordo matriks A tidak sama dengan ordo matriks B.

b. $A = C$ karena ordo matriks A sama dengan ordo matriks B dan elemen-elemen yang bersesuaian pada matriks A sama dengan elemen-elemen pada matriks C.

c. $A \neq D$ karena elemen-elemen yang bersesuaian pada kedua matriks tersebut ada yang tidak sama, yaitu $a_{22} \neq d_{22}$.

Contoh Soal 4.4

Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3x & -2 \\ 2y & 2 \end{bmatrix}$ dan $A = B$

maka tentukanlah nilai $x + y$.

Jawab:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & -2 \\ 2y & 2 \end{bmatrix}$$

Karena $A = B$ maka diperoleh

$3x = 3$ dan $2y = -4$

$x = 1$ $\quad$ $y = -2$

Dengan demikian, $x + y = 1 + (-2) = -1$

Jadi, nilai dari $x + y$ adalah -1.

4. Transpos Matriks

Dalam sebuah matriks A dimana A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, setiap baris dari matriks A dapat diubah menjadi kolom dan juga sebaliknya setiap kolom dari matriks A menjadi baris dari suatu matriks yang baru misalnya matriks B, maka matriks B disebut transpos dari matriks A, ditulis:

$B = A^T$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Contoh Soal 4.5

Jika $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. A^T

b. B^T

Solusi

Jika

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 2p \\ p+2q & 8 \\ 5 & r \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 6 & 8 & q-1 \end{bmatrix}$$

dan $P = Q^T$

maka nilai p, $2q$, dan $3r$ berturut-turut adalah ....

a. 1, 2, dan 3

b. 1, 4, dan 9

c. 3, 2, dan 1

d. 3, 4, dan 3

e. 3, 4, dan 4

Jawab:

$P = Q^T$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \\ 5 & q-1 \end{bmatrix}$$

$P = Q^T$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2p \\ p+2q & 8 \\ 5 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 8 \\ 5 & q-1 \end{bmatrix}$$

$2p = 6 \Leftrightarrow p = 3$

$p + 2q = 7 \Leftrightarrow 3 + 2q = 7$

$2q = 4$

$q = 2$

$r = q - 1 \Leftrightarrow r = 2 - 1 = 1$

Jadi, nilai dari $p = \mathbf{3}$, $2q = \mathbf{4}$ dan $3r = \mathbf{3}$.

Jawaban: **d**

Sumber: *UN SMK 2007*

Jawab:

a. $A=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ *maka* $A^T=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

b. $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ *maka* $B^T=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

Contoh Soal 4.6

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$R=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad S=\begin{bmatrix}5 & \frac{1}{2}x\\ 4y & -3\end{bmatrix}$$

Jika $R = S^T$, tentukan nilai $x + y$.

Jawab:

$$S=\begin{bmatrix}5 & \frac{1}{2}x\\ 4y & -3\end{bmatrix} \Rightarrow S^T=\begin{bmatrix}5 & 4y\\ \frac{1}{2}x & -3\end{bmatrix}$$

karena $R = S^T$ maka

$$\begin{bmatrix}5 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 4y\\ \frac{1}{2}x & -3\end{bmatrix}$$

Dari persamaan tersebut diperoleh

$$\frac{1}{2}x=4 \quad \text{dan} \quad 4y=2$$

$$x=8 \qquad\qquad y=\frac{1}{2}$$

dengan demikian, $x+y=8+\frac{1}{2}=8\frac{1}{2}$.

Jadi, nilai $x + y$ adalah $8\frac{1}{2}$.

Latihan Soal 4.1

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Diketahui matriks berikut.

$$B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1 & 5\\ -2 & 5 & 7 & 4\\ 3 & 8 & -1 & 7\end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. ordo matriks B,

b. elemen-elemen pada kolom ke-3 matriks B,

c. nilai dari b_{21} dan b_{34}.

2. Untuk setiap sistem persamaan linear berikut, tulislah matriks koefisiennya.

a. $\begin{cases}3x+y=-1\\ x-y=-3\end{cases}$

b. $\begin{cases}4x=28\\ 6x+5y=-3\end{cases}$

c. $\begin{cases}2x-y+z=2\\ x+y-z=-17\\ 4x+y-3z=6\end{cases}$

3. Diketahui

$$A=\begin{bmatrix}3p & 2\\ 4 & -5q\end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B=\begin{bmatrix}p+8 & 2\\ 4 & 30\end{bmatrix}$$

Jika $A = B$, tentukan nilai $p + q$.

4. Diketahui kesamaan matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ b & 2 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2a & 2 & ab \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai $a + b + c$.

5. Tentukan matriks transpos dari matriks-matriks berikut.

a. $P = \begin{bmatrix} 2a & c \\ b & -d \end{bmatrix}$

b. $R = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

c. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

6. Diketahui

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } L = \begin{bmatrix} 3 & -2x & 2 \\ 4 & -x+y & 6 \end{bmatrix}$$

Jika $K = L^T$, tentukan nilai dari x dan y yang memenuhi persamaan tersebut.

B. Operasi Aljabar pada Matriks

Sumber: *duniamusikinstrument.com*

Gambar 4.2
Menggambarkan sejumlah alat musik yang akan dibeli oleh SMK A dan B di suatu toko alat musik

Pada subbab sebelumnya, telah Anda pelajari mengenai pengertian, jenis-jenis, kesamaan, dan transpos dari suatu matriks. Pelajaran selanjutnya pada subbab ini adalah operasi aljabar pada matriks. Jadi, sama seperti pada bilangan, pada matriks pun berlaku sifat-sifat operasi aljabar.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Sebagai ilustrasi awal, supaya Anda lebih memahami penjumlahan pada matriks, pelajarilah uraian berikut.

Di sebuah kota terdapat dua SMK yang menyelenggarakan program kesenian khususnya gitar, piano, drum, dan biola. Berikut ini adalah tabel yang menyajikan jumlah alat-alat musik yang dimiliki oleh kedua sekolah tersebut.

Tabel 4.2. Jumlah alat-alat musik yang dimiliki SMK

	Gitar	Piano	Drum	Biola
SMK *A*	10	2	1	6
SMK *B*	8	3	1	9

Berdasarkan Tabel 4.2. di atas SMK A memiliki 10 gitar, 2 piano, 1 drum, dan 6 biola. SMK B memiliki 8 gitar, 3 piano, 1 drum, dan 9 biola. Dikarenakan pada tahun ajaran baru ini kedua SMK tersebut menambah daya tampung siswanya sedemikian rupa sehingga alat-alat musik yang diperlukan untuk kegiatan belajar-mengajar pun perlu ditambah. Oleh karena itu, kedua SMK tersebut melakukan pembelian alat-alat musik baru untuk melengkapi kekurangan alat-alat musik pada masing-masing SMK. Daftar jumlah pembelian alat-alat musik baru yang dibeli oleh kedua SMK tersebut disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 4.3. Jumlah alat-alat musik yang di beli SMK

	Gitar	Piano	Drum	Biola
SMK *A*	5	6	3	11
SMK *B*	4	4	2	7

Berdasarkan tabel 4.2. diketahui bahwa SMK A membeli 10 gitar, 2 piano, 7 drum, dan 6 biola, sedangkan SMK B memiliki 4 gitar, 4 piano, 2 drum dan 7 biola.

Setelah adanya penambahan alat-alat musik tersebut, dapatkah Anda menentukan banyaknya alat-alat musik menurut jenisnya di masing-masing SMK tersebut? Dapat dipastikan Anda dapat menjawab pertanyaan tersebut karena Anda hanya tinggal menjumlahkan masing-masing banyaknya alat musik pada setiap SMK, menurut jenis alat musiknya. Proses penjumlahan pada kedua tabel tersebut sama dengan proses penjumlahan ataupun pengurangan pada matriks. Elemen-elemen yang dijumlahkan ataupun dikurangkan harus sejenis dan pada sumber yang sama (misalnya, banyaknya gitar pada SMK *A* pasti ditambahkan dengan banyak gitar yang dibeli oleh SMK *A*).

Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila ordo dari kedua matriks tersebut sama. Operasi penjumlahan dan pengurangan pada matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak).

Jika kedua data pada tabel Anda ubah ke dalam bentuk matriks, Anda akan memperoleh matriks A dan B berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 11 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Jika matriks A dan matriks B dijumlahkan, diperoleh

$$A + B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 11 \\ 4 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+5 & 2+6 & 1+3 & 6+11 \\ 8+4 & 3+4 & 1+2 & 9+7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 8 & 4 & 17 \\ 12 & 7 & 3 & 16 \end{bmatrix}$$

Dan jika matriks A dikurangi matriks B, diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 1 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 11 \\ 4 & 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10-5 & 2-6 & 1-3 & 6-11 \\ 8-4 & 3-4 & 1-2 & 9-7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 & -5 \\ 4 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tugas 4.2

Misalkan,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

dan $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Hitung:

a. $(A + B)$
b. $(B + A)$
c. $(A - B)$
d. $(B - A)$
e. $(B + C)$
f. $(A + B) + C$
g. $A + (B + C)$

Dari hasil yang Anda peroleh, apa yang dapat Anda simpulkan?

Contoh Soal 4.7

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. $A + C$

b. $B - D$

c. $A + B$

d. $D - A$

Jawab:

a. $$A + C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5+(-3) & 1+4 \\ -2+2 & 0+1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. $$B - D = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3-3 & -5-2 & 1-0 \\ 2-(-3) & -2-1 & -3-7 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 5 & -3 & -10 \end{bmatrix}$$

c. Pada matriks A dan matriks B tidak dapat dilakukan operasi penjumlahan karena ordo matriks A tidak sama dengan ordo matriks B.

d. Pada matriks D dan matriks A tidak dapat dilakukan operasi pengurangan karena ordo matriks D tidak sama dengan ordo matriks A.

Tugas 4.3

Misalkan,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$p = 2$ dan $q = 3$

Hitung:

a. $(p + q)\, A$ dan $pA + qA$

b. $p\,(A + B)$ dan $pA + pB$

c. $p\,(qA)$ dan $(pq)\, A$

Dari hasil yang Anda peroleh, apa yang dapat Anda simpulkan?

2. Perkalian Skalar dengan Matriks

Jika A adalah suatu matriks dan k adalah bilangan riil maka kA adalah matriks baru yang elemen-elemennya diperoleh dari hasil perkalian k dengan setiap elemen pada matriks A. Supaya Anda lebih memahaminya, pelajari contoh berikut dengan baik.

Contoh Soal 4.8

Diketahui:

$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. $2A$

b. $3B$

c. $2(A + B)$

Jawab:

a. $$2A = 2 \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) & 2(2) \\ 2(5) & 2(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

b. $$3B = 3 \cdot \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(-8) & 3(3) \\ 3(7) & 3(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 9 \\ 21 & -6 \end{bmatrix}$$

e. $$2(A+B) = 2\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} -11 & 5 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-22} & \mathbf{10} \\ \mathbf{24} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$$

3. Perkalian Matriks

Dua buah matriks A dan B dapat dikalikan, jika banyak kolom pada matriks A sama dengan banyak baris pada matriks B. Elemen-elemen pada matriks $A \times B$ diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen baris pada matriks A dengan elemen kolom pada matriks B. Sebagai contoh, diberikan matriks A dan matriks B sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka } A \times B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{bmatrix}$$

Supaya Anda lebih memahami perkalian matriks, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.9

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. $P \times Q$

b. $Q \times P$

c. $P \times R$

d. $R \times P$

Jawab:

a. $$P \times Q = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-3 & 4+6 \\ -12-5 & -8+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -17 & 2 \end{bmatrix}$$

b. $$Q \times P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-8 & 9+10 \\ -2-8 & -3+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 19 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}$$

c. $$P \times R = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12 & 0-6 & -2-9 \\ -4+20 & 0-10 & 4-15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -6 & -11 \\ 16 & -10 & -11 \end{bmatrix}$$

d. Hasil kali matriks R dan matriks P tidak ada karena banyak kolom pada matriks R tidak sama dengan banyak baris pada matriks P.

Tugas 4.4

Misalkan,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Hitung:

a. AB, BA, dan BC

b. (AB) C dan A (BC)

c. $(B + C)$ dan AC

d. $A\,(B + C)\,A$ dan $(BA + CA)$

e. $(B + C)\,A$ dan $(BA + CA)$

Dari hasil yang Anda peroleh, apa yang dapat Anda simpulkan?

4. Perpangkatan Matriks Persegi

Sifat perpangkatan pada matriks, sama halnya seperti sifat perpangkatan pada bilangan-bilangan, untuk setiap a bilangan riil, berlaku

$$a^2 = a \times a$$

$$a^3 = a \times a \times a$$

$$\vdots$$

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{sebanyak } n \text{ faktor}}$$

Pada matriks pun berlaku hal yang sama untuk setiap matriks persegi A berlaku

$$A^2 = A \times A$$

$$A^3 = A \times A \times A$$

$$\vdots$$

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{\text{sebanyak } n \text{ matriks}}$$

Supaya Anda memahami materi perpangkatan matriks, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.10

Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. A^2 dan A^3

b. $3A^2 - 2A^3$

Jawab:

a. $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$

$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-5} & \mathbf{3} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$

b. $3A^2 - 2A^3 = 3\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 6 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \mathbf{19} & \mathbf{-9} \\ \mathbf{-18} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$

Solusi

Diketahui matriks

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Matriks

$5A - B^2$ adalah....

a. $\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 13 & 16 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 15 & 16 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 21 & 4 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$

Jawab:

$5A - B^2$

$5\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{13} & \mathbf{4} \\ \mathbf{13} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$

Jawaban: **c**

Sumber: *UN SMK* 2004

Contoh Soal 4.11

Diketahui matriks-matriks

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } Q = \begin{bmatrix} 2x & y \\ -3z & -w \end{bmatrix}$$

Tentukan nilai-nilai w, x, y, dan z sedemikian rupa hingga dipenuhi persamaan $2P^2 = Q$.

Jawab:

$$2P^2 = Q$$

$$2P \times P = Q$$

$$2\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & y \\ -3z & -w \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & y \\ -3z & -w \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & y \\ -3z & -w \end{bmatrix}$$

Dengan memperhatikan elemen-elemen seletak pada kedua matriks, maka diperoleh

$-w = 8 \Leftrightarrow w = -8$

$2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

$y = 0$

$-3z = 4 \Leftrightarrow z = -\frac{4}{3}$

Jadi, nilai w, x, y, dan z yang memenuhi persamaan $2P^2 = Q$ berturut-turut adalah –8, 1, 0, dan $-\frac{1}{4}$.

Latihan Soal 4.2

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Carilah hasil operasi matriks berikut.
   - a. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
   - b. $\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$
   - c. $2\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
   - d. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
2. Jika $2\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 22 \end{bmatrix}$, tentukan nilai k.
3. Carilah matriks P yang memenuhi persamaan
   $2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} + 3P = 4\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$
4. Diketahui matriks-matriks berikut.
   $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$
   Tentukan:
   - a. $A + B$
   - b. $2A - 3B$
   - c. $AB + AC$
   - d. $A(B + C)$
5. Diketahui matriks-matriks berikut.
   $X = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
   Tentukan:
   - a. $2X + Y$
   - b. $X^3 + 2XY$

C. Determinan dan Invers Matriks

1. Determinan

Pada Subbab A Anda telah dikenalkan pada matriks persegi, yaitu matriks yang jumlah baris dan jumlah kolomnya sama. Pada bagian ini, Anda akan dikenalkan pada determinan dari suatu matriks persegi.

a. Determinan Matriks 2 × 2

Misalkan A adalah matriks persegi ordo 2×2 berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks A didefinisikan sebagai selisih antara hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dengan hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder.

Determinan dari matriks A dinotasikan dengan det A atau $|A|$. Berdasarkan definisi determinan, diperoleh determinan dari matriks A sebagai berikut.

diagonal sekunder

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \times d) - (b \times c) = ad - bc$$

diagonal utama

Info Math

Seki Kowa atau Seki Takakazu (1637–1708) adalah seorang matematikawan dari Jepang yang menciptakan sistem notasi baru matematika yang digunakan di banyak teorema dan teori. Sumbangan terkenal dari Seki pada aljabar adalah menemukan determinan. Beliau hanya dapat menyelesaikan matriks ordo 2 × 2 dan 3 × 3, dan gagal untuk ordo yang lebih tinggi. Akan tetapi, muridnya, yaitu Laplace berhasil menyelesaikan unsur untuk matriks ordo yang lebih tinggi yang digunakan untuk mengeliminasi variabel pada sistem persamaan.

Sumber: *en.wikipedia.org*

Contoh Soal 4.12

Tentukan nilai determinan dari matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4 \times (-1)) - (-3 \times 2) = 4 + 6 = 10$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -4 \end{vmatrix} = (4 \times (-4)) - (-7 \times 2) = -16 + 14 = -2$$

Contoh Soal 4.13

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} x & 5 \\ 4 & 2x \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Jika det A = det B, tentukan nilai-nilai x yang memenuhi persamaan tersebut.

Jawab:

$$\det A = \begin{vmatrix} x & 5 \\ 4 & 2x \end{vmatrix} = (2x)(x) - 4(5) = 2x^2 - 20$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 8(4) - (-4)(-4) = 16$$

Karena det A = det B maka

$$\begin{aligned} 2x^2 - 20 &= 16 \\ 2x^2 &= 32 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Jadi, nilai-nilai x yang memenuhi persamaan tersebut adalah **–4** dan **4**.

b. Determinan Matriks 3 × 3

Misalkan, A matriks persegi berordo 3 × 3 berikut ini.

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai determinan dari matriks A yang berordo 3 × 3, digunakan Metode Sarrus. Adapun langkah-langkah Metode Sarrus adalah sebagai berikut.

1) Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua dari matriks A kemudian diletakkan di sebelah kanan tanda determinan.

2) Hitung jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama. Nyatakan jumlah tersebut sebagai D_1.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$D_1 = (a)(e)(i) + (b)(f)(g) + (c)(d)(h)$

3) Hitung jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder. Nyatakan jumlah tersebut sebagai D_2.

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$D_2 = (g)(e)(c) + (h)(f)(a) + (i)(d)(b)$

4) Determinan dari matriks A adalah pengurangan D_1 oleh D_2, maka det $A = D_1 - D_2$

$$\det A = \left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$= (a)(e)(i) + (b)(f)(g) + (c)(d)(h) - (g)(e)(c) - (h)(f)(a) - (i)(d)(b)$

$= D_1 - D_2$

Berdasarkan nilai diskriminannya suatu matriks dibedakan menjadi 2 jenis yaitu matriks **singular** dan matriks non singular. Matriks singular adalah matriks yang determinannya nol, sedangkan matriks non **singular** adalah matiks yang determinannya tidak sama dengan nol.

Solusi

Determinan dari matriks

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ adalah ...

a. –22 **d.** 2
b. –12 **e.** 12
c. –2

Jawab:

Gunakan aturan Sarrus

$$\det A = |A| = \left|\begin{matrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$= (5)(1)(0) + (3)(-2)(2) + (0)(0)(-1)$
$\quad - (2)(1)(0) - (-1)(-2)(5) - (0)(0)(3)$
$= -22$

Jawaban: **a**

Sumber: *UN SMK* 2007

Contoh Soal 4.14

Tentukan nilai determinan dari matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$$= \left[\left(-1\times(-3)\times 3\right) + \left(2\times 1\times 0\right) + \left(5\times 4\times 2\right)\right] -$$
$$\left[\left(0\times(-3)\times 5\right) + \left(2\times 1\times(-1)\right) + \left(3\times 4\times 2\right)\right]$$
$$= [9+0+40] - [0-2+24]$$
$$= \mathbf{27}$$

Tugas 4.5

Misalkan,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Hitung:

a. AB dan BA

b. A^{-1} dan B^{-1}

c. $(AB)^{-1}$ dan $(BA)^{-1}$

d. $A^{-1}\,B^{-1}$

e. $B^{-1}\,A^{-1}$

Dari hasil yang Anda peroleh, apa yang dapat Anda simpulkan?

2. Invers Matriks

Pada aljabar bilangan, Anda telah mengenal bahwa jika suatu bilangan dioperasikan dengan invers perkaliannya maka akan diperoleh unsur identitas. Begitu pula dalam matriks, jika suatu matriks dikalikan dengan inversnya maka akan diperoleh matriks identitas. Supaya Anda lebih memahami pernyataan tersebut, pelajari ilustrasi berikut.

Misalkan, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ maka

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-8 & -6+6 \\ 12-12 & -8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena perkalian antara matriks A dan matriks B menghasilkan matriks identitas maka dapat Anda simpulkan bahwa matriks A dan matriks B saling invers. Hal ini berarti matriks B merupakan matriks invers dari matriks A (dutulis $B = A^{-1}$) atau matriks A merupakan matriks invers dari matriks B (dutulis $A = B^{-1}$). Dengan demikian Anda dapat menyatakan sebagai berikut: Jika A dan B dua matriks persegi yang berordo sama dan memenuhi persamaan $AB = BA = I$ maka matriks A adalah matriks invers dari B atau matriks B adalah matriks invers dari matriks A.

Contoh Soal 4.15

Diketahui matriks-matriks berikut.

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } K = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawablah pertanyaan berikut ini.

a. Apakah matriks H merupakan matriks invers dari matriks G?

b. Apakah matriks K merupakan matriks invers dari matriks G?

Jawab:

a. Matriks H merupakan matriks invers dari matriks G jika memenuhi persamaan $GH = I$.

$$GH = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-7 & -2+2 \\ 28-28 & -7+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Karena $GH = I$, maka matriks H merupakn invers dari matriks G.

b. Matriks K merupakan matriks invers dari matriks G, jika memenuhi persamaan $GK = I$.

$$GK = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+7 & 2+2 \\ 28+28 & 7+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 56 & 15 \end{bmatrix} \neq I$$

Karena $GK \neq I$ maka matriks K bukan invers dari matriks G.

Sebelum Anda mempelajari invers matriks lebih lanjut ada konsep yang terlebih dahulu harus Anda pahami yaitu bagaimana cara menentukan invers dari suatu matriks.

a. Adjoin Matriks Berordo 2 × 2

Adjoin dari matriks berordo 2 × 2 diperoleh dengan cara menukar elemen pada diagonal utama dan elemen pada diagonal sekunder dikalikan dengan (–1).

Misalkan, jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka adjoin $A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Contoh Soal 4.16

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan adjoin dari matriks A.

Jawab:

$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ maka adjoin $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

Jadi, adjoin matriks A adalah $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

b. Minor, Kofaktor, dan Adjoin matriks

1) Minor

Misalkan matriks A berordo 3 × 3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Jika baris ke-1 dan kolom ke-2 dari matriks tersebut dihilangkan maka akan diperoleh matriks baru dengan ordo 2 × 2, determinan dari matriksnya dinamakan minor. Karena kita menghilangkan baris kesatu dan kolom kedua maka minor tersebut dinamakan minor dari baris ke-1 kolom ke-2 yang dilambangkan oleh M_{12}. Dari matriks A di atas maka minor-minor dari matriks tersebut adalah

- Minor dari baris ke-1 kolom ke-1 adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{33} - a_{32}a_{23}$
- Minor dari baris ke-2 kolom ke-1 adalah $M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\,a_{33} - a_{32}a_{13}$
- Minor dari baris ke-3 kolom ke-1 adalah $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}\,a_{33} - a_{32}a_{13}$
- Minor dari baris ke-1 kolom ke-2 adalah $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}\,a_{33} - a_{31}a_{23}$

- Minor dari baris ke-2 kolom ke-2 adalah $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{33} - a_{31}a_{13}$
- Minor dari baris ke-3 kolom ke-2 adalah $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{12}\,a_{23} - a_{22}a_{13}$
- Minor dari baris ke-1 kolom ke-3 adalah $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}\,a_{32} - a_{31}a_{22}$
- Minor dari baris ke-2 kolom ke-3 adalah $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{32} - a_{31}a_{12}$
- Minor dari baris ke-3 kolom ke-3 adalah $M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}a_{12}$

Diperoleh matriks minor dari matriks *A* adalah sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

2) Kofaktor

Jika M_{ij} merupakan minor ke-*ij* dari matriks *A* maka kofaktor adalah hasil perkalian elemen minor M_{ij} dengan $(-1)^{i+j}$. Dengan demikian, $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ Sehingga diperoleh matriks *kofaktor* dari matriks *A* adalah

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

3) Adjoin Matriks

Jika kofaktor dari matriks A tersebut di transposkan, maka didapat matriks baru yang disebut sebagai Adjoin A. Ditulis:

$$\text{Adj A} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{12} & K_{22} & K_{32} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh Soal 4.17

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Tentukan:

a. minor matriks A,

b. kofaktor matriks A,

c. adjoin A.

Jawab:

a. Menentukan minor.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 1 = -3$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 9 = -13$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 6 = 7$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5$$

Berdasarkan nilai-nilai minor di atas maka matriks minornya adalah

$$\begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-13} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-5} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

b. Menentukan matriks kofaktor.

$K_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 1 \cdot (-3) = -3$

$K_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1) \cdot 1 = -1$

$K_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = 1 \cdot (-5) = -5$

$K_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)(-1) = 1$

$K_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot (-13) = -13$

$K_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1) \cdot 5 = -5$

$K_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = 1 \cdot (-5) = -5$

$K_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1) \cdot (-5) = 5$

$K_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 1 \cdot 5 = 5$

Sehingga, matriks kofaktor A adalah $\begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{-1} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-13} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$.

c. Menentukan adjoin.

Adjoin merupakan transpos dari matriks kofaktor sehingga diperoleh.

$$\text{Adjoin } A = \begin{bmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-13} & \mathbf{5} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{-5} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$$

c. Invers Matriks Berordo 2 × 2

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ merupakan matriks yang memiliki invers yaitu matriks yang memiliki nilai determinan tidak nol (matriks ini disebut matriks non-singular) maka invers dari A yaitu A^{-1} dinyatakan

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ Adjoin } A}$$

Contoh Soal 4.18

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -11 & -3 \end{bmatrix}$, tentukan invers dari matriks A.

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -11 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -11 & -3 \end{vmatrix} = -12 + 11 = -1$$

$$A = \frac{1}{\det A} \text{Adjoin } A$$

$$= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= -1 \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -11 & -4 \end{bmatrix}$$

Jadi, invers dari matriks A adalah $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -11 & -4 \end{bmatrix}$.

Contoh Soal 4.19

Diketahui matriks-matriks berikut.

$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ dan $Q = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

Tentukan invers dari matriks-matriks tersebut jika ada.

Jawab:

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Periksa nilai determinan dan matriks P

$$\det P = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 20 = 1$$

karena $\det P \neq 0$ maka **matriks P memiliki invers**

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{ Adjoin } P = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

- $Q = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

Periksa nilai determinan dari matriks Q

$$\det Q = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$$

Karena $\det Q = 0$ maka **matriks Q tidak memiliki invers**.

Catatan

A^{-1} terdefinisi jika $\det A \neq 0$ artinya matriks A memiliki invers jika matriks A memiliki determinan yang tidak sama dengan nol.

d. Invers Matriks Berordo 3 × 3

Misalkan, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ merupakan matriks yang memiliki invers, dengan det $A \neq 0$ maka invers dari A, yaitu A^{-1} dinyatakan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ Adjoin } A$$

Contoh Soal 4.20

Tentukan invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{matrix} = -8 + 3 + 3 - 18 + 2 - 2 = -20$$

Berdasarkan Contoh Soal 4.17 diperoleh

$$\text{Adjoin } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & -13 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{ Adjoin } A = \frac{1}{-20}\begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ -1 & -13 & 5 \\ -5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} & \frac{13}{20} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Jadi, invers matriks A adalah $\begin{bmatrix} \frac{3}{20} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} & \frac{13}{20} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Contoh Soal 4.21

Diketahui matriks-matriks

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

a. $R^{-1} S$

b. $(RS)^{-1}$

Anda Pasti Bisa

Jika

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

maka $(A \cdot B^{-1})^{-1} = ...$

a. $\begin{bmatrix} 7 & 23 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 23 & 13 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 23 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 13 & 11 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 13 \end{bmatrix}$

Sumber: *UMPTN*, 1999

Jawab:

a. $R=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} maka\ R^{-1}=\dfrac{1}{\det R}Adjoin\,R=\dfrac{1}{-1-0}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$R^{-1}S=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

$Jadi, R^{-1}S=\begin{bmatrix}-7 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}.$

b. $RS=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$

$(RS)^{-1}=\dfrac{1}{0\quad 2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -7\end{bmatrix}$

$=-\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -7\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{2}\\ -1 & \dfrac{7}{2}\end{bmatrix}$

$Jadi, (RS)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{2}\\ -1 & \dfrac{7}{2}\end{bmatrix}.$

Latihan Soal 4.3

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Tentukan nilai determinan dari matriks-matriks berikut.

   a. $\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix}4 & 7\\ 5 & 9\end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix}7 & 11\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix}3 & 2 & -5\\ -1 & 1 & 7\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$

   e. $\begin{bmatrix}5 & 7 & 9\\ -2 & -8 & -1\\ 6 & 4 & 0\end{bmatrix}$

2. Tentukan apakah matriks-matriks berikut memiliki invers.

   a. $P=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

   b. $Q=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 14 & 7\end{bmatrix}$

   c. $R=\begin{bmatrix}-5 & -3\\ 10 & 6\end{bmatrix}$

   d. $S=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 2\\ 2 & -7 & 6\\ -3 & 5 & -8\end{bmatrix}$

3. Diketahui $P=\begin{bmatrix}-11 & -8\\ 2-x & 6\end{bmatrix}$ dan $Q=\begin{bmatrix}-2 & -9\\ 8 & 7\end{bmatrix}$

   Jika det P = det Q, tentukan nilai x.

4. Tentukan minor dan kofaktor dari matriks-matriks berikut.

   a. $\begin{bmatrix}-2 & 4 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 7 & 0 & 1\end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix}-3 & 2 & 7\\ -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$

5. Tentukan invers dari matriks-matriks berikut.

   a. $\begin{bmatrix}-5 & 7\\ -2 & 3\end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix}-3 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 0\end{bmatrix}$

   d. $\begin{bmatrix}4 & 7 & -9\\ -2 & 6 & -1\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$

6. Diketahui matriks-matriks berikut.

   $A=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

   Tentukan:

   a. AB^{-1}

   b. $(AB)^{-1}$

D. Aplikasi Matriks dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Pada Bab III Anda telah mempelajari metode penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan metode substitusi eliminasi. Pada subbab ini, Anda akan mempelajari metode lain dengan menggunakan matriks. Namun sebelumnya, Anda akan diperkenalkan dahulu bagaimana menyelesaikan persamaan $AX = B$ dan $XA = B$.

1. Penyelesaian Persamaan Matriks $AX = B$ dan $XA = B$

Dalam menyelesaikan persamaan matriks $AX = B$ dan $XA = B$, digunakan konsep invers matriks yang telah Anda pelajari pada **Subbab C**. Dalam hal ini konsep yang Anda gunakan adalah $A^{-1}A = I = AA^{-1} = I$

Jika A dan B merupakan matriks berordo sama, dengan A matriks non singular bagaimanakah cara mencari matriks X yang memenuhi persamaan $AX = B$ dan $XA = B$. Untuk mengetahuinya, pelajarilah uraian berikut dengan baik.

a. Persamaan $AX = B$

$AX = B$

$A^{-1}AX = A^{-1}B$ (kedua ruas dikalikan dengan invers matriks A dari kiri)

$IX = A^{-1}B$ $(AA^{-1} = I)$

$X = BA^{-1}$ $(IX = X)$

Jadi, persamaan $AX = B$ dapat diselesaikan dengan $X = A^{-1}B$

b. Persamaan $XA = B$

$XA = B$

$XAA^{-1} = BA^{-1}$ (kedua ruas dikalikan dengan invers matriks A dari kanan)

$XI = BA^{-1}$ $(AA^{-1} = I)$

$X = BA^{-1}$ $(XI = X)$

Jadi, persamaan $XA = B$ dapat diselesaikan dengan $X = BA^{-1}$

Supaya Anda lebih memahami maksudnya, pelajari contoh soal berikut.

Contoh Soal 4.22

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan matriks X yang memenuhi persamaan

a. $AX = B$

b. $XA = B$

Jawab:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } \det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5(1) - 4(1) = 1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

a. $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

b. $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 11 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Solusi

Matriks X berordo (2×2) yang memenuhi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. $\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 12 & 10 \\ -10 & -8 \end{bmatrix}$

Jawab:

Misal, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$AX = B$ maka $X = A^{-1}B$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{1}B$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{-6} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

Jawaban: **a**

Sumber: *UAN 2005*

2. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan Invers Matriks

Salah satu metode dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel adalah dengan menggunakan invers matriks. Perhatikan bentuk umum dari SPL berikut:

$a_1x + b_1y = c_1$
$a_2x + b_2y = c_2$

Bentuk di atas dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks koefisien dengan variabelnya, yaitu:

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dengan $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ merupakan matriks koefisien.

Berikut adalah langkah-langkah dalam menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan invers matriks.

a. Nyatakan sistem persamaan linear tersebut ke dalam bentuk matriks.
b. Tentukan matriks koefisien dari sistem persamaan linear tersebut.
c. Tentukan invers dari matriks koefisien.
d. Gunakan konsep persamaan $AX = B$ atau $XA = B$.

Supaya Anda memahami langkah-langkah tersebut, perhatikan contoh soal berikut.

Solusi

Jika $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

maka $x + 2y$ ....

a. 6 **d.** 3
b. 5 **e.** 2
c. 4

Jawab:

Misal,

$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 4$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

$x = A^{-1}B$

$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

maka $x + y = 2 + 2 = \mathbf{4}$

Jawaban: **c**

Sumber: *UAN* 2003

Contoh Soal 4.23

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode invers matriks.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Jawab:

Langkah 1

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, misal $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, dan $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Langkah 2

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ maka $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ Adjoin $A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Langkah 3

$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

diperoleh $x = 1$ dan $y = 2$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(1, 2)\}$.

Contoh Soal 4.24

Zoel dan Ade pergi ke kios pulsa. Zoel membeli 3 buah kartu perdana *A* dan 2 buah kartu perdana *B*. Untuk itu Zoel harus membayar Rp53.000,00. Ade membeli 2 buah kartu perdana *A* dan sebuah kartu perdana *B*, untuk itu Ade harus membayar Rp32.500,00. Misalkan, harga sebuah kartu perdana

A adalah *x* rupiah dan harga sebuah kartu perdana *B* adalah *y* rupiah. Tentukan penyelesaian dari masalah tersebut.

Jawab:

Buatlah Tabel untuk masalah tersebut

	Kartu Perdana *A*	Kartu Perdana *B*	Jumlah
Zoel	3	2	53.000
Ade	2	1	32.500

Harga sebuah kartu perdana *A* adalah *x* rupiah

Harga sebuah kartu perdana *B* adalah *y* rupiah

Sistem persamaan linear dari masalah tersebut adalah

$$\begin{cases} 3x + 2y = 53.000 \\ 2x + y = 32.500 \end{cases}$$

Bentuk matriks dari sistem persamaan linear tersebut adalah

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 53.000 \\ 32.500 \end{bmatrix}}_{B}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adjoin } A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 53.000 \\ 32.500 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -53.500 + 65.000 \\ 106.000 - 97.500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12.000 \\ 8.500 \end{bmatrix}$$

Diperoleh, $x = 12.000$ dan $y = 8.500$.

Jadi, harga sebuah kartu perdana *A* adalah Rp12.000,00 dan harga kartu perdana *B* adalah Rp8.500,00.

3. Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Dua Variabel dengan Aturan Cramer

Determinan yang telah Anda pelajari di **Subbab C**, selain digunakan mencari invers dari suatu matriks, dapat pula digunakan dalam mencari penyelesaian sistem persamaan linear dua variabel.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sistem persamaan linear tersebut jika diselesaikan akan diperoleh nilai-nilai *x* dan *y* sebagai berikut.

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Bentuk-bentuk $(c_1b_2 - c_2b_1)$, $(a_1b_2 - a_2b_1)$ dan $(a_1c_2 - a_2c_1)$ jika dinyatakan dalam bentuk determinan adalah sebagai berikut.

$$c_1b_2 - c_2b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$a_1c_2 - a_2c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Dengan demikian nilai x dan nilai y jika dinyatakan dalam bentuk determinan adalah sebagai berikut.

$$\boxed{x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}}$$

atau

$$\boxed{x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}}$$

dengan:

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ yaitu determinan dari matriks koefisien x dan y.

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ yaitu determinan dari matriks koefisien x dan y yang kolom pertamanya diganti oleh konstanta c_1 dan c_2.

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ yaitu determinan dari matriks koefisien x dan y yang kolom keduanya diganti oleh konstanta c_1 dan c_2.

Anda Pasti Bisa

Dengan menggunakan metode determinan. Tentukan nilai $x - y$ jika $\begin{cases} 4x - 3y = -3 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$

Sumber: *UMPTN* 1999

Berdasarkan uraian tersebut maka diperoleh kesimpulan berikut:
Jika diberikan sistem persamaan linear dua variabel

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Sistem persamaan linear tersebut memiliki penyelesaian

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ dan } y = \frac{D_y}{D}, \text{ dengan } D \neq 0$$

dimana

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \; D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ dan } D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Contoh Soal 4.25

Tentukan himpunan penyelesaian sistem persamaan linear pada Contoh Soal 4.23 dan Contoh Soal 4.24 dengan menggunakan Aturan Cramer.

Jawab:

Dari **Contoh Soal 4.23** diketahui sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -x - 2y = 3 \end{cases}$$

Tentukan terlebih dahulu nilai D, D_x, dan D_y.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8 - (-9) = 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

Dengan demikian diperoleh

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(1, 2)\}$.

Dari Contoh Soal 4.24 diketahui sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 53.000 \\ 2x + y = 32.500 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 53.000 & 2 \\ 32.500 & 1 \end{vmatrix} = 53.000 - 65.000 = -12.000$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 53.000 \\ 2 & 32.500 \end{vmatrix} = 97.500 - 106.000 = -8.500$$

Dengan demikian, diperoleh

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-12.000}{-1} = 12.000$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-8.500}{-1} = 8.500$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{(12.000, 8.500)\}$.

Latihan Soal 4.4

Kerjakanlah soal-soal berikut.

1. Jika P matriks berordo 2×2, tentukan matriks P yang memenuhi
   a. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$
   b. $P \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 15 & -26 \end{bmatrix}$
2. Jika p dan q memenuhi persamaan
   $$\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -3 \end{bmatrix}$$
   Tentukan nilai-nilai dari
   a. $(p + q)^2$
   b. $2p^2 + pq$
3. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan metode invers matriks.
   a. $\begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ 2x - 5y = -5 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 5x + 3y = 11 \end{cases}$
4. Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut dengan menggunakan Aturan Cramer.
   a. $\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases}$
   b. $\begin{cases} -7x + 5y = -3 \\ \frac{7}{2}x - 4y = -6 \end{cases}$

5. Pak Heru bekerja selama 5 hari dengan 3 hari diantaranya lembur, untuk itu ia mendapat upah Rp285.000,00. Pak Heri bekerja selama 4 hari dan selama 4 hari tersebut ia lembur, untuk itu ia mendapat upah Rp260.000,00. Jika Pak Heru, Pak Heri, dan Pak Willi bekerja pada perusahaan yang sama, berapakah upah yang diperoleh Pak Willi jika bekerja selama 5 hari dan 2 hari diantaranya lembur?

Rangkuman

1. Matriks merupakan kumpulan bilangan yang tersusun menurut baris dan kolom sedemikian sehingga tampak seperti bentuk sebuah persegipanjang.
2. Jika matriks A mempunyai m baris dan n kolom maka matriks berordo $m \times n$ dan ditulis $A_{m \times n}$.
3. Dua matriks dikatakan sama jika ordo yang dimiliki keduanya sama dan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak) sama.
4. Transpos dari matriks A adalah matriks baru yang disusun dengan cara mengubah setiap baris menjadi kolom juga sebaliknya setiap kolom menjadi baris.
5. Dua buah matriks dapat dijumlahkan atau dikurangkan apabila ordo dari kedua matriks tersebut sama. Penjumlahan dan pengurangan pada matriks dilakukan dengan cara menjumlahkan atau mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian (seletak).
6. Jika A adalah suatu matriks dan k adalah bilangan riil maka kA adalah suatu matriks baru yang elemen-elemennya diperoleh dari hasil perkalian k dengan setiap elemen pada matriks A.
7. Perkalian matriks A dan matriks B diperoleh dari penjumlahan hasil kali elemen baris pada matriks A dengan elemen kolom pada matriks B.
8. Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka det $A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
9. Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka

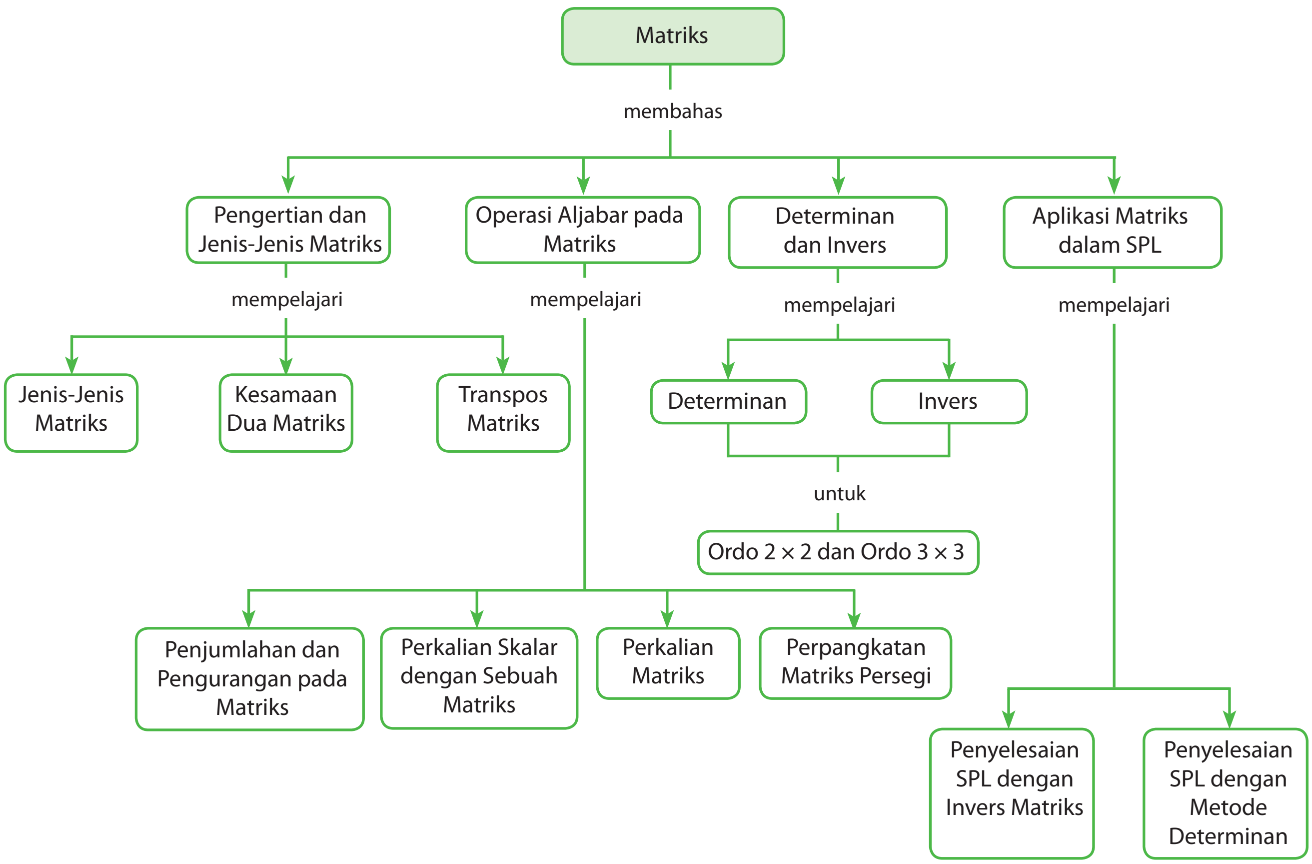
   $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$.
10. Jika $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka invers dari A, yaitu A^{-1} dinyatakan dengan $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
11. Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka invers dari A, yaitu A^{-1} dinyatakan dengan $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\text{Adj}\,A$.
12. Invers matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dua variabel dengan menggunakan konsep $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ atau $XA = B \Leftrightarrow X = BA^{-1}$ jika A mempunyai invers.
13. Penyelesaian persamaan linear dua variabel dengan Aturan Cramer.

   $x = \dfrac{D_x}{D}$ dan $y = \dfrac{D_y}{D}$, $D \neq 0$

   dimana $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, dan $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Alur Pembahasan

Perhatikan alur pembahasan berikut:
Materi tentang Matriks dapat digambarkan sebagai berikut.



Kata Mutiara

Sai Baba

Ada dua hal yang harus Anda lupakan: kebaikan yang Anda lakukan kepada orang lain dan kesalahan orang lain kepada Anda

Latihan Soal Bab 4

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Diketahui matriks $H = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

   Matriks H merupakan matriks, *kecuali* ....

   a. Matriks skalar
   b. Matriks diagonal
   c. Matriks identitas
   d. Matriks persegi
   e. Matriks ordo 2 × 2

   Alasan: ______________________

2. Transpos dari matriks $M = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah ....

   a. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$

   Alasan: ______________________

3. Jika $Y = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ dan $Z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ maka $Y + Z =$ ....

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

   Alasan: ______________________

4. Diketahui matriks-matriks berikut.

   $A = \begin{bmatrix} x & -2y \\ \frac{1}{2}z & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

   Jika $2A = B^T$, maka nilai x, y. dan z berturut-turut adalah ....

   a. $4, -\frac{1}{2}, 4$
   b. $-4, -\frac{1}{2}, 4$
   c. $-4, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}$
   d. $-4, \frac{1}{2}, -4$
   e. $-4, -\frac{1}{2}, -4$

   Alasan: ______________________

5. Jika $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka $BC =$ ....

   a. $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

   Alasan: ______________________

6. Jika $F = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka $F^2 =$ ....

   a. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$
   b. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$
   c. $\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$
   d. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
   e. $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

   Alasan: ______________________

7. Jika $R = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$ maka $|R| =$ ....

   a. 26
   b. –26
   c. 6
   d. –6
   e. –16

   Alasan: ______________________

8. Jika $\begin{vmatrix} x & x+2 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix} = 2$ maka nilai $x =$ ....

   a. 2
   b. –2
   c. 2 atau –2
   d. 4
   e. 1

   Alasan: ______________________

9. Jika P (ordo 2 × 3) dikalikan dengan Q (ordo 3 × 5) maka dihasilkan R yang berordo ....

   a. 3 × 2
   b. 5 × 3
   c. 3 × 5
   d. 2 × 5
   e. 5 × 2

   Alasan: ______________________

10. Matriks X yang memenuhi $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

Alasan: ____________________

11. Jika $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -11 \end{bmatrix}$ maka nilai x dan y berturut-turut adalah ....

a. 4 dan 11

b. –4 dan 11

c. –11 dan –4

d. 11 dan –4

e. –4 dan –11

Alasan: ____________________

12. Nilai x dan y yang memenuhi persamaan

$\begin{bmatrix} -2x & 5 \\ -2 & y \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} y & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. $x = 2$ dan $y = -3$

b. $x = 3$ dan $y = -4$

c. $x = -2$ dan $y = 3$

d. $x = -3$ dan $y = 4$

e. $x = 2$ dan $y = -4$

Alasan: ____________________

13. Invers dari matriks $Q = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

Alasan: ____________________

14. Jika matriks $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 2 \\ x+4 & 2 \end{bmatrix}$ tidak memiliki invers maka nilai x adalah ....

a. 2

b. –2

c. 5

d. –5

e. 3

Alasan: ____________________

15. Nilai a yang memenuhi persamaan $\begin{vmatrix} 3a & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ adalah ....

a. 2

b. 1

c. –1

d. –2

e. –3

Alasan: ____________________

16. Jika $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ maka $A^{-1} \cdot B^{-1} =$ ....

a. $\begin{bmatrix} -9 & 13 \\ -8 & 11 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 9 & -13 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ -8 & -11 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -9 & -13 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} -9 & 13 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}$

Alasan: ____________________

17. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan I matriks satuan ordo dua maka $A^2 - 2A + I =$ ....

a. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

Alasan: ____________________

18. Nilai a yang memenuhi

$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & b \\ a+2b & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 7 & 20 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. 1

b. 2

c. 3

d. 4

e. 5

Alasan: ____________________

19. Matriks $\begin{bmatrix} a-b & a \\ a & a+b \end{bmatrix}$ tidak mempunyai invers bila ....

a. a dan b sebarang

b. $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $a = b$

c. $a \neq 0$, $b \neq 0$, dan $a = -b$

d. $a = 0$ dan b sebarang

e. $b = 0$ dan a sebarang

Alasan: ____________________

20. Jika matriks B adalah invers dari matriks A dan $AC = B$ maka $C =$ ....

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. A^2

d. B^2

e. AB

Alasan: ____________________

B. Jawablah soal-soal berikut.

1. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

   tentukan:
   - **a.** BC
   - **b.** $A^T (A + B)$
   - **c.** CA

2. Jika $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $f(x) = x^2$. Tentukan $f(A)$.

3. Tentukan invers dari matriks-matriks berikut:
   - **a.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}$
   - **b.** $\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & -9 & 11 \end{bmatrix}$

4. Jika $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan nilai $A\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

5. Diketahui, matriks $P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan nilai k yang memenuhi det $P^T = k$ det P^{-1}.

Latihan Ulangan Semester 2

A. Pilihlah salah satu jawaban dan berikan alasannya.

1. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\frac{3x+2}{4} = 7x + 7, x \in R$ adalah ....
   a. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$
   b. $\left\{\frac{1}{4}\right\}$
   c. $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$
   d. $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$
   e. $\left\{\frac{2}{5}\right\}$
   Alasan: ____________________
2. Harga karcis kebun binatang untuk 5 orang adalah Rp45.000,00 maka harga karcis untuk 1 orang adalah ....
   a. Rp8.000,00
   b. Rp9.000,00
   c. Rp10.000,00
   d. Rp11.000,00
   e. Rp12.000,00
   Alasan: ____________________
3. Nilai x dan y yang memenuhi persamaan $2x + 3y = -14$ dan $3x - 4y = 30$ adalah ....
   a. $x = -2, y = 6$
   b. $x = 2, y = 6$
   c. $x = 2, y = -6$
   d. $x = 6, y = -2$
   e. $x = -6, y = 2$
   Alasan: ____________________
4. Himpunan penyelesaian sistem persamaan linear
   $$\begin{cases} 3x - 5y = 20 \\ 4x + 3y = 17 \end{cases}$$
   adalah ....
   a. {–5, –1}
   b. {–5, 1}
   c. {5, 1}
   d. {5, –1}
   e. {1,5}
   Alasan: ____________________
5. Diketahui, harga 2 kg beras dan 3 kg gula pasir adalah Rp28.500,00 sedangkan harga 2 kg beras dan 1 kg gula pasir adalah Rp15.000,00 maka harga 1 kg gula pasir adalah ....
   a. Rp5.500,00
   b. Rp6.000,00
   c. Rp6.500,00
   d. Rp7.000,00
   e. Rp7.500,00
   Alasan: ____________________
6. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya –3 atau 5 adalah ....
   a. $x^2 + 2x - 15 = 0$
   b. $x^2 - 2x - 15 = 0$
   c. $x^2 - 2x + 15 = 0$
   d. $x^2 + 2x + 15 = 0$
   e. $-x^2 + 2x - 15 = 0$
   Alasan: ____________________
7. Persamaan kuadrat $x^2 - p(x - 1) = 0$ mempunyai akar kembar untuk nilai p sama dengan ....
   a. 2
   b. 4
   c. $2\sqrt{2}$
   d. $2\sqrt{3}$
   e. 8
   Alasan: ____________________
8. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $5x - 2 \le 3 - 2x$ adalah ....
   a. $\frac{5}{7}$
   b. $\frac{7}{5}$
   c. $-\frac{5}{7}$
   d. $-\frac{7}{5}$
   e. $\frac{5}{3}$
   Alasan: ____________________
9. Pertidaksamaan $2x - p < 7x + 12$ mempunyai penyelesaian $x > -4$. Nilai p adalah ....
   a. –32
   b. –8
   c. 0
   d. 8
   e. 32
   Alasan: ____________________
10. Pertidaksamaan $2x^2 - x \ge 6$ dipenuhi oleh ....
    a. $x \ge -\frac{2}{3}$ atau $x \ge 2$
    b. $x \le -\frac{2}{3}$ atau $x \ge 2$
    c. $x \le \frac{2}{3}$ atau $x \ge 2$
    d. $x \le \frac{2}{3}$ atau $x \le 2$
    e. $x \le -\frac{2}{3}$ atau $x \le 2$
    Alasan: ____________________
11. Nilai m yang memenuhi persamaan kuadrat $(m + 1)x^2 - 12x = 9 = 0$. Agar persamaan kuadrat tersebut mempunyai dua akar yang sama (kembar) adalah ....
    a. 2
    b. 3
    c. 4
    d. 5
    e. 6
    Alasan: ____________________
12. Persamaan kuadrat yang mempunyai dua akar riil yang berbeda adalah ....
    a. $5x^2 + 2x + 4 = 0$
    b. $2x^2 - 5x + 1 = 0$
    c. $x^2 + 2x + 4 = 0$
    d. $4x^2 + 4x + 1 = 0$
    e. $x^2 - 4x + 2 = 0$
    Alasan: ____________________

13. Jika $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$ dan $x_1x_2 = \frac{7}{2}$ maka persamaan kudarat yang memenuhi adalah ....
a. $2x^2 + 5x + 7 = 0$
b. $2x^2 - 5x + 7 = 0$
c. $2x^2 - 5x - 7 = 0$
d. $2x^2 + 5x - 7 = 0$
e. $-2x^2 - 5x - 7 = 0$

Alasan: ____________________

14. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{x-3}{4} + \frac{x+2}{3} \leq \frac{1}{2}$ adalah ....
a. $x \leq \frac{4}{7}$
b. $x \leq -\frac{4}{7}$
c. $x \geq \frac{4}{7}$
d. $x \leq \frac{8}{7}$
e. $x \leq -\frac{8}{7}$

Alasan: ____________________

15. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $\frac{2x-8}{x-3} \leq 4$ adalah ....
a. $\{x \mid x < 3 \text{ atau } x \geq 5, x \in R\}$
b. $\{x \mid x \leq 3 \text{ atau } x \geq 5, x \in R\}$
c. $\{x \mid 3 \leq x < 5; x \in R\}$
d. $\{x \mid 3 \leq x \leq 5; x \in R\}$
e. $\{x \mid 3 < x \leq 5; x \in R\}$

Alasan: ____________________

16. Ordo matriks berikut yang termasuk ke dalam matriks kolom adalah ....
a. $A(2 \times 3)$
b. $A(3 \times 1)$
c. $A(1 \times 3)$
d. $A(3 \times 2)$
e. $A(1 \times 5)$

Alasan: ____________________

17. Diketahui $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$. Pernyataan berikut yang benar adalah ....
a. $AB = 3A$
b. $AB = 3B$
c. $BA = 3A$
d. $BA = 3B$
e. $3BA = A$

Alasan: ____________________

18. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ maka $B + 2A^T$ adalah ....
a. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
d. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$
e. $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$

Alasan: ____________________

19. Jika $A = \begin{bmatrix} 17 & -11 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$, maka determinan matriks A^T adalah ....
a. 148
b. –148
c. –192
d. 192
e. 44

Alasan: ____________________

20. Invers matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ adalah ...
a. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$
b. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$
c. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$
d. $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 3 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$
e. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Alasan: ____________________

21. Determinan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah ....
a. –18
b. –15
c. 15
d. 18
e. 22

Alasan: ____________________

22. Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ matriks yang memenuhi $C = A \cdot B$ adalah ....

a. $-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

b. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

c. $-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

d. $-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$

e. $-\frac{1}{4}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Alasan: ____________________________

23. Matriks X berordo (2×2) yang memenuhi $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ adalah ....

a. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

Alasan: ____________________________

24. Matriks

$A = \begin{bmatrix} 1 & a+b \\ b & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a-1 & 0 \\ -c & d \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Jika $A + B = C$ dengan B^T transpose dari B maka nilai d adalah ....

a. -1

b. -2

c. 0

d. 1

e. 2

Alasan: ____________________________

25. Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

maka $(A + B)(A - B) - (A - B)(A + B) =$

a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $4\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d. $8\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e. $16\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Alasan: ____________________________

B. Jawablah soal-soal berikut.

1. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan berikut.

a. $\begin{cases} 4x + 2y = 13 \\ x + 15y = -4 \end{cases}$

b. $x^2 - 4x + 1 = 0$

2. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut.

a. $\frac{x+2}{2} + \frac{3x-1}{5} \geq \frac{2x-5}{3}$

b. $(x-1)(x+2) < x(4-x)$

3. Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -12 \\ 9 \\ -7 \end{bmatrix}$ tentukan

a. $A \cdot B$

b. Determinan dari $A - B^{-1}$

c. Invers $(A - B)$

4. Diketahui $A^{-1} = B$, tentukan nilai x dan y jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} x & 5 \\ 3 & y \end{bmatrix}$

5. Tentukan determinan dari matriks

$C = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ dengan aturan Sarrus.

Daftar Pustaka

Anton, H. 1997. *Aljabar Linear Elementer* (terjemahan). Jakarta: Erlangga.

Ayres, F. dan Schmidt, P. 1992. *Schaum's Outline of College Mathematics*. New York: Mc Graw–Hill.

Barnett, R.A. dan Zieglar, M.R. 1993. *College Algebra*. New York: Mc Graw–Hill.

Bartle, R. G. dan Sherbert, D. R. 1992. *Introduction to Real Analysis*. Michigan: John Wiley and Sons.

BSNP. 2006. *Standar Kompetensi dan Kompetensi Dasar 2006 Mata Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, *Soal-Soal Evaluasi Belajar Tahap Akhir Nasional (Ebtanas) Tahun 1986 sampai dengan Tahun 1999*.

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, *Soal-Soal Ujian Akhir Nasional (UAN) Tahun 2001 sampai dengan Tahun 2003*.

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, *Soal-Soal Ujian Nasional (UN) Tahun 2004 sampai dengan Tahun 2006*.

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Dirjen Pendidikan Tinggi, *Soal-Soal Ujian Masuk Perguruan Tinggi Negeri Tahun 1987 sampai dengan Tahun 2001*.

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Dirjen Pendidikan Tinggi, *Soal-Soal Seleksi Penerimaan Mahasiswa Baru (SPMB) Tahun 2002 sampai dengan Tahun 2006*.

Farlow, Stanley. J. 1994. *Finite Mathematics And It's Applications*. Singapore: Mc Graw–Hill.

Spiegel, M.R. 1991. *Seri Buku Schaum Teori dan Soal-Soal Matematika Dasar*. Jakarta: Erlangga.

Sulvivan, M. 1999. *Pre Calculus* . Upper Saddle River: Prentice–Hall.

Varberg, D. dan Purcell, E. J. 2001. *Calculus* (terjemahan). Jakarta: Interaksara.

Wahyudin. 2002. *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*. Jakarta: Tarity Samudra Berlian.

Kunci Jawaban

BAB I
Bilangan Riil

Uji Kompetensi 1.1

1. a. $\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$

Uji Kompetensi 1.2

1. a. asosiatif
   b. memiliki elemen penting
3. 102

Uji Kompetensi 1.3

1. a. $1\frac{24}{35}$ e. $1\frac{2}{15}$
   c. $1\frac{8}{13}$ g. $2\frac{13}{20}$
3. a. $\frac{1}{12}$
   c. $\frac{1}{24}$
5. Rp144.000,00

Uji Kompetensi 1.4

1. a. 0.8 atau 80%
   c. 4,3 atau 430%
   e. 10,222 atau 1022,22%
3. a. $\frac{1}{5}$
   c. 225%
5. Rp500.000,00

Uji Kompetensi Bab I

A.

1.	d	**11.**	d
3.	c	**13.**	d
5.	c	**15.**	b
7.	d	**17.**	c
9.	c	**19.**	b

B.

1. a. $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
3. 78 orang
5. harga pensil Rp1.000,00
   haraga Pulpen Rp2.000,00
   harga buku Rp5.000,00

BAB II
Bentuk Pangkat, Akar, dan Logaritma

Uji Kompertensi 2.1

1. a. m^{12}
   c. $\frac{15}{2}a^8$
   e. $\frac{7}{4}p^7 q^7 r^7$
3. a. $8p^3$
   c. $-(2^{-14} m^3 n^2)$
   e. $a^{10} b^{-6}$
5. a. $\frac{30}{13}$
   c. $\frac{5}{2}$

Uji Kompetensi 2.2

1. a. bukan bentuk akar
   b. bentuk akar
   c. bukan bentuk akar
3. $18\sqrt{3}$
5. $10 + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5}$

Uji Kompetensi 2.3

1. a. $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}$
   c. $x^{\frac{3}{4}}$
3. a. 29
   c. 2

Uji Kompetensi 2.4

1. a. $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ e. $-\frac{3}{5}\sqrt{30}$
   c. $-\frac{2}{5}\sqrt{10}$ g. $\frac{1}{4}\sqrt{6}$
3. a. $3+\sqrt{6}$
   c. $\sqrt{5}-\sqrt{5}$
   e. $\frac{12}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
5. a. $\frac{124-60\sqrt{3}}{13}$

Uji Kompetensi 2.5

1. a. ${}^7\log \frac{1}{2} = \sqrt{7}$

   c. ${}^a\log x = m + n$

   e. ${}^3\log q = \frac{5p}{2}$

3. a. $x = 7$

   c. $x = -3$ atau $x = 1$

5. a. 1

   c. 27

Uji Kompetensi 2.6

1. a. 0,8785

   c. 2,8785

   e. –1,1924

Uji Kompetensi Bab II

A.

1.	c	**11.**	c
3.	b	**13.**	d
5.	c	**15.**	–
7.	b	**17.**	c
9.	b	**19.**	e

B.

1. a. $15e^9\ p1^0$

   c. $5x^5y$

3. a. 7

   c. 3

   e. 1

5. Rp4.563.442,00

Uji Kompetensi Semester 1

A.

1.	d	**11.**	a	**21.**	b
3.	b	**13.**	d	**23.**	d
5.	c	**15.**	–	**25.**	c
7.	a	**17.**	c		
9.	b	**19.**	–		

B.

1. a. $4\frac{13}{15}$

   c. $5f9^2h^3$

BAB III
Persamaan dan Pertidaksamaan

Uji Kompetensi 3.1

1. a. $x = 5$

   c. $= -30$

   e. $x = -21$

3. Rp117.000,00

Uji Kompetensi 3.2

1. a. –3

   b. –6

Uji Kompetensi 3.3

1. a. $x^2 - 2x - 15 = 0$

   c. $5x^2 - 17x - 12 = 0$

3. a. $2x^2 + 23x + 63 = 0$

   c. $x^2 + 11\frac{103}{126}x + 34\frac{9}{14} = 0$

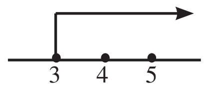
5. Rp325.000,00

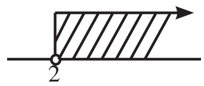
Uji Kompetensi 3.4

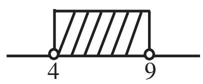
1. a. $x \leq \frac{3}{2}$

   c. $x \leq \frac{5}{7}$

   e. $x \geq \frac{5}{13}$

3. a. 

   c. 

   e. 

Uji Kompetensi 3.5

1. a. $\{x \mid x \leq -6$ atau $x \geq 2, x \in R\}$

3. $t \leq 1$

Uji Kompetensi Bab III

A.

1.	c	**11.**	d
3.	b	**13.**	a
5.	c	**15.**	e
7.	d	**17.**	b
9.	c	**19.**	b

B.

1. a. $x = -\frac{1}{2}$ atau $x = 3$

3. $p = 9$ cm, $l = 6$ cm

5. 11

BAB IV
Matriks

Uji Kompetensi 4.1

1. a. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. a. $B\ (3 \times 4)$

c. $b_{21} = -2$

$b_{34} = 7$

5. -2

7. a. $\begin{bmatrix} 2a & b \\ c & -d \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Uji Kompetensi 4.2

1. a. $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ \frac{20}{3} & \frac{40}{3} \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

Uji Kompetensi 4.3

1. a. -1

c. -5

e. 338

3. $-13{,}5$

5. a. $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Uji Kompetensi 4.4

1. a. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. $x = -4,\ y = -3$

5. Rp265.000,00

Uji Kompetensi Bab IV

A.

1.	c	**11.**	–
3.	e	**13.**	a
5.	b	**15.**	e
7.	d	**17.**	d
9.	d	**19.**	e

B.

1. a. *B* tidak bisa dikalikan dengan *C* karena sifat dari perkalian dua matriks

c. $\begin{bmatrix} 36 & 2 \\ 2 & -19 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

3. a. $\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 11 & -3 \end{bmatrix}$

Uji Kompetensi Semester 2

A.

1.	–	**11.**	b	**21.**	a
3.	c	**13.**	b	**23.**	e
5.	c	**15.**	–	**25.**	c
7.	–	**17.**	c		
9.	d	**19.**	b		

B.

1. a. $\left\{\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

3. a. $\begin{pmatrix} -25 \\ -45 \end{pmatrix}$

c. Tidak terdapat invers

5. $-44 - 23\sqrt{2}$

Daftar Lampiran

Tabel Logaritma

B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	.000	004	009	013	017	021	025	029	033	037
11	.041	045	049	053	057	061	064	068	072	076
12	.079	083	086	090	093	097	100	104	107	111
13	.114	117	121	124	127	130	134	137	140	143
14	.146	149	152	155	158	161	164	167	170	173
15	.176	179	182	185	188	190	193	196	199	201
16	.204	207	210	212	215	217	220	223	225	228
17	.230	233	236	238	241	243	246	248	250	253
18	.255	258	260	262	265	267	270	272	274	276
19	.279	281	283	286	288	290	292	294	297	299
20	.301	303	305	307	310	312	314	316	318	320
21	.322	324	326	328	330	332	334	336	338	340
22	.342	344	346	348	350	352	354	356	358	360
23	.362	364	365	367	369	371	373	375	377	378
24	.380	382	384	386	387	389	391	393	394	396
25	.398	400	401	403	405	407	408	410	412	413
26	.415	417	418	420	422	423	425	427	428	430
27	.431	433	435	436	438	439	441	442	444	446
28	.447	449	450	452	453	455	456	458	459	461
29	.462	464	465	467	468	470	471	473	474	476
30	.477	479	480	481	483	484	486	487	489	490
31	.491	493	494	496	497	498	500	501	502	504
32	.505	507	508	509	511	512	513	515	516	517
33	.519	520	521	522	524	525	526	528	529	530
34	.531	533	534	535	537	538	539	540	542	543
35	.544	545	547	548	549	550	551	553	554	555
36	.556	558	559	560	561	562	563	565	566	567
37	.568	569	571	572	57	574	575	576	577	579
38	.580	581	582	583	584	585	587	588	589	590
39	.591	592	593	594	595	597	598	599	600	601
40	.602	603	604	605	606	607	609	610	611	612
41	.613	614	615	616	617	618	619	620	621	622
42	.623	624	625	626	627	628	629	630	631	632
43	.633	634	635	636	637	638	639	640	641	642
44	.643	644	645	646	647	648	649	650	651	652
45	.652	654	655	656	657	658	659	660	661	662
46	.663	664	665	666	667	667	668	669	670	671
47	.672	673	674	675	676	677	678	679	679	680
48	:681	682	683	684	685	686	687	688	688	689
49	.690	691	692	693	694	695	695	69	697	698
50	.699	700	701	702	702	703	704	705	706	707
51	.708	708	709	710	711	712	713	713	714	715
52	.716	717	718	719	719	720	721	722	723	723
53	.724	725	726	727	728	728	729	730	731	732
54	.732	733	734	735	736	736	737	738	739	740

B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	.740	741	742	743	744	744	746	746	747	747
56	.748	749	750	751	751	752	753	754	754	755
57	.756	757	757	758	759	760	760	761	762	763
58	.763	764	765	766	766	767	768	769	769	770
59	.771	772	772	773	774	775	775	776	777	777
60	.778	779	780	780	781	782	782	783	784	785
61	.785	786	787	787	788	789	790	790	791	792
62	.792	793	794	794	795	796	797	797	798	799
63	.799	800	801	801	802	803	803	804	805	806
64	.806	807	808	808	809	810	810	811	812	812
65	.813	814	814	815	816	816	817	818	818	819
66	.820	820	821	822	822	823	823	824	825	825
67	.826	827	827	828	829	829	830	831	831	832
68	.833	833	834	834	835	836	836	837	838	838
69	.839	839	840	841	841	842	843	843	644	844
70	.845	846	846	847	848	848	849	849	850	851
71	.851	852	852	853	854	854	855	856	856	857
72	.857	858	859	859	860	860	861	862	862	863
73	.863	864	865	865	866	866	867	867	868	869
74	.869	870	870	871	872	872	873	873	874	874
75	.875	876	876	877	877	873	879	879	880	880
76	.881	881	882	883	883	884	884	885	885	886
77	.886	887	888	888	889	889	890	890	891	892
78	.895	893	893	894	894	895	895	896	897	897
79	.898	898	899	899	900	900	901	901	902	903
80	.903	904	904	905	905	906	906	907	907	908
81	.908	909	910	910	911	911	912	912	913	913
82	.914	914	915	915	916	916	917	918	918	919
83	.919	920	920	921	921	922	922	923	923	924
84	.924	925	925	926	926	927	927	928	928	929
85	.929	930	930	931	931	932	932	933	933	934
86	.934	935	936	936	937	937	938	838	939	939
87	.940	940	941	941	941	942	943	943	943	944
88	.944	945	945	946	946	947	947	948	948	949
89	.949	950	950	951	951	952	952	953	953	954
90	.954	955	955	956	956	957	957	958	958	959
91	.959	960	960	960	961	961	962	962	963	963
92	.964	964	965	965	966	966	967	967	968	968
93	.968	969	969	970	970	971	971	972	972	973
94	.973	974	974	975	975	975	976	976	977	977
95	.978	978	979	979	980	980	980	981	981	982
96	.982	983	983	984	984	985	985	985	986	986
97	.987	987	988	988	989	989	989	990	990	991
98	.991	992	992	993	993	993	994	994	995	995
99	.996	996	997	997	997	998	998	999	999	1.000

Glosarium

A

Adjoin: menukarkan elemen pada diagonal utama dengan elemen pada diagonal sekunder dikalikan dengan (–1) dari suatu matriks berordo 2 × 2 [**97**]

Antilogaritma: kebalikan dari logaritrma [**42**]

B

Basis: bilangan pokok dari suatu bentuk pemangkatan [**20**]

Himpunan bilangan asli: himpunan bilangan yang diawali dengan angka 1 dan bertambah satu-satu [**3**]

Himpunan bilangan bulat: Himpunan bilangan yang merupakan gabungan antara himpunan bilangan cacah dengan himpunan bilangan bulat negatif [**3**]

Himpunan bilangan cacah: Gabungan antara himpunan bilangan asli dan himpunan bilangan 0 [**3**]

Himpunan bilangan rasional: himpunan bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{1}{5}$, dengan p, $q \in B$ dan $q \neq 0$ [**3**]

Himpunan bilangan riil: gabungan bilangan rasional dengan bilangan irasional [**3**]

D

Desimal: bilangan pecahan yang ditulis dengan angka kelipatan per sepuluh, per seratus, dan sebagainya [**10**]

Diskriminan: bentuk ($b^2 - 4ac$) pada rumus *abc* [**61**]

E

Eksponen: angka da sebagainya yang ditulis di sebelah kanan atas angka lain yang menunjukkan pangkat dari angka tersebut [**20**]

Elemen: bagian dari keseluruhan unsur, anggota [**84**]

K

Kalkulator: alat hitung elektronik [**4**]

Koefisien: bagian suku yang berupa bilangan atau konstan yang biasanya dituliskan sebelum lambang peubah [**54**]

Kofaktor: hasil perkalian elemen minor M_{ij} dengan $(-1)^{i+j}$ [**97**]

Konstanta: lambang untuk menyatakan objek yang sama di keseluruhan operasi matematika [**52**]

Konversi: perubahan dari satu bentuk atau besaran ke bentuk (besaran) yang lain [**10**]

L

Lambang: simbol yang digunakan untuk menyatakan unsur, senyawa, sifat, dan satuan matematika [**25**]

Logaritma: eksponen pangkat yang diperlukan untuk memangkatkan bilangan dasar supaya memperoleh bilangan tertentu [**33**]

M

Mantisa: bagian dari desimal logaritma biasa [**41**]

Matriks: kumpulan bilangan yang tersusun menurut baris dan kolom sedemikian sehingga tampak seperti bentuk sebuah persegipanjang [**81**]

Metode Sarrus: salah satu metode dalam menentukan nilai determinan matriks berordo 3 × 3 [**95**]

N

Notasi: cara penulisan atau melambangkan [**7**]

Numerrus: bilangan yang dicari nilai logaritmanya [**33**]

O

Ordo: ukuran, ordo pada matriks ditentukan oleh banyaknya baris dan kolom [**83**]

P

Pangkat: suatu bentuk perkalian bilangan itu sendiri [**20**]

Persamaan kuadrat: persamaan berderajat dua [**53**]

Persamaan linear: persamaan berderajat satu [**51**]

Persen: per seratus [**10**]

S

Skalar: besaran yang hanya memiliki ukuran dan tidak memiliki arah [**90**]

T

Teorema: teori yang harus dibuktikan [**94**]

Transpos: menukar semua kolom menjadi baris dan baris menjadi kolom dalam matriks [**86**]

V

Variabel: peubah [**54**]

ISBN 979 462 846 8

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 46 Tahun 2007 tanggal 5 Desember 2007 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp7.888,00