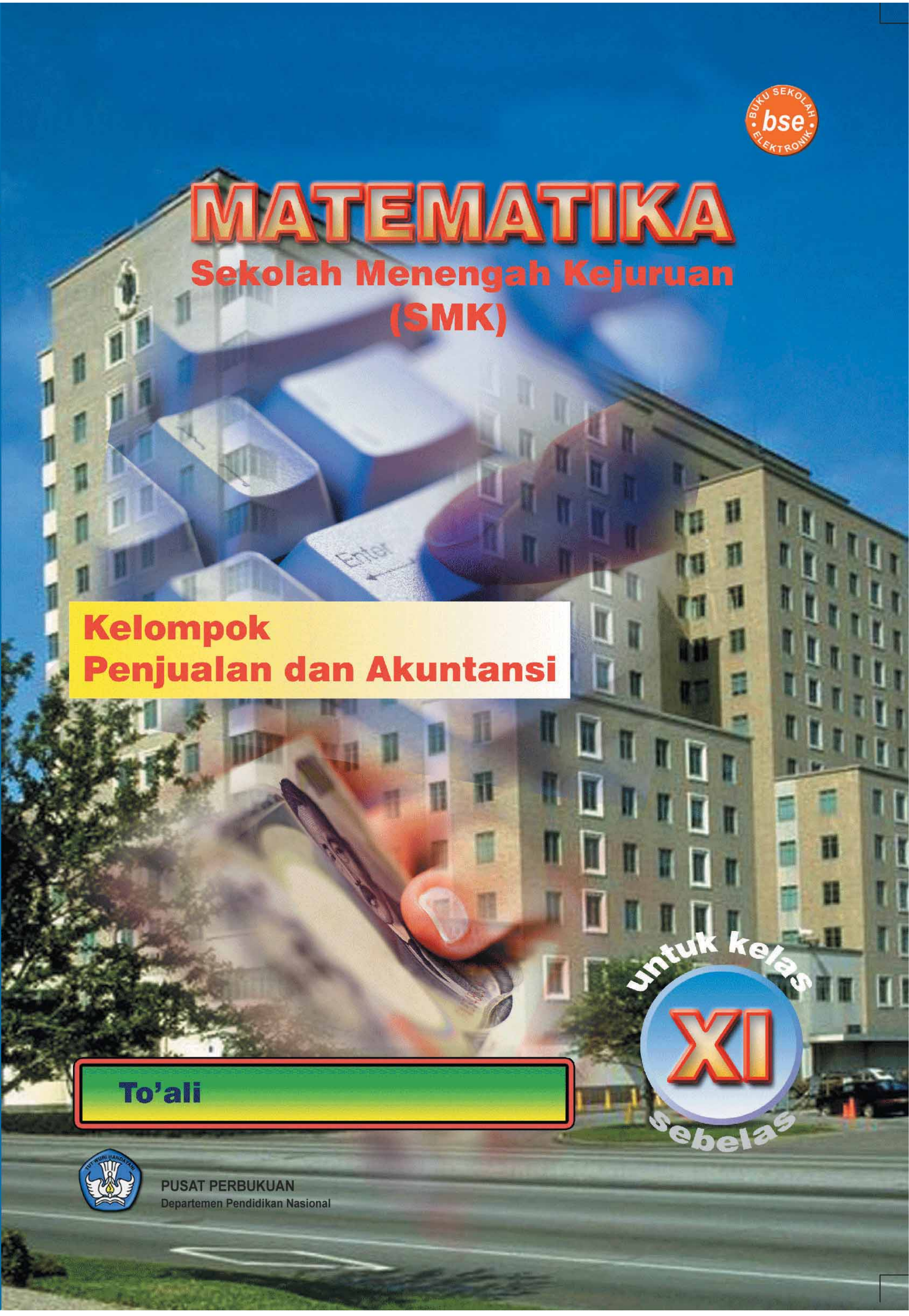


bse BUKU SEKOLAH ELEKTRONIK

MATEMATIKA

Sekolah Menengah Kejuruan (SMK)

Kelompok Penjualan dan Akuntansi

untuk kelas XI sebelas

To'ali

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA Sekolah Menengah Kejuruan Kelas XI To'ali

MATEMATIKA

Sekolah Menengah Kejuruan (SMK) Kelas XI

Kelompok
Penjualan dan Akuntansi

To'ali

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA

SMK/MAK

Penulis : To'ali

Ukuran Buku : 17,6 x 25 Cm

510.07
TOA TO'ALI
m Matematika Sekolah Menengah Kejuruan (SMK): untuk kelas XII /oleh To'ali. - Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
viii, 166 hlm.: ilus.: 25 cm.

Bibliografi: hlm. 167
Indeks: hlm. 165
ISBN 979-462-815-8

1. Matematika -Studi dan Pengajaran. I. Judul

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

Diperbanyak oleh ......

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2007, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui *website* Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 46 Tahun 2007.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para pendidik dan peserta didik di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional tersebut, dapat diunduh *(down load),* digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga peserta didik dan pendidik di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Selanjutnya, kepada para peserta didik kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, 25 Februari 2008
Kepala Pusat Perbukuan

Petunjuk Penggunaan Buku

A. Deskripsi Umum

Matematika SMK Kelompok Penjualan dan Akuntansi kelas X terdiri atas 3 standar kompetensi yaitu:

1. **Standar kompetensi sistem bilangan real**
2. **Standar kompetensi Persamaan dan Pertidaksamaan**
3. **Standar kompetensi Matriks**
4. **Standar Kompetensi Program Linear**

Setelah mempelajari buku ini, kompetensi yang diharapkan adalah peserta didik dapat menerapkan konsep sistem bilangan real, Konsep Persamaan dan Pertidaksamaan, Konsep Matriks dan Program Linear dalam menunjang program keahlian yaitu program keahlian pada kelompok Penjualan dan Akuntansi.

Pendekatan yang digunakan dalam menyelesaikan buku ini menggunakan pendekatan siswa aktif melalui metode : Pemberian tugas, diskusi pemecahan masalah serta presentasi. Guru merancang pembelajaran yang memberikan kesempatan seluas-luasnya kepada peserta didik untuk berperan aktif dalam membangun konsep secara mandiri ataupun bersama-sama.

B. Prasyarat Umum

Dalam mempelajari buku ini, setiap standar kompetensi yang satu dengan standar kompetensi yang lain saling berkaitan dan anda boleh mempelajari kompetensi ini tidak harus berurutan sesuai dengan daftar isi. Jadi untuk dapat mempelajari kompetensi berikutnya harus menguasai secara mendasar kompetensi sebelumnya. Standar kompetensi yang paling mendasar dan harus benar-benar dikuasai adalah standar kompetensi sistem bilangan real.

C. Petunjuk Penggunaan Buku

1. Penjelasan Bagi Peserta Didik

a. **Bacalah buku ini secara berurutan dari kata pengantar sampai cek kemampuan, lalu pahami benar isi dari setiap babnya.**
b. **Laksanakan semua tugas-tugas yang ada dalam buku ini agar kompetensi anda berkembang sesuai standar.**
c. **Buatlah rencana belajar anda dalam mempelajari buku ini , dan konsultasikan rencana anda dengan guru.**

d. Lakukan kegiatan belajar untuk memdapatkan kompetensi sesuai dengan rencana kegiatan belajar yang telah anda susun.
e. Setiap mempelajari satu sub kompetensi, anda harus mulai dari menguasai pengetahuan pendukung (uraian materi), membaca rangkumannya dan mengerjakan soal latihan baik melalui bimbingan guru ataupun tugas di rumah.
f. Dalam mengerjakan soal-soal latihan anda jangan melihat kunci jawaban terlebih dahulu, sebelum anda menyelesaikannya.
g. Diakhir kompetensi, selesaikan Uji Kemampuan untuk menghadapi tes evaluasi yang diberikan oleh guru.

2. Peranan Guru

a. Membantu peserta didik dalam merencanakan proses belajar.
b. Membimbing peserta didik melalui tugas-tugas pelatihan yang dijelaskan dalam tahap belajar.
c. Membantu peserta didik dalam memahami konsep dan menjawab pertanyaan mengenai proses belajar peserta didik.
d. Membantu peserta didik dalam menentukan dan mengakses sumber tambahan lain yang diperlukan untuk belajar.
e. Mengorganisasikan kegiatan belajar kelompok jika diperlukan.
f. Melaksanakan penilaian.
g. Menjelaskan kepada peserta didik mengenai bagian yang perlu untuk dibenahi dan merundingkan rencana pemelajaran selanjutnya.
h. Mencatat pencapaian kemajuan peserta didik dengan memberikan evaluasi. Pemberian evaluasi kepada siswa diharapkan diambil dari soal-soal Uji Kemampuan yang tersedia.

D. Cek Kemampuan

Untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi.

Rumus :

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah jawaban yang benar}}{\text{Jumlah soal}} \times 100\ \%$$

Arti tingkat penguasaan yang anda capai :

90% - 100% = baik sekali
76% - 89% = baik
60% - 75% = sedang
< 60% = kurang

Jika anda mencapai tingkat penguasaan 60% ke atas, anda dapat meneruskan dengan kompetensi dasar berikutnya. Tetapi jika nilai anda di bawah 60% , anda harus mengulangi materi tersebut terutama yang belum dikuasai.

KATA PENGANTAR

Dengan mengucap syukur pada Allah SWT yang telah memberikan rahmat begitu besar pada kita semua, sehingga Alhamdulillah, buku matematika SMK untuk kelas XI Kelompok Penjualan dan Akuntansi Sekolah Menengah Kejuruan dapat terselesaikan dengan baik.

Buku ini disusun berdasarkan Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan SMK/MAK yang sesuai dengan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia No. 22 dan 23 Tahun 2006 Tentang Standar Isi dan Standar Kompetensi Lulusan untuk Satuan Pendidikan Dasar dan Menengah, dengan pengembangannya yang mudah-mudahan dapat melengkapi pemahaman konsep-konsep dasar matematika dan dapat menggunakannya baik dalam mempelajari pelajaran yang berkaitan dengan matematika, pelajaran lain maupun dalam kehidupan sehari-hari.

Tiap bab berisi ringkasan teori yang melandasi kompetensi yang harus dipahami secara benar oleh siswa-siswi peserta didik dan disertai contoh-contoh soal yang relevan dengan teori tersebut. Soal-soal dibuat didasarkan pada teori dan sebagai latihan untuk dapat menyelesaikan uji kemampuan yang digunakan sebagai parameter atau indikator bahwa peserta diklat sudah kompeten atau belum pada materi yang dipelajarinya.

Kami menyadari bahwa tersedianya buku-buku referensi atau sumber bacaan dari berbagai penulis dan penerbit sangat membantu penulis dalam menyajikan konsep-konsep dasar yang sesuai dengan kaidah-kaidah matematika. Dan mudah-mudahan buku ini dapat bermanfaat secara khusus untuk anak-anak didik di Sekolah Menengah Kejuruan dan bagi siapapun yang berkenan menggunakan buku ini.

Akhir kata “Tidak Ada Gading yang Tak Retak”, tidak ada karya manusia yang sempurna selain dari karya-Nya. Demikian pula dengan buku ini masih jauh dari apa yang kita harapkan bersama. Oleh karena itu segala kritik dan saran demi kebaikan bersama sangat diharapkan sebagai bahan evaluasi atau revisi dari buku ini.

Jakarta, September 2007

Penulis

DAFTAR ISI

Sumber: Art and Gallery

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
5. Menerapkan logika matematika dalam pemecahan masalah yang berkaitan dengan pernyataan majemuk dan pernyataan berkuantor	**5. 1 Mendeskripsikan pernyataan dan bukan pernyataan (kalimat terbuka)** **5. 2 Mendeskripsikan ingkaran, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi dan ingkarannya** **5. 3 Mendeskripsikan invers, konvers dan kontraposisi** **5. 4 Menerapkan modus ponens, modus tollens dan prinsip silogisme dalam menarik kesimpulan**

A. PENDAHULUAN

Standar Kompetensi **Logika Matematika** terdiri dari empat (4) Kompetensi Dasar. Dalam penyajian pada buku ini setiap Kompetensi Dasar memuat Tujuan, Uraian materi, Rangkuman dan Latihan. Kompetensi Dasar dalam Standar Kompetensi ini adalah **pernyataan dan bukan pernyataan (kalimat terbuka); Ingkaran, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi dan ingkarannya; Invers, konvers dan kontraposisi** dan **Modus ponens, modus tollens dan prinsip silogisme dalam menarik kesimpulan**.

Standar kompetensi ini digunakan sebagai dasar untuk menyelesaikan masalah-masalah logika pada kehidupan sehari-hari dalam rangka untuk menunjang program keahliannya. Belajar logika matematika dapat membantu mengatur pemikiran kita untuk memisahkan hal yang benar dan yang salah, dapat membantu kita untuk menghindari salah penafsiran dan juga meningkatkan keahlian kita dalam berpikir analisis. Sebelum mempelajari standar kompetensi ini diharapkan anda telah menguasai standar kompetensi Sistem Bilangan Real terutama tentang perkalian, pembagian, penjumlahan dan pengurangan bilangan real, persamaan dan pertidaksamaan maupun kompetensi yang lain yang dapat menunjang standar kompetensi logika matematika.

Pada setiap akhir Kompetensi dasar tercantum soal-soal latihan yang disusun dari soal-soal yang mudah sampai soal-soal yang sukar. Latihan soal ini digunakan untuk mengukur kemampuan anda terhadap kompetensi dasar ini, artinya setelah mempelajari kompetensi dasar ini secara mandiri dengan bimbingan guru sebagai fasilitator, ukur sendiri kemampuan anda dengan mengerjakan soal-soal latihan tersebut.

Untuk melancarkan kemampuan anda supaya lebih baik dalam mengerjakan soal, disarankan semua soal dalam latihan ini dikerjakan baik di sekolah dengan bimbingan guru maupun di rumah.

Untuk mengukur standar kompetensi lulusan tiap siswa, di setiap akhir kompetensi dasar, guru akan memberikan evaluasi apakah anda layak atau belum layak mempelajari standar Kompetensi berikutnya. Anda dinyatakan layak jika anda dapat mengerjakan soal 60% atau lebih soal-soal evaluasi yang akan diberikan guru.

B. KOMPETENSI DASAR

B.1. Pernyataan dan Bukan Pernyataan

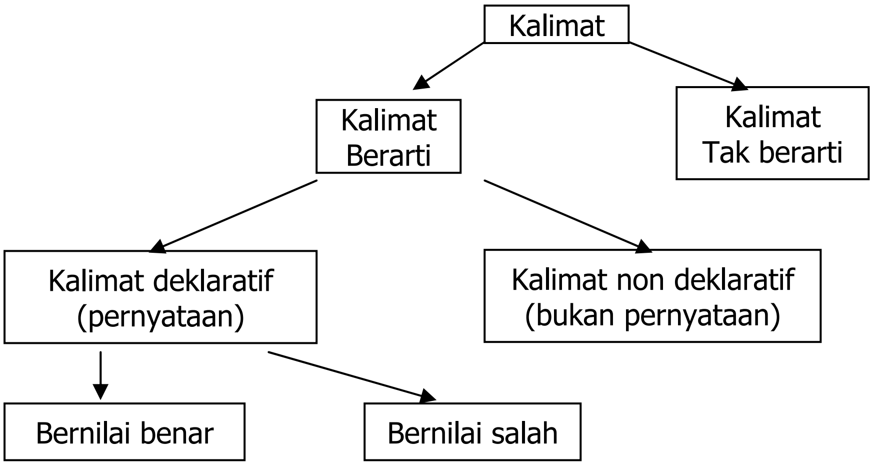
a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Membedakan kalimat berarti dan kalimat tidak berarti
- Membedakan pernyataan dan kalimat terbuka
- Menentukan nilai kebenaran suatu pernyataan

b. Uraian Materi

Dalam kehidupan sehari-hari, jika ingin mengutarakan sesuatu, maka selalu menggunakan kalimat (rangkaian kata-kata). Menurut logika skema kalimat sebagai berikut:



1). Kalimat berarti
Kalimat berarti adalah kalimat yang mempunyai arti

Contoh 1

a. Fatimah siswi kelas X
b. Jakarta terletak di Pulau Jawa
c. 6 x 8 = 50

2). Kalimat tak berarti
Kalimat tak berarti adalah kalimat yang tidak mempunyai arti

Contoh 2

a. Bank mencintai delapan
b. Tiga makan lemari

3). Kalimat Deklaratif(pernyataan)
Kalimat deklaratif adalah kalimat yang mempunyai nilai benar saja atau salah saja, tetapi tidak sekaligus dua-duanya. Dengan demikian kita dapat mengatakan bahwa pernyataan adalah kalimat yang mempunyai nilai benar saja atau salah saja tetapi tidak benar dan salah sekaligus, atau dengan kata lain sebuah pernyataan adalah kalimat yang dapat ditentukan nilai kebenarannya (bernilai benar atau salah berdasarkan empirik atau non empirik). Untuk mempermudah penggunaan selanjutnya, pernyataan dilambangkan dengan sebuah huruf kecil, misalnya p, q, r dan sebagainya. Pernyataan yang benar memiliki nilai kebenaran B (benar) atau 1 dan pernyataan salah memiliki kebenaran S (salah) atau 0.

Contoh 3

a. p : Bilangan cacah adalah bilangan asli ditambah nol
b. q : Lagu Indonesia Raya diciptakan oleh Kusbini
c. r : Jika 2x = 6 maka x = 3

Pada contoh 3, p dan r adalah dua pernyataan yang bernilai benar sedangkan q adalah pernyataan yang bernilai salah.

4). Kalimat Deklaratif Faktual (pernyataan fakta)
Kalimat deklaratif faktual adalah pernyataan yang nilai kebenarannya harus diselidiki terlebih dahulu.

Contoh 4

a. Hanif adalah salah satu siswa SMK Taruna
b. Fulan adalah seorang koruptor
c. Telah terjadi kebakaran di Perumahan Bumi Maya

5). Kalimat non deklaratif (bukan pernyataan)
Kalimat non deklaratif adalah kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.

Contoh 5

a. Semoga Tuhan mengampuni dosamu.
b. Berapakah jumlah siswa SMK se DKI Jakarta ?
c. Beristirahatlah jika anda lelah

6). Kalimat terbuka
Kalimat terbuka adalah kalimat yang mengandung **peubah (variabel)** dan apabila peubah diganti dengan suatu konstanta dalam semestanya, akan menghasilkan suatu pernyataan.

Contoh 6

a. $x + 2 = 5$
b. $x^2 – 5x – 40 > 0$
c. Ini adalah sebuah logam

Sebuah variabel pada kalimat terbuka, jika diganti maka kalimat tersebut dapat ditentukan nilai kebenarannya. Tinjaulah $x + 2 = 5$, jika x kita ganti dengan 3 maka kalimat tersebut menjadi $3 + 2 = 5$ adalah kalimat yang bernilai benar dan $x = 3$ dinamakan penyelesaian dari kalimat terbuka tersebut. Tetapi jika harga x kita ganti dengan 1 maka kalimat tersebut menjadi $1 + 2 = 5$, ini merupakan pernyataan yang bernilai salah.
Dari tinjauan di atas dapat kita katakan bahwa kalimat terbuka dapat berubah menjadi sebuah pernyataan yang bernilai benar atau salah jika variabel atau peubah dari kalimat terbuka tersebut diganti dengan nilai tertentu.

c. Rangkuman

1. Kalimat deklaratif (pernyataan) adalah kalimat yang mempunyai nilai benar saja atau salah saja, tidak dua-duanya pada saat yang sama.
2. Kalimat deklaratif faktual (pernyataan fakta) adalah pernyataan yang nilai kebenarannya harus diselidiki dahulu.
3. Kalimat non deklaratif (bukan pernyataan) adalah kalimat yang tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
4. Kalimat terbuka adalah kalimat yang mengandung peubah(variabel) dan apabila peubah diganti dengan suatu konstanta dalam semestanya, akan menghasilkan suatu pernyataan.

LATIHAN 1

1. Manakah dari kalimat berikut ini yang merupakan pernyataan? Jika pernyataan, tentukanlah nilai kebenarannya!
   a. 2 adalah bilangan prima.
   b. Indonesia terbagi menjadi 33 daerah provinsi.
   c. Sebutkan bilangan prima diantara 3 dan 100.
   d. Ada 52 minggu dalam satu tahun.
   e. Buktikan dalam suatu segi tiga siku-siku di A maka berlaku $c^2 = a^2 + b^2$.
   f. Selamat ulang tahun.
   g. Suku ke 5 dari 2, 4, 6, . . . adalah 10.
   h. Semua bilangan rasional adalah real.
   i. x adalah faktor dari 112.
   j. Setiap bilangan genap habis dibagi 2.
   k. Semua hewan mempunyai ekor.
   l. Lingkaran yang berjari-jari 3 cm mempunyai luas 9π cm^2.
   m. Aduhai indahnya pemandangan itu.
   n. Tentukan x sehingga $x + 2 = 4$.
   o. Setiap jajaran genjang mempunyai dua sisi yang sejajar dan sama panjang.
   p. Jumlah sudut dalam segi tiga adalah 180^o.
   q. Jembatan Semanggi termasuk salah satu dari tujuh keajaiban dunia
   r. Diagonal suatu persegipanjang saling tegak lurus.
   s. Semua bilangan prima adalah ganjil
   t. Fulan ditangkap polisi karena mencuri.

2. Tentukan variabel atau peubah dari kalimat terbuka berikut agar menjadi sebuah pernyataan yang bernilai benar!
   a. x adalah bilangan asli kurang dari 5.
   b. $x + 2 = -20$.
   c. Sebuah himpunan $A = \{ x | -2 < x < 4, x \in A\}$.
   d. $x^2 - 2x - 8 = 0$.
   e. Bilangan cacah kurang dari 21 yang habis dibagi 2.
   f. x adalah faktor prima dari 15.
   g. $x^2 - x - 2 < 0$

B.2 Ingkaran, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Memberi contoh dan membedakan ingkaran, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi, dan ingkarannya
- Membuat tabel kebenaran dari ingkaran, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi, dan ingkarannya
- Menentukan nilai kebenaran dari ingkaran, konjungsi, disjungsi, implikasi, biimplikasi, dan ingkarannya

b. Uraian Materi

1). Ingkaran atau Negasi

Ingkaran atau *negasi* biasanya digunakan untuk menyangkal atau kebalikan dari suatu pernyataan. Untuk menyangkal atau membuat negasi dari suatu pernyataan biasanya dengan cara membubuhkan kata "tidak benar" di depan kalimat atau dengan menyisipkan kata "tidak atau bukan" di dalam pernyataan tersebut. Pernyataan baru yang didapat dengan cara seperti itu disebut negasi atau ingkaran dari suatu pernyataan semula.

Jika p adalah suatu pernyataan, maka ingkaran atau negasi dari pernyataan tersebut dituliskan dengan menggunakan lambang berikut ini

$$\sim p$$

dan dibaca "*tidak benar* p"atau "*bukan* p"

Contoh 7

Tentukan ingkaran atau negasi dari pernyataan-pernyataan berikut!

a. p : Jakarta ibukota Indonesia
   ~p : Tidak benar Jakarta ibukota Indonesia
   ~p : Jakarta bukan ibukota Indonesia
b. q : $6 < 3$
   ~q : Tidak benar $6 < 3$
   ~q : $6 \geq 3$
c. r : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
   ~r : Tidak benar $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
   ~r : $\cos^2 x + \sin^2 x \neq 1$
d. s : $2 - 3 \times 4 \leq 10$
   ~s : Tidak benar $2 - 3 \times 4 \leq 10$
   ~s : $2 - 3 \times 4 > 10$

Bila kita perhatikan pada contoh di atas, tampak bahwa jika suatu pernyataan bernilai benar (contoh 7a dan 7c) maka akan mempunyai ingkaran bernilai salah. Sebaliknya jika suatu pernyataan benilai salah (contoh 7b) maka akan mempunyai ingkaran bernilai benar. Sehingga nilai kebenaran dari suatu ingkaran selalu berlawanan dengan nilai kebenaran pernyataan semula.

Dari contoh tersebut, kita dapat menentukan hubungan antara nilai kebenaran suatu ingkaran dengan pernyataan mula-mulanya berikut ini.

<u>Nilai kebenaran</u>

Jika p suatu pernyataan benilai benar, maka ~p bernilai salah dan sebaliknya jika p bernilai salah maka ~p bernilai benar.

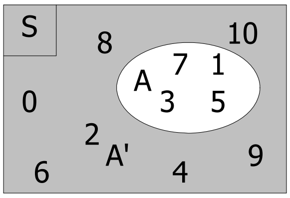
<u>Tabel kebenaran</u>

p	~p
B	S
S	B

Secara matematis, hubungan antara suatu pernyataan dengan negasinya dapat digambarkan dalam bentuk himpunan, seperti contoh berikut ini.

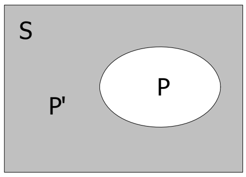
Contoh 8

Misalkan sebuah himpunan A = {1, 3, 5, 7} dengan semesta pembicaraan adalah himpunan S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, maka komplemen dari A adalah himpunan yang mempunyai elemen A′= { 0, 2, 4, 6, 8, 9, 10}. Dalam bentuk himpunan dilukiskan sebagai berikut:



Dari **Contoh** tersebut jelaslah bahwa negasi dari p adalah merupakan komplemen p jika dinyatakan dalam bentuk himpunan atau diagram Venn adalah sebagai berikut.

p = {x| p(x)}, p benar jika $x \in P$
p′ = {x|~ p(x)}, ~ p benar jika $x \in P'$ atau
salah jika $x \in P$



2). Pernyataan Majemuk

Pernyataan majemuk atau kalimat majemuk adalah suatu pernyataan baru yang tersusun atas dua atau lebih pernyataan dengan menggunakan kata hubung logika, yaitu dan, atau, tetapi dan sebagainya. Pernyataan tunggal pembentuk pernyataan majemuk tersebut disebut dengan komponen-komponen atau sub pernyataan.

Contoh 9

a. Bandung ibukota provinsi Jawa Barat dan terletak di Pulau Jawa.
   Komponen pembentuk kalimat majemuk tersebut adalah Bandung Ibukota Jawa Barat dan Bandung terletak di Jawa Barat.
b. 2 + 3 = 5 atau 2 – 1 > 5.
   Komponen pembentuk kalimat majemuknya adalah 2 + 3 = 5 dan 2 – 1>5.
c. Jika ikan bernapas dengan insang maka manusia dengan paru-paru.
   Komponen pembentuk kalimat majemuk tersebut adalah ikan bernapas dengan insang dan manusia bernapas dengan paru-paru.

3). Konjungsi

Dua pernyataan p dan q dapat digabungkan dengan meggunakan kata hubung “dan” untuk membentuk suatu pernyataan majemuk yang disebut konjungsi dari pernyataan p dan q. Konjungsi dari pernyataan p dan q dinyatakan dengan:

$p \wedge q$ dibaca “ p dan q”.

Contoh 10

a. p : Jakarta adalah Ibukota Indonesia.
   q : Jakarta terletak di pulau Jawa.
   $p \wedge q$: Jakarta adalah Ibukota Indonesia dan terletak di pulau Jawa.

b. p : 2 adalah bilangan prima.
   q : 2 adalah bilangan ganjil.
   $p \wedge q$: 2 adalah bilangan prima dan bilangan ganjil.

Nilai kebenaran dari pernyataan majemuk konjungsi dari dua pernyataan p dan q ditentukan sebagai berikut:

<u>Nilai Kebenaran</u>

Jika p bernilai benar dan q bernilai benar maka $p \wedge q$ bernilai benar. Jika salah satu pernyataan bernilai salah maka $p \wedge q$ bernilai salah.

<u>Tabel Kebenaran</u>

p	q	$p \wedge q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	S

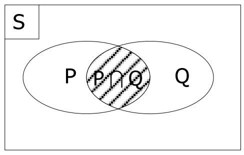
Contoh 11

a. p : Jakarta adalah Ibukota Indonesia. (Benar)
   q : Jakarta terletak di pulau Jawa. (Benar)
   $p \wedge q$: Jakarta adalah Ibukota Indonesia dan terletak di pulau Jawa. (Benar)

b. p : 2 adalah bilangan prima.(Benar)
   q : 2 adalah bilangan ganji.(Salah)
   $p \wedge q$: 2 adalah bilangan prima dan bilangan ganjil.(Salah)

c. p : Harimau adalah binatang buas. (Benar)
   q : Cos(-a) = cos a.(Benar)
   $p \wedge q$: Harimau adalah binatang buas dan cos(-a) = cos a.(Benar)

Pernyataan majemuk konjungsi dapat digambarkan dengan diagram Venn sebagai berikut.



p = $\{x \mid p(x)\}$ dan p benar jika $x \in P$.
q = $\{x \mid q(x)\}$ dan q benar jika $x \in Q$.
$p \cap q = \{x \mid p(x) \wedge q(x)\}$ dan $p \wedge q$ benar jika $x \in P \cap Q$.

Dalam pernyataan majemuk tidak diharuskan adanya hubungan antara pernyataan-pernyataan tunggalnya. Nilai kebenaran pernyataan majemuk tidak ditentukan oleh adanya hubungan melainkan berdasarkan pada definisi (tabel kebenaran).

Contoh 12

Tentukan harga x agar konjungsi dari dua pernyataan berikut bernilai benar

a. p(x) : $2x + 1 = 3$
   q : $4 > 2$

b. p(x) : x adalah bilangan prima kurang dari 5.
   q : Indonesia terletak di Asia Tenggara.

Jawab:

a. Konjungsi dua pernyataan bernilai benar jika komponen dua pernyataan tunggalnya bernilai benar. q bernilai benar agar konjungsi bernilai benar maka p harus bernilai benar, sehingga $x = 1$.
b. Agar p dan q bernilai benar maka x adalah himpunan yang elemennya {2, 3}.

LATIHAN 2

1. Buatlah ingkaran dari kalimat berikut ini!
   a. Semarang adalah ibukota Jawa Tengah.
   b. Panjang diameter sebuah lingkaran adalah dua kali jari-jarinya.
   c. $2 + 3 < 1$.
   d. $2 + 1 = 5$.
   e. 4 bukan merupakan bilangan prima.
   f. Jajaran genjang tidak memiliki simetri setengah putar.
   g. HCl merupakan rumus melekul dari asam klorida.
   h. Tidak benar bahwa $2^3 = 9$.
   i. Semua ikan bernapas dengan insang
   j. Ada bilangan cacah yang bukan bilangan asli.

2. Tentukan pernyataan tunggal dari pernyataan majemuk di bawah ini!
   a. Dua garis berpotongan dan saling tegak lurus.
   b. Segi tiga siku-siku dan sama kaki.
   c. Bintang film itu sangat cantik tetapi tidak ramah.
   d. Dia gadis yang cantik dan lemah lembut.
   e. Setiap segitiga sama kaki mempunyai dua sudut yang sama besar dan dua sisi yang sama panjang.

3. Diketahui p : Saya lulus ujian
   q : Saya sangat bahagia.
   Buatlah pernyataan baru dengan ketentuan berikut ini!
   a. $\sim p$ c. $p \wedge q$ e. $p \wedge \sim q$
   b. $\sim q$ d. $\sim p \wedge q$ f. $\sim p \wedge \sim q$

4. p, q, dan r masing-masing merupakan sebuah pernyataan. Buatlah tabel kebenaran yang menyatakan pernyataan majemuk berikut ini!
   a. $\sim(p \wedge q)$ c. $p \wedge \sim q$ e. $(p \wedge \sim q) \wedge \sim r$
   b. $\sim p \wedge q$ d. $\sim p \wedge \sim q$ f. $(p \wedge \sim r) \wedge q$

5. Jika p : " Hari ini cuaca cerah" dan q : "Matahari bersinar terang". Tulislah masing-masing pernyataan di bawah ini dengan menggunakan lambang p dan q.
   a. Hari ini cuaca cerah dan matahari bersinar terang.
   b. Hari ini cuaca tidak cerah tetapi matahari bersinar cerah.
   c. Hari ini cuaca tidak cerah dan matahari tidak bersinar.
   d. Tidak benar matahari bersinar cerah tetapi cuaca cerah.
   e. Tidak benar hari ini cuaca tidak cerah dan matahari tidak bersinar terang.

6. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut ini!
   a Kota Cirebon terletak di Jawa Barat dan Jepang di Asia Tenggara.
   b 5 adalah bilangan prima dan 4 adalah bilangan genap.
   c Δ sama sisi memiliki 3 sumbu simetri dan persegi memiliki 6 sumbu simetri.
   d 50 adalah habis dibagi 5 dan 3.

7. Diketahui p adalah pernyataan bernilai benar, q bernilai salah dan r bernilai benar. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut ini:
   a. $\sim(p \wedge q)$ c. $p \wedge \sim q$ e. $(p \wedge \sim q) \wedge \sim r$
   b. $\sim p \wedge q$ d. $\sim p \wedge \sim q$ f. $(p \wedge \sim r) \wedge q$

8. Tentukan harga x agar konjungsi dari pernyataan p dan q bernilai benar.
   a. p(x) : $2 - 3x = 6$; q : Indonesia terbagi dalam 33 provinsi.
   b. p : $2 > 1$; q(x) : x adalah bilangan cacah kurang dari 4.
   c. p: Persegi mempunyai empat sisi sama panjang ; q(x) :$\{x|x < 3, x \in A\}$.
   d. p(x) : $x^2 - 3x - 10 = 0$; q : Paris ibukota Perancis.

---

4). Disjungsi

Dua pernyataan p dan q dapat digabung dengan menggunakan kata hubung "atau" untuk membentuk sebuah pernyataan baru. Pernyataan majemuk ini disebut dengan disjungsi. Disjungsi dari pernyataan p dan q ditulis "$p \vee q$" dan dibaca "p disjungsi q atau "p atau q".

Dalam kehidupan sehari-hari kata "atau" berarti salah satu atau kedua-duanya, dapat pula salah satu tetapi tidak kedua-duanya.

Contoh 13

a. p : 5 merupakan bilangan ganjil
   q : Kalimantan adalah pulau terbesar di Indonesia
   $p \vee q$: 5 merupakan bilangan ganjil atau Kalimantan adalah pulau terbesar di Indonesia.

b. p : Dua garis saling sejajar
   q : Dua garis saling berpotongan
   $p \vee q$: Dua garis saling sejajar atau saling berpotongan.

Nilai kebenaran pernyataan majemuk disjungsi dari dua pernyataan p dan q ditentukan sebagai berikut:

<u>Nilai Kebenaran</u>

Jika p bernilai benar dan q bernilai benar atau p dan q kedua-duanya benar maka $p \vee q$ bernilai benar. Jika tidak demikian maka $p \vee q$ bernilai salah. Dengan kata lain disjungsi dari dua pernyataan salah hanya jika kedua komponennya salah.

<u>Tabel Kebenaran</u>

p	q	$p \vee q$
B	B	B
B	S	B
S	B	B
S	S	S

Contoh 14

a. p : Jakarta adalah kota terbesar di Indonesia. (Benar)
   q : Jakarta terletak di pulau Jawa. (Benar)
   $p \vee q$: Jakarta kota terbesar di Indonesia atau terletak di pulau Jawa. (Benar)

b. p : 3 adalah bilangan prima.(Benar)
   q : 3 adalah bilangan genap.(Salah)
   $p \vee q$: 3 adalah bilangan prima atau bilangan genap.(Benar)

c. p : Buaya adalah bukan binatang melata .(Salah)
q : Cos(-a) = -cos a.(Salah)
$p \vee q$: Buaya adalah bukan binatang melata atau cos(-a) = -cos a.(Salah)

Pernyataan majemuk disjungsi dapat digambarkan dengan diagram Venn sebagai berikut.

$p = \{x \mid p(x)\}$ dan p benar jika $x \in P$.
$q = \{x \mid q(x)\}$ dan q benar jika $x \in Q$.
$p \cup q = \{x \mid p(x) \vee q(x)\}$ dan $p \vee q$ benar jika $x \in P \cup Q$.

Dalam pernyataan majemuk tidak diharuskan adanya hubungan antara pernyataan-pernyataan tunggalnya. Nilai kebenaran pernyataan majemuk tidak ditentukan oleh adanya hubungan melainkan berdasarkan pada definisi (tabel kebenaran).

Contoh 15

Tentukan harga x agar disjungsi dari dua pernyataan berikut bernilai benar

a. p(x) : 2x + 1 = 3
q : 4 > 2

b. p(x) : x adalah bilangan asli kurang dari 3.
q : India adalah anggota ASEAN.

Jawab:

a. Disjungsi dua pernyataan bernilai benar jika salah satu atau kedua pernyataan tunggalnya bernilai benar. Karena q bernilai benar maka disjungsi tersebut selalu bernilai benar dan tidak tergantung pada nilai kebenaran p.
b. Agar p v q bernilai benar maka x adalah himpunan yang elemennya {1, 2}.

LATIHAN 3

1. Tentukan pernyataan tunggal dari pernyataan majemuk di bawah ini!
   a. Dua garis berpotongan atau saling tegak lurus.
   b. Segi tiga siku-siku atau sama kaki.
   c. 4 adalah bilangan komposit atau bilangan bulat.
   d. Segitiga sama kaki atau sama sisi.
   e. Setiap segitiga sama kaki mempunyai dua sudut yang sama besar atau dua sisi yang sama panjang.

2. Diketahui p : Dua adalah bilangan prima.
   q : Dua adalah bilangan genap.
   Buatlah pernyataan baru dengan ketentuan berikut ini!
   a. $\sim p$　　c. $p \vee q$　　e. $p \vee \sim q$
   b. $\sim q$　　d. $\sim p \vee q$　　f. $\sim p \vee \sim q$

3. p, q, dan r masing-masing merupakan sebuah pernyataan. Buatlah tabel kebenaran yang menyatakan pernyataan majemuk berikut ini!
   a. $\sim(p \vee q)$　　c. $p \vee \sim q$　　e. $(p \vee q) \vee r$
   b. $\sim p \vee q$　　d. $\sim p \vee \sim q$　　f. $(\sim p \vee r) \vee \sim q$

4. Jika p adalah " Hari ini cuaca cerah" dan q adalah "Matahari bersinar terang". Tulislah masing-masing pernyataan di bawah ini dengan menggunakan lambang p dan q.
   a. Hari ini cuaca cerah atau matahari bersinar terang.
   b. Hari ini cuaca tidak cerah atau matahari bersinar cerah.
   c. Hari ini cuaca tidak cerah atau matahari tidak bersinar.
   d. Tidak benar matahari bersinar cerah atau cuaca cerah.
   e. Tidak benar hari ini cuaca tidak cerah atau matahari tidak bersinar terang.

5. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut ini!
   a. Kota Cirebon terdapat di Jawa Barat atau Jepang di Asia Tenggara.
   b. 5 adalah bilangan prima atau 4 adalah bilangan genap.
   c. Segi tiga sama sisi ada 3 sumbu simetri atau persegi ada 6 sumbu simetri.
   d. Tidak benar bahwa $2 + 2 = 3$ atau $3^2 = 9$.
   e. 50 adalah habis dibagi 5 atau 3.
   f. 8 adalah bilangan ganjil atau delapan habis dibagi lima.
   g. Sudut lancip adalah suatu sudut yang besarnya 90^0 atau Candi Borobudur terletak di Jawa Tengah.
   h. Dua buah bidang datar sejajar atau berpotongan.
   i. Setiap warga Negara yang berumur 17 tahun atau sudah kawin wajib memiliki KTP.

6. Diketahui p adalah pernyataan bernilai benar, q bernilai salah dan r bernilai benar. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan berikut ini:
   a. $\sim(p \vee q)$
   b. $\sim p \vee q$
   c. $p \vee \sim q$
   d. $\sim p \vee \sim q$
   e. $(p \vee q) \vee r$
   f. $(\sim p \vee r) \vee \sim q$

7. Tentukan harga x agar disjungsi dari pernyataan p dan q bernilai benar.
   a. $p(x) : 2 – 3x = 6$; q : Indonesia terbagi dalam 33 provinsi daerah tingkat 1.
   b. $p : 2 < 1$; $q(x)$: x adalah bilangan cacah kurang dari 4.
   c. p : Bujur sangkar mempunyai empat sisi sama panjang; $q(x) : \{x|x < 3, x \in A\}$.
   d. $p(x) : x^2 – 3x – 10 = 0$; q : Paris ibukota Jerman.

---

5). Implikasi

Dua pernyataan p dan q dapat dibuat menjadi satu pernyataan baru atau kalimat majemuk menjadi bentuk "jika p maka q". Pernyatan baru yang disusun dengan cara seperti ini disebut pernyataan implikasi atau peryataan bersyarat/kondisional dari pernyataan p dan q. Bagian "jika p" dinamakan alasan atau sebab (antesenden /hipotesis) dan bagian "maka q" dinamakan kesimpulan atau akibat (konklusi atau konsekuen). Implikasi "jika p maka q" dalam bentuk simbol ditulis:

$p \Rightarrow q$ (dibaca "jika p maka q")

Implikasi $p \Rightarrow q$ dapat pula dibaca sebagai berikut:
- q hanya jika p
- q syarat perlu bagi p
- p syarat cukup bagi q

Contoh 16

a. p : 2 adalah faktor dari 6.
   q : 6 adalah bilangan genap.
   $p \Rightarrow q$: Jika 2 adalah faktor dari 6 maka 6 adalah bilangan genap.

b. p : Sekarang hari mendung.
   q : Sekarang akan turun hujan.
   $p \Rightarrow q$: Jika sekarang hari mendung maka sekarang akan turun hujan.

c. p : $3 + 5 = 10$.
   q : 3 adalah bilangan prima.
   $p \Rightarrow q$: Jika $3 + 5 = 10$ maka 3 adalah bilangan prima.

Nilai kebenaran pernyataan implikasi ditentukan oleh nilai kebenaran masing masing komponennya bukan oleh hubungan dua pernyataan tunggalnya. Nilai kebenaran dari implikasi ditentukan sebagai berikut:

Nilai Kebenaran

Implikasi $p \Rightarrow q$ bernilai salah jika p benar dan q salah, dalam kemungkinan lain $p \Rightarrow q$ bernilai benar.

Tabel Kebenaran

p	q	$p \Rightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	B
S	S	B

Contoh 17

a. p : $2 > 3$.
   q : 2 adalah bilangan genap.
   $P \Rightarrow q$: Jika $\underbrace{2 > 3}_{S}$ maka $\underbrace{\text{2 adalah bilangan genap}}_{B}$.
   Sehingga implikasi bernilai benar, karena alasan salah dan kesimpulan benar.

b. p : E adalah nomor kendaraan untuk wilayah Cirebon.
   q : $1 + 4 = 7$.
   $p \Rightarrow q$:Jika $\underbrace{\text{E adalah nomor kendaraan untuk wilayah Cirebon}}_{B}$ maka $\underbrace{1 + 4 = 7}_{S}$.
   Sehingga implikasi ini bernilai salah, karena alasan benar kesimpulan salah.

c. p : Hasil kali dua bilangan negatif adalah bilangan positif.
   q : $-1 < 0$.
   $p \Rightarrow q$:Jika $\underbrace{\text{Hasil kali dua bilangan negatif adalah bilangan positif}}_{B}$ maka $\underbrace{-1 < 0}_{B}$.
   Sehingga implikasi ini bernilai benar, karena alasan dan kesimpulan benar.

Contoh 18

Tentukan harga x agar implikasi berikut ini bernilai benar!

a. Jika $2x - 4 = -6$ maka keliling lingkaran dengan jari-jari 2 cm adalah 4π cm
b. Jika $3 > 2$ maka $x^2 - 3x = 0$.
c. Jika Denpasar bukan ibukota Bali maka $x + 4 = 1$.

Jawab:

a. Konklusi dari implikasi yaitu keliling lingkaran dengan jari-jari 2 cm adalah 4π cm merupakan pernyataan yang bernilai benar, agar implikasi tersebut bernilai benar maka alasan dapat bernilai salah atau bernilai benar, sehingga seluruh harga x tidak mempengaruhi nilai implikasi.

b. Hipotesis dari implikasi adalah 3 > 2 bernilai benar, agar implikasi tersebut bernilai benar alasan juga bernilai benar, sehingga:

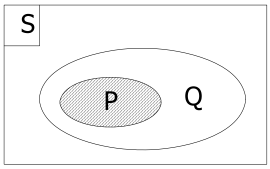
$$x^2 - 3x = 0$$
$$x(x - 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ atau } x = 3$$

c. Hipotesis dari implikasi adalah Denpasar bukan ibukota Bali bernilai salah, agar implikasi tersebut bernilai benar maka alasan dapat bernilai salah atau bernilai benar, seluruh harga x tidak mempengaruhi nilai implikasi.

Implikasi Logis

Misalkan P himpunan penyelesaian dari p(x) dan Q himpunan penyelesaian dari q(x) dimana P = {x | p(x) } dan Q = {x | q(x) }. Untuk $P \subset Q$ berarti setiap x yang menyebabkan p(x) bernilai benar, tentu menyebabkan q(x) bernilai benar atau $p(x) \Rightarrow q(x)$ menjadi pernyataan yang benar. Uraian tersebut dapat disajikan dalam bentuk diagram Venn berikut ini;

P = {x | p(x) } dan p benar jika $x \in P$
Q = {x | q(x) } dan p benar jika $x \in Q$
Implikasi $p \Rightarrow q$ benar jika $P \subset Q$.]



Contoh 19

p(x) : $x > 5$, $x \in R$
q(x) : $x > 2$, $x \in R$
$p(x) \Rightarrow q(x)$: Bernilai benar, sebab $\{x \mid x > 5, x \in R\} \subset \{x \mid x > 2, x \in R\}$.

LATIHAN 4

1. Buatlah pernyataan baru yang berbentuk implikasi dari pernyataan-pernyataan berikut ini, kemudian tentukan nilai kebenaran dari implikasi yang diperoleh!
   a. p: 5 < 3 ; q: -3 < -5
   b. p: x = -y ; q: x + y = 0 dimana $x, y \in R$
   c. p: a.b = 0 ; q: a = 0 atau b = 0
   d. p: ABC segitiga sama sisi ; q: ABC adalah segitiga sama kaki
   e. p: Hasil kali dua gradien sama dengan –1 ; q: Dua garis tersebut tegak lurus.
   f. p: x > 1; q: x + 3 > 3

2. Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan tunggal dari implikasi berikut ini!
   a. Jika bilangan habis dibagi dua maka bilangan itu adalah genap.
   b. Jika besar sudut-sudut segi tiga sama maka panjang sisi-sisi segitiga sama.
   c. Jika $x \in A \cap B$ maka $x \in A$ dan $x \in B$.
   d. Jika panjang sisi segi empat sama maka ia adalah suatu persegi panjang.
   e. Jika 9 merupakan bilangan ganjil maka $4 + 5 \neq 9$.
   f. Jika log 10 = 1 maka log 1 = 0.

3. Lengkapilah pernyataan berikut agar menjadi suatu implikasi yang bernilai benar!
   a. Jika P(1,2) dicerminkan terhadap sumbu y maka bayangannya adalah . . .
   b. Jika $x^2 + bx + c = 0$ mempunyai dua akar sama maka diskriminannya = . . .
   c. Jika a > b dan b > c maka a . . .
   d. Jika n bilangan ganjil maka 2n adalah bilangan . . .

4. Diketahui p : Saya lulus ujian; q : Saya akan melanjutkan ke perguruan tinggi. Buatlah pernyataan yang disimbolkan dengan implikasi berikut ini.
   a. $p \Rightarrow q$
   b. $\sim p \Rightarrow q$
   c. $p \Rightarrow \sim q$
   d. $\sim p \Rightarrow \sim q$
   e. $\sim(p \Rightarrow q)$
   f. $\sim(p \Rightarrow \sim q)$

5. Diketahui p adalah pernyataan yang bernilai benar, q bernilai salah dan r bernilai benar. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan majemuk berikut ini.
   a. $p \Rightarrow q$
   b. $\sim p \Rightarrow q$
   c. $p \Rightarrow (\sim q \vee r)$
   d. $\sim p \Rightarrow \sim q$
   e. $\sim(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
   f. $\sim(p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim r$

6. Tentukan $x \in R$ sehingga $p(x) \Rightarrow q(x)$ bernilai salah.
   a. p(x): $x + 1 < 4$; q(x) : $2 + 3 < 1$
   b. p(x): $2^x = 4$; q(x) : $3^2 = 8$

---

6). Biimplikasi atau ekuivalensi

Dua pernyataan p dan q dapat dibuat menjadi satu pernyataan baru atau kalimat majemuk menjadi bentuk "p jika dan hanya jika q". Pernyataan baru yang disusun dengan cara seperti ini disebut pernyataan biimplikasi atau ekuivalensi dari pernyatan p dan q. Biimplikasi dari pernyataan p dan q dalam bentuk simbol ditulis:

$p \Leftrightarrow q$ (dibaca "p jika dan hanya jika q")

Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ dapat pula dibaca sebagai berikut:
- ❖ Jika p maka q dan jika q maka p
- ❖ p syarat perlu dan cukup bagi q
- ❖ q syarat perlu dan cukup bagi p

Nilai bebenaran dari pernyataan biimplikasi ditentukan sebagai berikut.

Nilai Kebenaran

Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar jika p dan q mempunyai nilai kebenaran sama. Dalam kemungkinan lain biimplikasi bernilai salah.

Tabel Kebenaran

p	q	$p \Leftrightarrow q$
B	B	B
B	S	S
S	B	S
S	S	B

Contoh 20

a. p : 5 > 1
   q : $3^2 = 9$
   $p \Leftrightarrow q$: $\underbrace{5 > 1}_{B}$ jika dan hanya jika $\underbrace{3^2 = 9}_{B}$.
   Sehingga biimplikasi bernilai benar karena mempunyai nilai kebenaran sama.

b. p : $5 < 1$
q : $3^2 = 9$
$p \Leftrightarrow q$: $\underbrace{5 < 1}_{S}$ jika dan hanya jika $\underbrace{3^2 = 9}_{B}$.
Sehingga biimplikasi bernilai salah karena mempunyai nilai kebenaran berbeda.

c. p : Jakarta adalah bukan kota terbesar di Indonesia
q : $3^2 \neq 9$
$p \Leftrightarrow q$: $\underbrace{\text{Jakarta bukan kota terbesar di Indonesia}}_{S}$ jika dan hanya jika $\underbrace{3^2 \neq 9}_{S}$.
Sehingga biimplikasi bernilai benar karena mempunyai nilai kebenaran sama.

Contoh 21
Tentukan harga x agar biimplikasi berikut bernilai benar.
a. $2 - x < 1 - 2x$ jika dan hanya jika Surabaya ibukota provinsi Jawa Timur.
b. $3 < 2$ jika dan hanya jika x bilangan asli kurang dari 3.

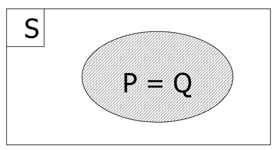
Jawab:
a. Biimplikasi dari dua pernyataan akan bernilai benar jika komponennya mempunyai nilai kebenaran yang sama.
Surabaya ibukota provinsi Jawa Timur adalah pernyataan yang benar. Agar biimplikasi bernilai benar maka x haruslah merupakan penyelesaian dari

$$2 - x < 1 - 2x$$
$$2x - x < 1 - 2$$
$$x < -1$$

b. $3 < 2$ adalah pernyataan yang bernilai salah. Agar biimplikasi bernilai benar maka x haruslah bukan merupakan bilangan asli yang kurang dari 3. Sehingga x adalah himpunan bilangan {3, 4, 5, . . .}.

Biimplikasi Logis
Misalkan P dan Q masing-masing merupakan himpunan penyelesaian kalimat terbuka p(x) dan q(x) dari semesta pembicaraan S, maka $p(x) \Leftrightarrow q(x)$ menjadi $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar bila p = q

P = {x | p(x) } dan p benar jika $x \in P$
Q = {x | q(x) } dan p benar jika $x \in Q$
Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ benar jika P = Q.



Gambar 6-11:
Diagram Venn Biimplikasi Logis

Contoh 22
p(x) : $x + 4 = 5$, $x \in R$
q(x) : $2x - 1 = 3$, $x \in R$
$p(x) \Leftrightarrow q(x)$ bernilai benar untuk x = 1 dan x = 2.
$q(x) \Leftrightarrow q(x)$ tidak pernah bernilai salah.

7). Nilai Kebenaran Pernyataan Majemuk

Nilai kebenaran dari suatu pernyataan p, q, r, . . . yang kompleks dan dalam bentuk simbol yang menggunakan operasi pernyataan (negasi, konjungsi, disjungsi, implikasi dan biimplikasi) dapat ditentukan dengan menggunakan tabel kebenaran.

Contoh 23

Tentukan nilai kebenaran dari pasangan pernyataan majemuk berikut dalam satu tabel!

a. $\sim(p \wedge q)$; $\sim p \vee \sim q$

b. $\sim(p \vee q)$; $\sim p \wedge \sim q$

c. $\sim(p \Rightarrow q)$; $p \wedge \sim q$

d. $\sim(p \Leftrightarrow q)$; $\sim p \Leftrightarrow q$

Jawab:

a.

p	q	~ p	~ q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	S	B	B
1	2	3	4	5	6	7

Keterangan:

- Kolom ke 1 dan ke 2 merupakan kemungkinan dari dua pernyataan sehingga terdiri dari 4 kemungkinan (baris) yang diperoleh $2^2 = 4$.
- Kolom ke 3 dan 4 merupakan negasi / ingkaran dari pernyataan pada kolom ke 1 dan 2.
- Kolom ke 5 merupakan pernyataan konjungsi dan
- Kolom ke 6 merupakan negasi dari pernyataan konjungsi.
- Kolom ke 7 merupakan disjungsi dari kolom ke 3 dan ke 4.

Nilai kebenaran pada kolom ke 6 adalah ekuivalen atau setara dengan pada kolom ke 7 adalah SBBB, sehingga dapat disimpulkan bahwa negasi dari pernyataan konjungsi $p \wedge q$ adalah $\sim p \vee \sim q$ dan dapat ditulis sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q}$$ Hukum De Morgan

Cara lain untuk membuat tabel kebenaran adalah sebagai berikut:

~	(p	$\wedge$	q)
S	B	**B**	B
B	B	**S**	S
B	S	**S**	B
B	S	**S**	S
1	2	3	4

~	p	$\vee$	~	q
S	B	**S**	**S**	B
S	B	**B**	**B**	S
B	S	**B**	**S**	B
B	S	**B**	**B**	S
5	6	7	8	9

Keterangan:

- Kolom ke 2, 4, 6 dan 9 merupakan kemungkinan nilai kebenaran dari p dan q.
- Kolom ke 3 merupakan konjungsi p dan q, yaitu $p \wedge q$
- Kolom ke 1 nilai dari $\sim (p \wedge q)$

b.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	B	S	S
S	B	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	B	B
1	2	3	4	5	6	7

Nilai kebenaran pada kolom ke 6 adalah ekuivalen atau setara dengan pada kolom ke 7 adalah SSSB, sehingga dapat disimpulkan bahwa negasi dari pernyataan disjungsi $p \vee q$ adalah $\sim p \wedge \sim q$ dan dapat ditulis sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q}$$ Hukum De Morgan

c.

p	q	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
B	B	S	B	S	S
B	S	B	S	B	B
S	B	S	B	S	S
S	S	B	B	S	S
1	2	3	4	5	6

Nilai kebenaran pada kolom ke 5 adalah ekuivalen atau setara dengan pada kolom ke 6 adalah SBSS, sehingga dapat disimpulkan bahwa negasi dari pernyataan implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $p \wedge \sim q$ dan dapat ditulis sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q}$$

d.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim p \Leftrightarrow q$
B	B	S	S	B	S	S
B	S	S	B	S	B	B
S	B	B	S	S	B	B
S	S	B	B	B	S	S
1	2	3	4	5	6	7

Nilai kebenaran pada kolom ke 6 adalah ekuivalen atau setara dengan pada kolom ke 7 adalah SBBS, sehingga dapat disimpulkan bahwa negasi dari pernyataan biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ adalah $\sim p \Leftrightarrow q$ dan dapat ditulis sebagai berikut.

$$\boldsymbol{\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q}$$ atau $$\boldsymbol{\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q}$$

Contoh 24

Tentukan ingkaran atau negasi dari pernyataan majemuk berikut ini!

a. 2 adalah bilangan genap atau 3 merupakan bilangan ganjil.
b. $4 + 2 = 5$ dan $4 < 5$.
c. Jika hari mendung maka akan turun hujan.
d. 3 adalah bilangan ganjil jika dan hanya jika 6 bilangan genap.

Jawab:

Untuk menentukan negasi dari pernyatan tersebut gunakan hasil pada **Contoh** 23.

a. 2 adalah bukan bilangan genap dan 3 bukan merupakan bilangan ganjil.
b. $4 + 2 \neq 5$ atau $4 \geq 5$.

c. Hari mendung dan (tetapi) tidak akan turun hujan.
d. 3 adalah bukan bilangan ganjil jika dan hanya jika 6 bilangan genap.

Contoh 25
Buktikan bahwa :
a. $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
b. $p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

Jawab:
Untuk membuktikan dua pernyataan yang berbentuk simbol digunakan tabel kebenaran sebagai berikut.

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
B	B	S	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	S	B	B	B
1	2	3	4	5

Lihatlah hasil yang diperoleh pada kolom ke 4 dan ke 5 yaitu mempunyai nilai kebenaran yang sama BSBB. Sehingga dua pernyataan pada kedua kolom tersebut adalah ekuivalen yaitu $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$. (terbukti)
b.

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Leftrightarrow q$	$(\sim p \vee q)$	$(\sim q \vee p)$	$(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S	B	S
S	B	B	S	S	B	S	S
S	S	B	B	B	B	B	B
1	2	3	4	5	6	7	8

Lihatlah hasil yang diperoleh pada kolom ke 5 dan ke 8 yaitu mempunyai nilai kebenaran yang sama BSSB. Sehingga dua pernyataan pada kedua kolom tersebut adalah ekuivalen yaitu $p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$. (terbukti)

Contoh 26
Buatlah pernyataan baru yang senilai dengan pernyataan berikut!
a. Jika saya lulus SMK maka saya akan bekerja
b. Saya akan pergi jika dan hanya jika hari tidak hujan.

Jawab:
Gunakan hasil pada contoh 27 untuk menentukan dua pernyataan yang ekuivalen atau mempunyai nilai kebenaran sama.
a. "Jika saya lulus SMK maka saya akan bekerja" adalah suatu pernyataan implikasi, misalkan $p \Rightarrow q$ maka ia akan ekuivalen/setara dengan $\sim p \vee q$. Sehingga pernyataan setaranya adalah "Saya tidak lulus SMA atau saya akan kuliah"
b. "Saya akan pergi jika dan hanya jika hari tidak hujan" merupakan pernyatan biimplikasi, maka gunakan $p \Leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$. Sehingga pernyataan setaranya adalah "Saya tidak akan pergi atau hari tidak hujan dan hari hujan atau saya akan pergi".

c. Rangkuman

1. Ingkaran adalah suatu pernyataan menyangkal dari pernyataan yang diberikan.
2. Pernyataan majemuk adalah suatu pernyataan baru yang diperoleh dari penggabungan beberapa pernyataan tunggal dengan kata hubungan logika (misalnya : dan, atau, tetapi).
3. Konjungsi dari dua buah pernyataan p dan q adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari pernyataan p dan q dengan menggunakan kata penghubung "dan".
   Konjungsi $p \wedge q$ bernilai benar jika p dan q keduanya benar, yang lain salah
4. Disjungsi dari dua buah pernyataan p dan q adalah pernyataan majemuk yang dibentuk dari pernyataan p dan q yang dirangkai dengan kata penghubung "atau".
   Disjungsi $p \vee q$ bernilai salah jika p dan q keduanya bernilai salah, yang lain benar
5. Implikasi adalah pernyataan majemuk yang disusun dari dua buah pernyataan p dan q dalam bentuk "Jika p maka q".
   Implikasi $p \Rightarrow q$ bernilai salah Jika p bernilai benar dan q bernilai salah, yang lain benar.
6. Biimplikasi atau implikasi dua arah atau pernyataan ekuivalen adalah pernyataan majemuk yang disusun dari dua buah pernyataan p dan q dalam bentuk "p jika dan hanya jika q".
   Biimplikasi $p \Leftrightarrow q$ bernilai benar jika p dan q bernilai sama , yang lain salah
7. Ingkaran dari Konjungsi adalah: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
8. Ingkaran dari Disjungsi adalah : $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
9. Ingkaran dari Implikasi adalah : $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
10. Ingkaran dari Biimplikasi adalah: $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q)$ atau
    $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q)$

LATIHAN 5

1. Buatlah pernyataan baru yang berbentuk biimplikasi dari pernyataan-pernyataan berikut ini, kemudian tentukan nilai kebenaran dari biimplikasi yang diperoleh!
   a. p: $3 < 5$; q: $-3 < -5$
   b. p: $A \subset B$; q: $A \cap B = A$
   c. p: $a = b$; q: $a + c = b + c$
   d. p: ABC segitiga suku-siku di A; q: $a^2 = b^2 + c^2$.
   e. p: n bilangan ganjil ; q: n^2 bilangan ganjil, $n \in B$.
   f. p: $x = y$; q: $-x = -y$.

2. Tentukan nilai kebenaran dari pernyataan implikasi berikut ini!
   a. $a < b$ jika dan hanya jika $ac < bc$.
   b. Jajaran genjang tidak mempunyai simetri lipat $\Leftrightarrow 2 + 3 < 5$.
   c. $\sin 30^o = ½ \Leftrightarrow \cos 90^o = 1$.

d. $a > b$ dan $b > c \Leftrightarrow a > c$.
e. n bilangan ganjil $\Leftrightarrow$ 2n adalah bilangan genap.

3. Diketahui p: ΔABC sama kaki dan q : $\angle A = \angle B$. Buatlah pernyataan yang disimbolkan dengan biimplikasi berikut ini.
   a. $p \Leftrightarrow q$ c. $p \Leftrightarrow \sim q$ e. $\sim(p \Leftrightarrow q)$
   b. $\sim p \Leftrightarrow q$ d. $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ f. $\sim(p \Leftrightarrow \sim q)$

4. Tentukan nilai x agar biimplikasi berikut bernilai benar!
   a. $2x + 3 = 4$ jika dan hanya jika $2 > 3$.
   b. H_2O rumus molekul untuk senyawa air jika dan hanya jika x bilangan prima genap.
   c. Harimau adalah binatang buas jika dan hanya jika $x - 3 = 4$.
   d. $x^2 - 3x - 4 = 0$ jika dan hanya jika x merupakan bilangan ganjil.
   e. x merupakan himpunan faktor dari 6 jika dan hanya jika 6 bilangan komposit.

5. Buatlah ingkaran atau negasi dari pernyataan berikut ini!
   a. Dodo membeli baju atau celana.
   b. 2 bilangan prima atau genap.
   c. Ahmad rajin belajar dan rangking pertama.
   d. Cos 30^o < sin 45^o dan $1+ 4 = 5$.
   e. Jika ia rajin belajar maka ia naik kelas.
   f. Jika 42 bilangan genap maka habis di bagi 2.
   g. ABC segi tiga sama sisi jika dan hanya jika setiap sudutnya sama.
   h. Ia akan naik kelas jika dan hanya jika ia rajin belajar.

6. Tetukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk berikut ini!
   a. $p \vee \sim q$ d. $(p \vee \sim q) \Rightarrow \sim p$
   b. $\sim p \wedge q$ e. $(\sim p \Rightarrow q) \wedge \sim q$
   c. $(p \vee q) \vee p$ f. $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)$

7. Misalkan p bernilai benar dan q bernilai salah. Berdasarkan ketentuan tersebut, tentukan nilai kebenaran dari pernyataan majemuk berikut ini!
   a. $p \vee q$ d. $(p \vee q) \Rightarrow \sim p$
   b. $\sim p \wedge \sim q$ e. $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge \sim q$
   c. $(p \vee q) \vee \sim p$ f. $(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q)$

8. Salin dan lengkapilah tabel kebenaran di bawah ini!

P	q	~q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)$
B	B					
B	S					
S	B					
S	S					

9. *Tautologi* adalah pernyataan majemuk yang selalu benar untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan komponen-komponennya. Sedangkan pernyataan majemuk yang selalu salah untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan komponen-komponennya disebut *kontradiksi*. Lengkapi dan periksalah hasil akhir dari pernyataan pada tabel berikut, apakah tautologi atau kontradiksi!

a. $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

P	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
B	B			
B	S			
S	B			
S	S			

b. $(\sim q \Rightarrow p) \wedge \sim(p \vee q)$

P	q	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim q \Rightarrow p$	$(\sim q \Rightarrow p) \wedge \sim(p \vee q)$
B	B				
B	S				
S	B				
S	S				

B.3 Konvers , Invers dan Kontraposisi

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menjelaskan pengertian Invers, Konvers dan Kontraposisi dari implikasi
- Menentukan Invers, Konvers dan Kontraposisi dari implikasi
- Menentukan nilai kebenaran Invers, Konvers dan Kontraposisi dari implikasi
- Menjelaskan kalimat berkuantor
- Menegasikan kalimat berkuantor

b. Uraian Materi

1). Konvers , Invers dan Kontraposisi

Dari suatu pernyataan implikasi $p \Rightarrow q$ dapat dibuat pernyataan baru yaitu:
a. $q \Rightarrow p$, disebut konvers dari implikasi
b. $\sim p \Rightarrow \sim q$, disebut invers dari implikasi
c. $\sim q \Rightarrow \sim p$, disebut kontraposisi dari implikasi

Contoh 27
Misalkan p : Segitiga ABC sama sisi dan q: Ketiga sudutnya sama besar. Implikasi dari pernyataan p dan q adalah
$p \Rightarrow q$ "Jika segitiga ABC sama sisi maka ketiga sudutnya sama besar".

a. Konversnya $q \Rightarrow p$:
"Jika ketiga sudutnya sama besar maka segitiga ABC sama sisi".

b. Inversnya $\sim p \Rightarrow \sim q$:
"Jika segitiga ABC bukan sama sisi maka ketiga sudutnya tidak sama besar".

c. Kontraposisi $\sim q \Rightarrow \sim p$:
"Jika ketiga sudutnya tidak sama besar maka segitiga ABC bukan sama sisi".

Sekarang perhatikan tabel di bawah ini untuk mengetahui hubungan implikasi, konvers, invers dan kontraposisi berikut ini.

				Implikasi	konvers	Invers	Kontraposisi
P	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	B	B	B
B	S	S	B	S	B	B	S
S	B	B	S	B	S	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
1	2	3	4	5	6	7	8

Jika kita perhatikan dari tabel di atas dapat kita ambil beberapa kesimpulan, yaitu:

- Nilai kebenaran pada implikasi ekuivalen dengan nilai kebenaran pada kontraposisi yaitu BSBB, sehingga $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$.
- Nilai kebenaran pada konvers ekuivalen dengan nilai kebenaran pada invers yaitu BBSB, sehingga $q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$.

Contoh 28

Tentukan pernyataan yang ekuivalen atau setara dengan pernyataan berikut ini!

a. Jika hari hujan maka saya tidak datang.

b. Jika dua sisi segitiga sama maka segi tiga tersebut sama kaki.

Jawab:

Untuk menentukan pernyataan baru yang setara atau ekuivalen dengan pernyataan implikasi dapat kita gunakan hasil pada tabel di atas yaitu kita buat kontraposisinya.

a. Implikasi : Jika hari hujan maka saya tidak datang.
   Kontraposisi : Jika saya datang maka hari tidak hujan.

b. Implikasi : Jika dua sisi segitiga sama maka segi tiga tersebut sama kaki.
   Kontraposisi : Jika segitiga tidak sama kaki maka dua sisi segitiga tidak sama.

2). Kalimat Berkuantor (Pengayaan)

Suatu kalimat terbuka dapat diubah menjadi pernyataan jika variabel dari kalimat tersebut disubstitusikan dengan suatu konstanta tertentu.

Misalnya:

Kalimat terbuka $x + 4 = 3$ untuk $x \in R$.

Jika $x = -1$, maka kalimat terbuka tersebut menjadi suatu pernyataan yang bernilai benar.

Jika $x = 2$, maka kalimat terbuka tersebut menjadi suatu pernyataan yang bernilai salah.

Cara lain untuk mengubah kalimat terbuka menjadi suatu pernyataan adalah dengan menggunakan *kuantor.*

Terdapat dua jenis kuantor, yaitu

a. Kuantor universal

b. Kuantor eksistensial

3). Kuantor Universal

Kuantor universal ditulis dengan lambang " $\forall$ " dan dibaca "untuk semua" atau "untuk setiap". Jika p(x) adalah kalimat terbuka dan diberi kuantor universal maka akan menjadi suatu pernyataan dan ditulis $(\forall x)\ p(x)$ yang dibaca:

- ❖ Untuk setiap harga x berlaku sifat p.
- ❖ Untuk semua harga x mempunyai sifat p.

Bentuk $(\forall x)\ p(x)$ merupakan pernyataan deklaratif yang mempunyai nilai kebenaran dapat benar atau salah, yaitu jika tidak dapat ditemukan x yang tidak bersifat p(x) maka $(\forall x)\ p(x)$ bernilai benar. Jika dapat ditemukan x yang tidak bersifat p(x), maka p(x) bernilai salah.

Contoh 29

Setiap kucing mempunyai ekor.

Pernyataan ini bernilai benar karena tidak ditemukan kucing yang tidak berekor.

Contoh 30

$\forall x$ bilangan real, $x^2 = 1$.

Pernyataan ini bernilai salah, walaupun berlaku untuk x = -1 atau x = 1 yaitu $1^2 = 1$ dan $(1)^2 = 1$ tetapi tidak berlaku untuk semua x (misalnya x = 3, maka $3^2 \neq 1$).

4). Kuantor Eksistensial

Kuantor eksistensial ditulis dengan lambang " $\exists$ " dan dibaca "ada/beberapa" atau "sekurang-kurangnya satu". Jika p(x) adalah kalimat terbuka dan diberi kuantor eksistensial maka akan menjadi suatu pernyataan dan ditulis $(\exists x)\ p(x)$ yang dibaca:

- ❖ Ada x sedemikian sehingga berlaku sifat p.
- ❖ Beberapa x mempunyai sifat p.
- ❖ Sekurang-kurangnya satu x dengan sifat p.

Bentuk $(\exists x)\ p(x)$ merupakan pernyataan deklaratif yang mempunyai nilai kebenaran dapat benar atau salah yaitu jika dapat ditemukan sekurang-kurangnya satu x yang bersifat p(x) maka $(\exists x)\ p(x)$ benar. Jika tidak dapat ditemukan satupun x yang bersifat p(x) maka $(\exists x)\ p(x)$ salah.

Contoh 31

$\exists x$ bilangan asli, $x < 1$

Pernyatan bernilai salah karena tidak dapat ditentukan x bilangan asli yang < 1.

Contoh 32

$\exists x$ bilangan prima, x merupakan bilangan genap.

Pernyataan tersebut bernilai benar karena ada bilangan prima yang merupakan bilangan genap yaitu 2.

5). Negasi Pernyataan Berkuantor

Negasi pernyataan "Untuk semua x berlaku p(x)" adalah "Tidak benar bahwa untuk semua x berlaku p(x)" atau dengan kata lain "sekurang-kurangnya ada satu x sedemikian sehingga p(x) tidak berlaku". Dengan menggunakan lambang kita tuliskan sebagai berikut:

$$\sim (\forall x)\ p(x) \equiv (\exists\ x) \sim p(x)$$

Contoh 33

a. p : Semua kucing mempunyai ekor
~ p : Tidak benar semua kucing mempunyai ekor.
~ p : Ada kucing yang tidak mempunyai ekor.
~ p : Beberapa kucing tidak mempunyai ekor.

b. p : $(\forall x)\ (x^2 + 1 > 0)$
~ p : Tidak benar $(\forall x)\ (x^2 + 1 > 0)$
~ p : $(\exists x)\ (x^2 + 1 \leq 0)$

Negasi pernyataan "Ada x berlaku p(x)" adalah "Tidak benar bahwa ada x berlaku p(x)" atau dengan kata lain "Untuk semua x sedemikian sehingga p(x) tidak berlaku". Dengan menggunakan lambang kita tuliskan sebagai berikut:

$$\sim (\exists x)\ p(x) \equiv (\forall x)\ \sim p(x)$$

Contoh 34

a. p : Ada anak yang gemar bermain bola.
~ p : Tidak benar Ada anak yang gemar bermain bola.
~ p : Semua anak tidak gemar bermain bola.

b. p : $(\exists x)\ (x^2 + 3x + 2 = 0)$.
~ p : Tidak benar $(\exists x)\ (x^2 + 3x + 2 = 0)$.
~ p : $(\forall x)\ (\exists x)\ (x^2 + 3x + 2 \neq 0)$.

c. Rangkuman

1. Konvers dari $p \Rightarrow q$ adalah $q \Rightarrow p$
2. Invers dari $p \Rightarrow q$ adalah $\sim p \Rightarrow \sim q$
3. Kontraposisi dari $p \Rightarrow q$ adalah $\sim q \Rightarrow \sim p$
4. Implikasi senilai dengan kontraposisinya, konvers senilai dengan invers
5. Kuantor universal ditulis dengan lambang " $\forall$ " dan dibaca "untuk semua" atau "untuk setiap".
6. Kuantor eksistensial ditulis dengan lambang " $\exists$ " dan dibaca "ada/beberapa"
7. Negasi pernyataan "Ada x berlaku p(x)" adalah " "Untuk semua x sedemikian sehingga p(x) tidak berlaku". Dengan menggunakan lambang sebagai berikut:

$$\sim (\exists x)\ p(x) \equiv (\forall x)\ \sim p(x)$$

8. Negasi pernyataan "Untuk semua x berlaku p(x)" adalah " ada satu x sedemikian sehingga p(x) tidak berlaku". Dengan menggunakan lambang sebagai berikut:

$$\sim (\forall x)\ p(x) \equiv (\exists x) \sim p(x)$$

LATIHAN 6

1. Tentukan konvers, invers dan kontraposisi dari pernyatan berikut ini!
   a. Jika matahari bersinar maka hari tidak hujan
   b. Jika mawar berwarna merah maka melati berwarna putih
   c. Jika pajak dinaikkan maka pendapatan negara bertambah.
   d. Jika suatu bilangan habis di bagi 2 maka bilangan tersebut genap.
   e. Jika $2 < 3$ maka $-2 > -3$.
   f. JIka $x = 1$ maka $x^2 - 1 = 0$.
   g. Jika semua murid senang matematika maka ada murid yang tidak suka Fisika.
   h. Jika guru tidak datang maka semua murid merasa senang.
   i. Jika tidak ada investasi maka perekonomian macet.
   j. Jika setiap sudut segi tiga sama maka segitiga sama sisi.

2. Buatlah ingkaran dari pernyataan berikut ini!
   a. Setiap siswa tidak diperbolehkan merokok.
   b. Ada bilangan prima yang merupakan bilangan genap.
   c. Setiap bilangan real mempunyai invers penjumlahan.
   d. Beberapa pegawai mendapatkan gaji lebih dari Rp. 10.000.000,00.
   e. Terdapat bilangan real x sehingga $x^2 - 1 < 0$.
   f. Ada bilangan bulat x sehingga $x + 3 > 1$.
   g. $\exists x$ bilangan real, $x < 1$.
   h. $\exists x \in \{0, 1, 2, 3\}$, x bilangan prima.
   i. $\forall x$ bilangan real, $x^2 + 1 \neq 0$.
   j. $\forall x$ bilangan real, $x^2 = x$.

3. Untuk semesta pembicaraan himpunan bilangan asli, tentukan nilai kebenaran dari setiap pernyataan berikut ini!
   a. $(\forall x)\ (\forall y)\ (x^2 + y < 8)$
   b. $(\exists x)\ (\forall y)\ (x^2 + y < 8)$
   c. $(\forall x)\ (\exists y)\ (x^2 + y < 8)$.
   d. $(\exists x)\ (\exists y)\ (x^2 + y < 8)$.

B.4 Penarikan Kesimpulan

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menjelaskan pengertian modus ponens, modus tollens dan silogisme
- Menarik kesimpulan dengan menggunakan modus ponens, modus tollens dan silogisme
- Menentukan kesahihan penarikan kesimpulan

b. Uraian Materi

Dalam mempelajari matematika kita telah menemukan dan memakai banyak kebenaran matematika yang dinamakan dalil. Sebagai contoh,
i). "Jumlah sudut-sudut segitiga adalah 180^o".
ii). "Untuk setiap $x \in R$ berlaku $x^2 \geq 0$".

Untuk membuktikan dalil atau hasil baru, kebenarannya harus diperlihatkan sebagai akibat dari sekelompok pernyataan lain, yang masing-masing dapat diterima sebagai benar atau sebelumnya sudah dibuktikan kebenarannya. Pernyataan yang diterima kebenarannya tanpa memerlukan bukti dinamakan aksioma. Misalnya, "Dua garis yang berlainan tidak dapat berpotongan pada lebih dari satu titik".

Dalam membuktikan suatu dalil atau menurunkan suatu hasil dari kebenaran-kebenaran yang diketahui digunakan pola argumentasi, yaitu dengan melakukan proses penarikan kesimpulan atau *konklusi* dari beberapa pernyataan yang diketahui yang disebut premis dengan didasarkan atas prinsip-prinsip logika, yaitu modus *ponen* (inferensi), modus *tollens* dan *silogisme*.

Kesimpulan atau konklusi dikatakan berlaku atau sah, bila konjungsi dari premis-premis berimplikasi konklusi. Sebaliknya, bila konjungsi dari premis-premis tidak berimplikasi maka argumen dikatakan palsu atau tidak sah. Sehingga, suatu kesimpulan dikatakan sah bila premis-premisnya benar maka konklusinya juga benar.

1). Modus Ponen

Modus ponen adalah argumen yang berbentuk sebagai berikut:

"*Jika $p \Rightarrow q$ benar dan p benar maka q benar*".

Dalam bentuk diagram dapat disajikan sebagai berikut:

Premis 1	: $p \Rightarrow q$
Premis 2	: $\underline{P\quad}$
Konklusi	: $\therefore q$

Contoh 35

a. Jika seorang anak rajin belajar, maka ia lulus ujian (B).
<u>Ahmad adalah anak yang rajin belajar</u> (B).
$\therefore$ Ahmad lulus ujian (B).

b. Jika n bilangan ganjil maka, n^2 bilangan ganjil (B).
<u>3 bilangan ganjil</u> (B).
$\therefore$ 3^2 bilangan ganjil (B).

c. Jika Budi seorang pegawai maka ia mendapat gaji bulanan (B).
<u>Budi seorang pegawai</u> (B).
$\therefore$ Ia mendapat gaji bulanan (B).

Untuk menguji sah atau tidak penarikan kesimpulan secara modus ponen dapat digunakan tabel kebenaran. Argumen modus ponen "*Jika $p \Rightarrow q$ benar dan p benar maka q benar*" dapat dituliskan dalam bentuk implikasi, yaitu

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q.$$

Kesimpulan ini dikatakan sah bila merupakan tautologi. Tabel kebenaran dari bentuk tersebut adalah sebagai berikut:

P	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	S	B
S	S	B	S	B

Dari tabel di atas tampak bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$ merupakan tautologi. Jadi argumen atau kesimpulan bentuk modus ponen tersebut adalah sah.

2). Modus Tollens

Modus tollens adalah argumen yang berbentuk sebagai berikut:

"*Jika $p \Rightarrow q$ benar dan $\sim q$ benar maka $\sim p$ benar*".

Dalam bentuk diagram dapat disajikan sebagai berikut:

Premis 1	: $p \Rightarrow q$
Premis 2	: $\underline{\sim q}$
Konklusi	: $\therefore \sim p$

Contoh 36

a. Jika hari minggu, maka Budi bertamasya (B)
<u>Budi tidak bertamasya</u> (B)
$\therefore$ Bukan hari minggu (B)

b. Jika ABCD belahketupat, maka AC tegak lurus BD (B)
<u>AC tidak tegak lurus BD</u> (B)
$\therefore$ ABCD bukan belahketupat (B)

c. Jika ia seorang pegawai maka ia mendapat gaji bulanan (B)
<u>Budi tidak mendapat gaji bulanan</u> (B)
$\therefore$ Budi bukan seorang pegawai (B)

Untuk menguji sah atau tidak penarikan kesimpulan secara modus tollens dapat digunakan tabel kebenaran. Argumen modus ponen "*Jika $p \Rightarrow q$ benar dan $\sim q$ benar maka $\sim p$ benar*" dapat dituliskan dalam bentuk implikasi, yaitu $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$. Kesimpulan ini dikatakan sah bila merupakan tautologi. Tabel kebenaran dari bentuk tersebut adalah sebagai berikut:

P	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
B	B	S	S	B	S	B
B	S	S	B	S	S	B
S	B	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B

Dari tabel di atas tampak bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$ merupakan tautologi. Jadi argumen atau kesimpulan bentuk modus tollens tersebut adalah sah.

3). Silogisme

Silogisme adalah argumen yang berbentuk sebagai berikut:

"*Jika $p \Rightarrow q$ benar dan $q \Rightarrow r$ benar maka $p \Rightarrow r$ benar*".

Dalam bentuk diagram dapat disajikan sebgai berikut:

Premis 1	: $p \Rightarrow q$
Premis 2	: $\underline{q \Rightarrow r}$
Konklusi	: $\therefore p \Rightarrow r$

Contoh 37

a. Jika Budi rajin belajar, maka ia naik kelas (B)
   Jika ia naik kelas, maka akan dibelikan sepeda (B)
   $\therefore$ Jika Budi rajin belajar, maka akan dibelikan sepeda (B)

b. Jika n bilangan ganjil, maka n^2 bilangan ganjl (B)
   Jika n^2 bilangan ganjil, maka $n^2 + 1$ bilangan genap (B)
   $\therefore$ Jika n bilangan ganjil maka $n^2 + 1$ bilangan genap (B)

c. Jika $x > y$ maka $x + 1 > y + 1$ (B)
   Jika $x + 1 > y + 1$, maka $-x < -y$ (B)
   $\therefore$ Jika $x > y$ maka $-x < -y$ (B)

Untuk menguji sah atau tidak penarikan kesimpulan secara silogisme dapat digunakan tabel kebenaran. Argumen silogisme "*Jika $p \Rightarrow q$ benar dan $q \Rightarrow r$ benar maka $p \Rightarrow r$ benar*" dapat dituliskan dalam bentuk implikasi, yaitu $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$. Kesimpulan ini dikatakan sah bila merupakan tautologi. Tabel kebenaran dari bentuk tersebut adalah sebagai berikut:

P	q	R	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
B	B	B	B	B	B	B	B
B	B	S	B	S	S	S	B
B	S	B	S	B	B	S	B
B	S	S	S	B	S	S	B
S	B	B	B	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B	S	B
S	S	B	B	B	B	B	B
S	S	S	B	B	B	B	B

Dari tabel di atas tampak bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ merupakan tautologi. Jadi argumen atau kesimpulan bentuk silogisme tersebut adalah sah.
Hal penting yang perlu diingat dalam menarik kesimpulan adalah sah atau tidaknya kesimpulan tidak tergantung pada wajar atau tidaknya (saling terkait atau tidak) makna kesimpulan sebagai pernyataan tetapi pada nilai kebenaran dari kesimpulan tersebut.

- Argumen yang kesimpulannya bermakna wajar tetapi tidak diperoleh dengan menggunakan prinsip-prinsip logika, maka kesimpulan tersebut tidak sah.
- Beberapa argumen yang kesimpulannya tidak wajar namun diperoleh dengan menggunakan prinsip-prinsip logika maka kesimpulannya sah.

Contoh 38

Periksalah sah atau tidak kesimpulan berikut ini:

Jika $4 > 3$ maka $-4 < -3$
$-4 < -3$
$\therefore 4 > 3$

Jawab:

Untuk mengetahui kesimpulan tersebut sah atau tidak dapat kita gunakan tabel kebenaran dengan menetapkan pernyataan-pernyataan sebagai berikut:

p : $4 > 3$
q : $-4 < -3$,

argumen dapat disusun sebagai berikut

Jika 4 > 3 maka -4 < -3 menjadi $p \Rightarrow q$
$\underline{-4 < -3}$ $\underline{\quad q}$
$\therefore 4 > 3$ $\therefore p$

Tabel kebenaran implikasi $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ adalah

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$
B	B	B	B	B
B	S	S	S	B
S	B	B	B	S
S	S	B	S	S

Dari kolom terakhir, tampak bahwa $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ bukan merupakan tautologi. Jadi kesimpulan tersebut tidak sah walaupun mempunyai makna yang wajar. Argumen seperti ini disebut *kepalsuan*.

Contoh 39

Selidiki sah atau tidak argumen dari pernyataan yang dinyatakan dalam bentuk simbol, yaitu $p \vee q$
$\underline{p \quad}$
$\therefore \sim q$

Jawab:

Gunakan tabel kebenaran untuk menyelidiki sah atau tidaknya argumen tersebut dengan menyusunnya menjadi pernyataan majemuk $[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$.

p	q	~q	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge p$	$[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$
B	B	S	B	B	S
B	S	B	B	B	B
S	B	S	B	S	B
S	S	B	S	S	B
1	2	3	4	5	6

Dari kolom terakhir, tampak bahwa $[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$ bukan merupakan tautologi. Jadi argumen tersebut tidak sah.

c. Rangkuman

1. Modus Ponens adalah argumentasi yang disajikan dalam bentuk seperti berikut :
   $p \Rightarrow q$
   $\underline{p \qquad}$
   Jadi q
2. Modus Tollens adalah argumentasi yang disajikan dalam bentuk seperti berikut :
   $p \Rightarrow q$
   $\underline{\sim q \qquad}$
   Jadi $\sim p$
3. Silogisme adalah argumentasi yang disajikan dalam bentuk seperti berikut:
   $p \Rightarrow q$
   $\underline{q \Rightarrow r \quad}$
   Jadi $p \Rightarrow r$
4. Suatu argumen dinyatakan valid jika: " Implikasi dari konjungsi premis-premisnya dengan konklusi merupakan suatu tautologi "

LATIHAN 7

1. Buatlah kesimpulan dari premis-premis yang diketahui berikut ini!
   a. Jika ia orang Amerika maka ia berambut pirang.
   Mark orang Amerika.

   b. Jika ada gula maka ada semut.
   Tidak ada semut.

   c. Jika $x > 0$ maka x bilangan positif.
   -2 bukan bilangan positif.

   d. Jika hari hujan maka Amir memakai payung.
   Hari hujan.

   e. Jika matematika adalah berguna maka belajar matematika adalah penting.
   Jika belajar matematika penting maka orang harus belajar matematika.

   f. Jika x adalah real sehingga $x^2 - 3x + 2 = 0$ maka $(x - 1)(x - 2) = 0$.
   Jika $(x - 1)(x - 2) = 0$ maka $x = 1$ atau $x = 2$.

   g. Jika harga buku naik maka permintaan buku turun.
   Permintaan buku tidak turun.

   h. Jika pergi ke kantor kesiangan maka di jalan terjebak macet.
   Di jalan tidak terjebak macet.

   j. Jika ia seorang pengamen maka ia keliling kota.
   Jika ia keliling kota maka ia mendapat uang.

   k. Jika suatu bilangan bulat habis dibagi 6, maka juga habis dibagi 3.
   30 habis dibagi 6.

   l. Jika pendidikan berguna bagi masa depan maka sekolah itu penting.
   Sekolah itu tidak penting.

   m. Jika PQRS sebuah belah ketupat maka PR tegak lurus QS
   PR tidak tegak lurus QS

2. Periksalah sah atau tidak sahnya argumen berikut!
   a. Jika hari hujan maka Budi memakai payung.
   Budi memakai payung.

   $\therefore$ Hari hujan

   b. Jika n bilangan prima lebih dari 3 maka $(n + 1)(n - 1)$ habis dibagi oleh 24.
   59 ialah bilangan prima yang lebih dari 3.

   $\therefore$ 3480 habis dibagi 24.

c. Jika dua sudut siku-siku maka sudutnya sama besar.
Sudut P = Sudut Q
$\therefore$ Sudut P dan Q ialah siku-siku.

d. Jika suatu segi empat merupakan jajaran genjang maka diagonal-diagonalnya saling berpotongan sama panjang.
ABCD adalah jajaran genjang.
$\therefore$ Diagonal-diagonal AC dan BD saling berpotongan sama panjang.

e. Jika suatu bilangan habis dibagi 6 maka juga habis dibagi oleh 3.
54 habis dibagi oleh 6.
$\therefore$ 54 habis dibagi 3

f. Jika ${}^{a}\log b = c$ ($a > 0$, $a \neq 1$ dan $b \neq 0$) maka $a^c = b$.
Jika $2^3 = 8$ maka ${}^{2}\log 8 = 3$.
Jika ${}^{a}\log b = c$ ($a > 0$, $a \neq 1$ dan $b \neq 0$) maka ${}^{2}\log 8 = 3$.

g. Jika Harga BBM naik maka harga barang naik
Harga barang tidak naik atau harga BBM naik
Konklusi : Jadi Harga BBM tidak naik

h. Premis 1 :Jika seorang pecandu rokok maka badannya tidak sehat
Premis 2 : Gogon badannya tidak sehat
Konklusi : Jadi Gogon seorang pecandu rokok

i. Jika di Indonesia tidak ada korupsi maka semua penduduknya tidak miskin
Premis 2 : Ada penduduknya yang miskin
Konklusi : Jadi di Indonesia masih ada korupsi

3. Dengan menggunakan tabel kebenaran, periksalah sah atau tidak argumen berikut ini!

a. $p \vee q$
$\underline{\sim p}$
$\therefore \sim q$

b. $p \Rightarrow \sim q$
$\underline{p}$
$\therefore \sim q$

c. $p \Rightarrow q$
$\underline{\sim p}$
$\therefore \sim q$

d. $\sim q \Rightarrow p$
$\underline{q \vee p}$
$\therefore q$

e. $p \Rightarrow q$
$\underline{p}$
$\therefore q$

f. $p \Rightarrow q$
$\underline{\sim q \Rightarrow \sim r}$
$r \Rightarrow p$

g. $p \vee q$
$\underline{\sim p \Rightarrow q}$
$\therefore \sim q$

h. $p \Rightarrow \sim q$
$\underline{q \Rightarrow \sim r}$
$\therefore p \Rightarrow \sim r$

i. $\sim p \vee q$
$\underline{\sim p \vee q}$
q

Uji Kemampuan

1.

P	q	x
B	B	S
B	S	B
S	B	B
S	S	B

Dari tabel kebenaran di samping, x ekuivalen dengan …

a. $p \Rightarrow \sim q$
b. $\sim p \Rightarrow q$
c. $\sim q \Rightarrow p$
d. $\sim q \Rightarrow \sim p$
e. $\sim p \Rightarrow \sim q$

2. Invers pernyataan "jika petani menanam padi maka harga beras turun" adalah . . .
   a. Jika petani menanam padi maka harga beras tidak turun.
   b. Jika petani tidak menanam padi maka harga beras turun.
   c. Jika harga beras turun maka petani menanam padi.
   d. Jika harga beras turun maka petani tidak menanam padi.
   e. Jika petani tidak menanam padi maka harga beras tidak turun.

3. Nilai kebenaran dari pernyataan dalam tabel berikut adalah….

P	q	$\sim p \vee q$
B	B	. . .
B	S	. . .
S	B	. . .
S	S	. . .

   a. BSBB
   b. BBSB
   c. BSSB
   d. SBSB
   e. BBSS

4. Konvers dari pernyataan "Jika $2 < 5$ maka $2(-3) > 5(-3)$" adalah . . .
   a. Jika $2(-3) > 5(-3)$ maka $2 > 5$
   b. Jika $2(-3) > 5(-3)$ maka $2 < 5$
   c. Jika $2(-3) \leq 5(-3)$ maka $2 < 5$
   d. Jika $2 < 5$ maka 2(-30 > 5(-3)
   e. Jika $2 \geq 5$ maka $2(-3) \leq 5(-3)$

5. Negasi dari pernyataan "Jika upah buruh naik maka harga barang naik" adalah . . .
   a. Jika upah buruh naik maka harga barang naik.
   b. Jika harga barang naik maka upah buruh tidak naik.
   c. Upah buruh naik dan harga barang tidak naik.
   d. Upah buruh naik dan harga barang naik.
   e. Harga barang naik jika dan hanya jika upah buruh naik.

6. Diketahui:
   P1 : Jika servis hotel baik maka hotel itu banyak tamu.
   P2 : Jika hotel itu banyak tamu maka hotel itu mendapat untung.
   P3 : Hotel tidak mendapat untung
   Kesimpulan dari argumen di atas adalah . . . .
   a. Hotel tidak banyak tamu.
   b. Servis hotel tidak baik.
   c. Jika hotel ingin mendapat untung maka servisnya baik.
   d. Jika hotel itu tamunya banyak maka servisnya baik.
   e. Hotel tidak banyak tamu dan servisnya tidak baik.

7. Ingkaran (negasi) dari pernyataan "Semua penduduk yang lahannya terkena gusuran mendapat ganti rugi" adalah . . .
   a. Semua penduduk yang lahannya terkena gusuran tidak mendapat ganti rugi.
   b. Beberapa penduduk yang lahannya terkena gusuran mendapat ganti rugi.
   c. Ada penduduk yang lahannya terkena gusuran mendapat ganti rugi.
   d. Ada penduduk yang lahannya terkena gusuran tidak mendapat ganti rugi
   e. Tidak semua penduduk lahannya terkena gusuran tidak mendapat ganti rugi.

8. Diketahui premis-premis berikut:
   P1 : Jika $x^2 \leq 4$ maka $-2 \leq x \leq 2$ dan P2 : $x < -2$ atau $x > 2$.
   Kesimpulan dari kedua premis tersebut adalah . . .
   a. $x^2 \geq 4$
   b. $x^2 > 4$
   c. $x^2 \neq 4$
   d. $x^2 < 4$
   e. $x^2 = 4$

9. Jika p adalah pernyataan yang benar dan q adalah pernyataan yang salah maka pernyataan majemuk yang bernilai benar adalah . . .
   a. $\sim p \vee q$
   b. $p \wedge \sim q$
   c. $p \wedge q$
   d. $q \Leftrightarrow p$
   e. $p \Rightarrow q$

10. Kontraposisi dari pernyataan "Jika 2x3 = 6 maka 2+3 = 5" adalah . . .
   a. Jika $2x3 \neq 6$ maka $2+3 \neq 5$
   b. Jika $2x3 \neq 6$ maka $2+3 = 5$
   c. Jika $2+3 \neq 5$ maka $2x3 \neq 6$
   d. Jika 2+3 = 6 maka 2x3 = 5
   e. Jika $2+3 \neq 6$ maka $2x3 = 6$

11. Pernyataan yang sesuai dengan "Jika Rina lulus ujian maka Rina akan kuliah" adalah . . .
   a. Jika Rina lulus ujian maka Rina tidak akan kuliah.
   b. Jika Rina tidak lulus ujian maka Rina akan kuliah.
   c. Jika Rina tidak lulus ujian maka Rina tidak akan kuliah
   d. Jika Rina kuliah maka Rina lulus ujian
   e. Jika Rina tidak kuliah maka Rina tidak lulus ujian

12. Ingkaran dari pernyatan "Kuadrat setiap bilangan real selalu tak negatif", adalah. . .
   a. Ada bilangan real yang kuadratnya negatif.
   b. Ada bilangan real yang kuadratnya positif.
   c. Ada bilangan real yang kuadratnya tak negatif.
   d. Ada bilangan real yang kuadratnya tak positif.
   e. Ada bilangan real yang kuadratnya nol.

13. Bentuk $p \wedge (p \Rightarrow q)$ ekuivalen dengan . . .
   a. p
   b. q
   c. $p \wedge \sim q$
   d. $p \Rightarrow q$
   e. $p \wedge q$

14. Jika pernyatan p bernilai salah dan q bernilai benar, maka pernyataan berikut yang bernilai salah adalah . . .
   a. $p \vee q$
   b. $p \Rightarrow q$
   c. $\sim p \Rightarrow \sim q$
   d. $\sim p \wedge q$
   e. $\sim p \vee \sim q$

15.Diketahui pernyataan:
p : "Ayam berkokok"
q : " Hari sudah siang".
Ingkaran dari pernyataan "Ayam tidak berkokok dan hari belum siang " adalah . . .
a. Ayam berkokok atau hari sudah siang
b. Ayam berkokok dan hari sudah siang.
c. Ayam tidak berkokok dan hari sudah siang
d. Ayam berkokok atau hari belum siang.
e. Ayam tidak berkokok dan hari belum siang.

16.Pernyataan yang setara dengan "saya tidak hadir atau anda tidak pergi" adalah. . .
a. Saya tidak hadir dan anda pergi
b. Jika saya tidak hadir maka anda pergi
c. Jika saya hadir maka anda tidak pergi
d. Anda pergi hanya jika saya tidak hadir
e. Saya tidak hadir atau anda pergi

17. Diketahui p, q , r , s suatu pernyataan dan $p \Rightarrow q$, $q \Leftrightarrow r$ dan $r \Rightarrow s$ suatu pernyataan majemuk yang bernilai benar , jika s pernyataan yang bernilai salah, maka diantara pernyataan berikut yang benar adalah ...
a. P
b. q
c. r
d. $p \Leftrightarrow r$
e. $p \vee r$

18.Ingkaran dari $(p \wedge q) \Rightarrow r$ adalah ...
a. $\sim p \vee \sim q \vee r$
b. $(\sim p \wedge q) \vee r$
c. $(p \wedge q) \wedge \sim r$
d. $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$
e. $\sim p \wedge \sim q \wedge r$

19.Nilai kebenaran dari pernyataan : $(\sim p \Leftrightarrow q) \vee (\sim p \wedge q)$ adalah . . .
a. BBSB
b. BSSB
c. BBBS
d. SSBB
e. SBBS

20.Premis 1 : Bila ada gula maka ada semut
<u>Premis 2 :Di meja ada gula .</u>
Konklusi : Di meja ada semut
Penarikan kesimpulan di atas berdasarkan prinsip logika. . .
a. modus ponens
b. modus tollens
c. silogisme
d. Kontradiksi
e. tautologi

21.Suatu argumen penarikan kesimpulan bernilai syah jika implikasi dari konjungsi premis-premisnya dengan suatu konklusi merupakan sebuah . . .
a. konjungsi
b. disjungsi
c. implikasi
d. biimblikasi
e. tautologi

22.Implikasi $\sim p \Rightarrow q$ senilai dengan . . .
a. $\sim p \wedge \sim q$
b. $\sim p \Rightarrow q$
c. $\sim (p \Rightarrow q)$
d. $P \vee q$
e. $q \Rightarrow \sim p$

B. Essay

1. Buktikan dengan tabel kebenaran argumen di bawah ini sah atau tidak!

   a. $\sim p \vee q$
$\underline{\quad p \Leftrightarrow q}$
$\therefore \quad q$

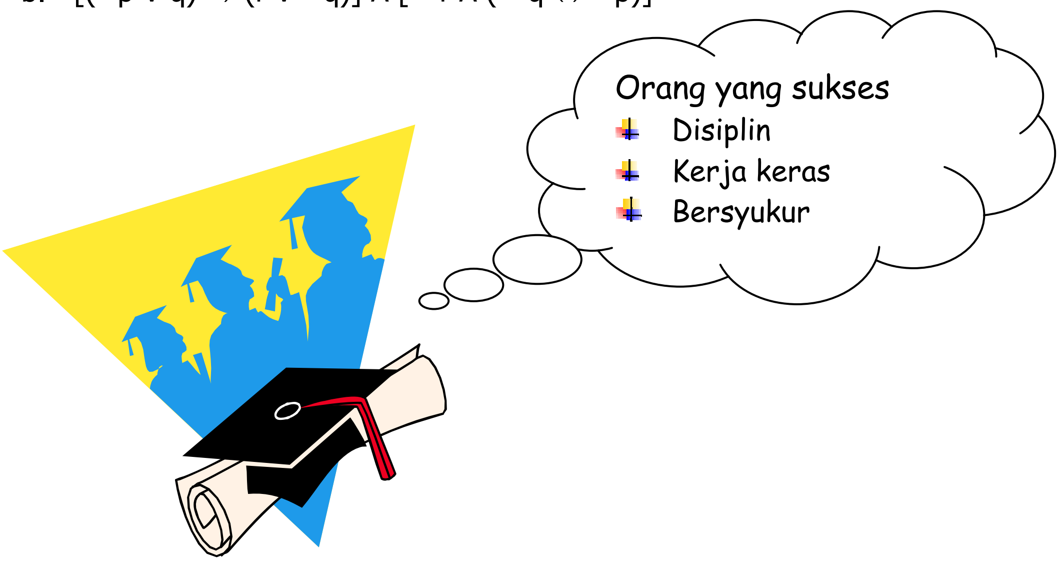
   b. Jika saya tidak memiliki uang maka saya miskin
<u>saya memiliki uang atau saya tidak miskin</u>
$\therefore$ jadi saya memiliki uang

2. Dari pernyatan " Jika 2 x 4 < 7 maka semua bilangan prima adalah genap".
   Tentukan : konvers, invers kontraposisi dan negasinya!

3. Selidiki dengan tabel kebenaran, manakah yang merupakan Tautologi dan manakah yang Kontradiksi:
   a. $q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
   b. $(p \wedge q) \Rightarrow q$
   c. $\{(p \Rightarrow q) \wedge \sim q\} \Rightarrow \sim p$

4. Tulislah negasi dari pernyataan berikut!
   b. Semua bilangan cacah bukan merupakan bilangan asli.
   c. Jika ia rajin belajar maka akan mendapat hadiah

5. Tentukan nilai kebenaran dalam bentuk tabel dari pernyataan yang dinyatakan dalam bentuk simbol berikut:
   a. $(\sim p \vee q) \Rightarrow [r \wedge (\sim q \Leftrightarrow p)]$
   b. $[(\sim p \vee q) \Rightarrow (r \vee \sim q)] \wedge [\sim r \wedge (\sim q \Leftrightarrow \sim p)]$



Sumber: Art and Gallery

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
6. Memecahkan masalah yang berkaitan dengan fungsi, persamaan fungsi linier dan fungsi kuadrat	**6.1 Mendeskripsikan perbedaan konsep relasi dan fungsi** **6. 2 Menerapkan konsep fungsi linier** **6. 3 Menggambarkan fungsi kuadrat** **6. 4 Menerapkan konsep fungsi kuadrat**

A. PENDAHULUAN

Standar Kompetensi **Konsep Fungsi** terdiri dari empat (4) Kompetensi Dasar. Dalam penyajian pada buku ini setiap Kompetensi Dasar memuat Tujuan, Uraian materi, Rangkuman dan Latihan. Kompetensi Dasar dalam Standar Kompetensi ini adalah **Perbedaan Konsep Relasi dan Fungsi, Konsep Fungsi Linier, Konsep Fungsi Kuadrat** dan **Penerapan Konsep Fungsi Kuadrat**

Standar kompetensi ini digunakan sebagai dasar untuk mempelajari kompetensi lain yang masih ada kaitannya dengan fungsi seperti kompetensi program linier, aplikasi fungsi dalam bidang ekonomi seperti fungsi permintaan, fungsi penawaran ataupun aplikasi fungsi dalam bidang teknologi seperti menentukan volume benda putar, luas daerah yang di batasi oleh dua kurva dalam rangka menunjang program keahliannya.

Sebelum mempelajari standar kompetensi ini diharapkan anda telah menguasai standar kompetensi Sistem Bilangan Real terutama tentang perkalian, pembagian, penjumlahan dan pengurangan bilangan real, persamaan dan pertidaksamaan maupun kompetensi yang lain yang dapat menunjang standar kompetensi Konsep Fungsi

Pada setiap akhir Kompetensi dasar tercantum soal-soal latihan yang disusun dari soal-soal yang mudah sampai soal-soal yang sukar. Latihan soal ini digunakan untuk mengukur kemampuan anda terhadap kompetensi dasar ini, artinya setelah mempelajari kompetensi dasar ini secara mandiri dengan bimbingan guru sebagai fasilitator, ukur sendiri kemampuan anda dengan mengerjakan soal-soal latihan tersebut.

Untuk melancarkan kemampuan anda supaya lebih baik dalam mengerjakan soal, disarankan semua soal dalam latihan ini dikerjakan baik di sekolah dengan bimbingan guru maupun di rumah.

Untuk mengukur standar kompetensi lulusan tiap siswa, di setiap akhir kompetensi dasar, guru akan memberikan evaluasi apakah anda layak atau belum layak mempelajari standar Kompetensi berikutnya. Anda dinyatakan layak jika anda mampu mengerjakan soal 60% atau lebih soal-soal evaluasi yang akan diberikan guru.

B. KOMPETENSI DASAR

B.1. Perbedaan Konsep Relasi dan Fungsi

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Membedakan pengertian relasi dan fungsi
- Menentukan daerah asal (*domain*), daerah kawan (*kodomain*), dan daerah hasil (*range*)
- Menguraikan jenis-jenis fungsi

b. Uraian Materi

Bayangkan suatu fungsi sebagai sebuah mesin, misalnya mesin hitung. Ia mengambil suatu bilangan (masukan), maka fungsi memproses bilangan yang masuk dan hasil produksinya disebut keluaran.

Setiap bilangan (x) yang dimasukan kemudian dihubungkan dengan satu bilangan tunggal sebagai keluaran, tetapi dapat juga bahwa beberapa nilai masukan yang berlainan memberikan nilai keluaran yang sama.

1). Definisi Relasi

Relasi dari dua himpunan A dan B adalah pemasangan anggota-anggota A dengan anggota B.

Contoh 1

Jika himpunan A = {Bandung, Surabaya, Medan}
B = {Jabar, Jatim, Sumut}.

Bandung adalah Ibukota provinsi Jabar, Surabaya Ibukota provinsi Jatim dan Medan Ibukota provinsi Sumut. Jadi relasi antara himpunan A ke himpunan B adalah "Ibukota Provinsi".

Relasi antara dua himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan :

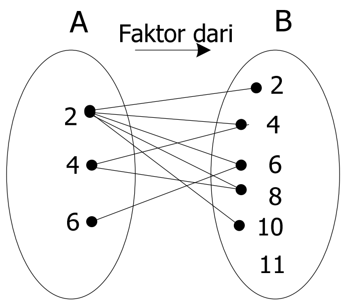
a. Diagram Panah
b. Diagram Cartesius
c. Pasangan Berurutan.

Contoh 2

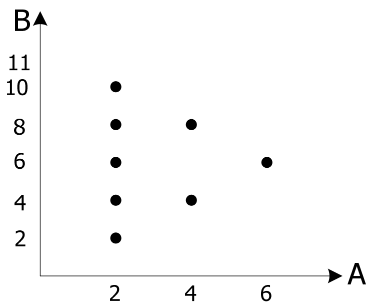
Jika A = {2, 3, 6} B = {2, 4, 6, 8, 10, 11}. Relasi dari himpunan A ke B adalah " Faktor dari ", nyatakanlah relasi tersebut dengan :
a. Diagram Panah
b. Diagram Cartesius
c. Himpunan pasangan berurutan.

Jawab:

a.



b.



c. Himpunan pasangan berurutannya :{(2, 2), (2,4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (4, 4), (4, 8),(6, 6)}

2). Domain, Kodomain dan Range

Pada relasi dari himpunan A ke B, himpunan A disebut Domain (daerah asal) himpunan B disebut Kodomain (daerah kawan) dan semua anggota B yang mendapat pasangan dari A disebut Range (derah hasil).

Contoh 3

Tuliskan Domain, Kodomain dan Range dari relasi **Contoh 2** di atas :

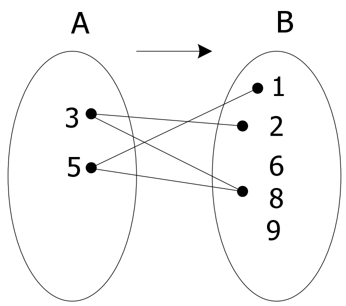
Jawab:

Domain = {2, 4, 6}
Kodomain = {2, 4, 6, 8, 10, 11}
Range = { 2, 4, 6, 8, 10}

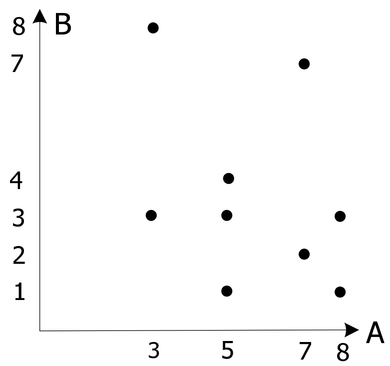
Contoh 4

Tentukanlah domain, kodomain dan range dari relasi di bawah ini:

a.



b.



Jawab:

a. Domain = { 3, 5 }
Kodomain = { 1, 2, 6, 8, 9}
Range = { 1, 2, 8}

b. Domain = { 3, 5, 7, 8}
Kodomain = { 1, 2, 3, 4, 7, 8}
Range = { {1, 2, 3, 4, 7, 8}

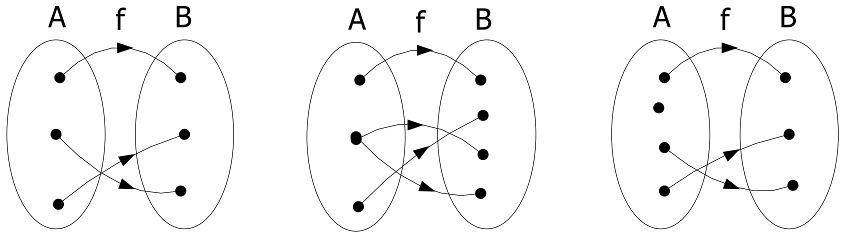
3) . Definisi fungsi

Fungsi f adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (Domain) dengan suatu nilai tunggal f(x) dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (Kodomain). Himpunan nilai yang diperoleh dari relasi tersebut disebut daerah hasil (Range)

Untuk memberi nama suatu fungsi dipakai sebuah huruf tunggal seperti f, g, dan huruf lainnya. Maka f(x), yang di baca " f dari x " menunjukkan nilai yang diberikan oleh f kepada x. Misalkan : $f(x) = x^2 + 2$, maka $f(3) = 3^2 + 2$

Contoh 5

Manakah relasi di bawah ini yang merupakan fungsi, jika relasi dari A ke B

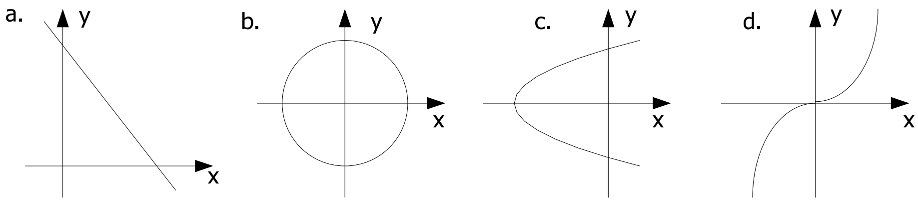


Jawab:
Relasi pertama merupakan fungsi, karena setiap anggota domain A berelasi tunggal terhadap anggota kodomain B

Relasi kedua bukan merupakan fungsi, karena ada anggota domain A yang berelasi tidak tunggal terhadap anggota kodomain B

Relasi ketiga bukan merupakan fungsi, karena ada anggota domain A yang tidak berelasi dengan anggota kodomain B

Contoh 6
Dari grafik di bawah ini, mana yang merupakan fungsi, jika domain sumbu x



Jawab:
Grafik a. merupakan fungsi, karena setiap anggota domain x berelasi tunggal terhadap kodomain y

Grafik b. bukan merupakan fungsi karena ada anggota domain x yang berelasi tidak tunggal terhadap anggota kodomain y, yaitu ada anggota x jika kita tarik sejajar sumbu y akan mendapatkan dua titik potong.

Grafik c. bukan merupakan fungsi karena ada anggota domain x yang berelasi tidak tunggal terhadap anggota kodomain y, yaitu ada anggota x jika kita tarik sejajar sumbu y akan mendapatkan dua titik potong.

Grafik d. merupakan fungsi, karena setiap anggota domain x berelasi tunggal terhadap kodomain y

Contoh 7
Mana dari himpunan A, B dan C berikut ini yang merupakan fungsi ?

A = {(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 8)}
B ={(1, 6), (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 10)}
C ={(2, 5), (3, 6), (4, 7)}

Jawab:

Yang merupakan pemetaan atau fungsi adalah himpunan A dan C. B bukan fungsi sebab pada himpunan B domain 1 muncul dua kali (berelasi dengan nilai 6 dan 7 pada kodomain).

Contoh 8

Jika g : $x \rightarrow 3x^2 + 5$ dan domainnya $\{-3 \leq x \leq 1, x \in B\}$, tentukan daerah hasil dan buatlah himpunan pasangan berurutannya.

Jawab:

Domain = $\{-3 \leq x \leq 1, x \in B\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$

$g(-3) = 3.(-3)^2 + 5 = 3.\ 9 + 5 = 32$

$g(-2) = 3.(-2)^2 + 5 = 3.\ 4 + 5 = 17$

$g(-1) = 3.(-1)^2 + 5 = 3.\ 1 + 5 = 8$

$g(\ 0) = 3.0^2 + 5 = 3.\ 0 + 5 = 5$

$g(\ 1) = 3.1^2 + 5 = 3.\ 1 + 5 = 8$

Jadi Range = { 32, 17, 8, 5}

Himpunan pasangan berurutannya :{(-3, 32), (-2, 17), (-1, 8), (0, 5), (1, 8)}

Contoh 9

Diketahui $f(x) = ax + b$. dengan $f(-4) = -3$ dan $f(2) = 9$ Tentukan nilai a dan b kemudian tuliskan fungsinya.

Jawab:

$f(x) = ax + b$

$f(-4) = a(-4) + b = -3$

$-4a + b = -3$ .... (1)

$f(2) = a.2 + b = 9$

$2a + b = 9$ .... (2)

Eliminasikan 1 dan 2 diperoleh:

$$\begin{array}{r} -4a + b = -3 \\ \underline{2a + b = 9} \; - \\ -6a = -12 \\ a = 2, \end{array}$$

substitusi nilai a = 2 ke $2a + b = 9$

$2.2 + b = 9$

$b = 5$

Jadi fungsinya $f(x) = 2x + 5$

4). Perbedaan relasi dan fungsi

Dari contoh 1 dan 2 di atas dapat disimpulkan bahwa sebuah fungsi (pemetaan) merupakan relasi, sedangkan sebuah relasi belum tentu sebuah fungsi.

Banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari anggota A ke anggota B jika banyaknya anggota A = a dan banyaknya anggota B= b adalah b^a

Banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari anggota B ke anggota A jika banyaknya anggota A = a dan banyaknya anggota B= b adalah a^b

Contoh 10

Jika A={ 1, 2, 3, 4, 5} dan B = { 5, 6} maka banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari A ke B sebanyak $2^5 = 32$ dan banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari B ke A sebanyak $5^2 = 25$

Pemetaan khusus yang terjadi jika setiap anggota A dipasangkan tepat satu ke anggota B dan anggota B dipasangkan tepat satu dengan anggota A disebut *Korespondensi Satu-satu Pada.* Korespondensi satu-satu akan mungkin terjadi jika banyaknya anggota A = banyaknya anggota B

Banyaknya korespondensi satu-satu pada yang mungkin terjadi dari anggota A ke anggota B jika banyaknya anggota A atau B = n adalah n! dengan n! = n . (n – 1).(n– 2) … 3.2.1

Contoh 11

a 5! = 5.4.3.2.1 = 120

b Banyaknya korespondensi satu-satu dari A ke B jika (n)A = (n)B = 6 adalah 6!
6! = 6.5.4.3.2.1 = 720

Aturan relasi merupakan pusat suatu fungsi, tetapi hasil sebuah fungsi belum dapat ditentukan sampai daerah asalnya diberikan. Ingatlah bahwa domain adalah himpunan anggota yang kepadanya fungsi memberikan nilai.

Jika suatu fungsi daerah asalnya tidak dirinci, maka daerah asalnya kita anggap himpunan terbesar bilangan real sedemikian sehingga fungsi memberikan nilai bilangan real. Daerah asal yang kita peroleh disebut daerah asal alami

Contoh 12

Tentukan domainnya sehingga fungsi di bawah ini memberikan nilai bilangan real

a. $y = 2x^2 + 4$

b. $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$

c. $y = \sqrt{2x-6}$

Jawab :

a. Daerah asalnya $x \in$ Real, karena setiap x elemen bilangan real, fungsi memberikan nilai bilangan real : $D_f = \{ x \in R\}$

b. fungsi $y = \dfrac{2x-3}{x+4}$ merupakan fungsi pecahan, dimana fungsi tidak akan memberikan suatu nilai jika penyebutnya bernilai 0 (nol). Jadi Daerah asalnya $x \in R$ dimana $x + 4 \neq 0$ atau $D_f = \{x \mid x \neq -4, x \in R \}$

c. fungsi $y = \sqrt{2x-6}$ merupakan fungsi dalam akar, dimana fungsi tidak akan memberikan suatu nilai real jika di dalam akar bernilai negatif. Jadi Daerah asalnya $x \in R$ dimana $2x - 6 \geq 0$ atau $D_f = \{x \mid x \geq 3, x \in R\}$

5). Jenis-jenis fungsi

Jenis-jenis fungsi yang perlu kita ketahui diantaranya adalah :

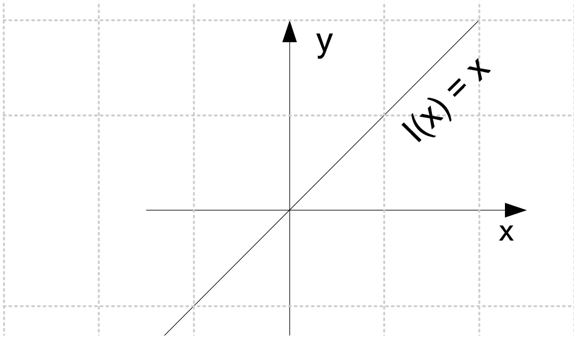
a). Fungsi Konstan

Fungsi konstan adalah fungsi f yang dinyatakan dalam rumus f(x) = c, dengan c suatu konstanta. Grafiknya jika dilukis dalam suatu sumbu koordinat dimana domainnya sumbu x merupakan garis yang sejajar dengan sumbu x.

b). Fungsi Identitas

Fungsi Identitas adalah suatu fungsi f yang dinyatakan dalam rumus f(x) = x. Fungsi identitas sering dinyatakan dengan lambang I sehingga I(x) = x.

Grafiknya sebagai berikut :



c). Fungsi Modulus atau fungsi harga mutlak

Fungsi modulus adalah fungsi f yang memuat bentuk nilai mutlak

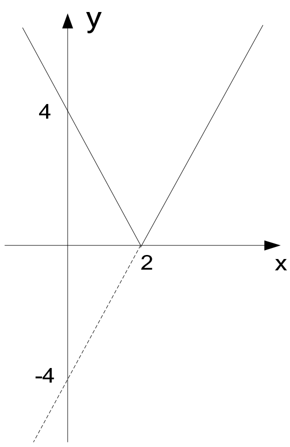
Contoh 13

Lukislah grafik fungsi f(x) = | 2x – 4 |

Jawab:

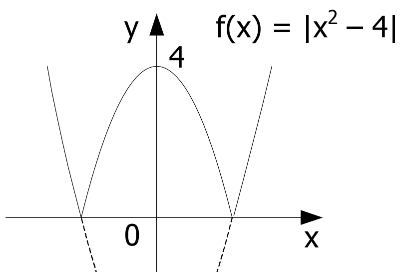
Lukis dahulu grafik y = 2x – 4, setelah itu grafik yang terletak di bawah sumbu x, kita positipkan dengan cara mencerminkan grafik di bawah sumbu x dengan cerminnya adalah sumbu x

x	0	2	4
Y = |2x–4|	|-4| = 4	0	4



Contoh 14

Lukislah grafik fungsi f(x) = | x^2 – 4 |



Jawab :

Kita lukis dahulu grafik fungsi $y = x^2 - 4$ dengan membuat tabel seperti di bawah ini, setelah itu kita cerminkan grafik di bawah sumbu x dengan cermin sumbu x.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

d). Fungsi Polinomial

Fungsi Polinomial adalah fungsi f yang dinyatakan dalam bentuk :

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Jika n = 1 maka terbentuk fungsi linier (grafiknya berbentuk garis lurus).
Jika n = 2 maka terbentuk fungsi kuadrat(grafiknya berbentuk parabola).

e). Fungsi Genap

Fungsi genap adalah suatu fungsi f dimana berlaku f(x) = f(-x). Yang merupakan fungsi genap antara lain fungsi yang pangkat-pangkat dari variabelnya bilangan genap. Jika fungsi itu pecahan, maka dapat dikatakan fungsi genap jika variabel pada pembilang dan penyebut berpangkat semua genap atau semua ganjil.

f). Fungsi Ganjil

Fungsi ganjil adalah suatu fungsi f dimana berlaku f(-x) = - f(x). Yang merupakan fungsi ganjil antara lain fungsi yang semua variabelnya berpangkat ganjil. Jika fungsi itu pecahan, maka dapat dikatakan fungsi ganjil jika variabel pada pembilang berpangkat ganjil dan variabel dari penyebut berpangkat genap atau sebaliknya.

Contoh 15

Selidikilah fungsi di bawah ini fungsi genap, fungsi ganjil atau bukan kedua duanya:

a. $f(x) = x^2 - 4$
b. $f(x) = 3x + 5$
c. $f(x) = 3x^3 + 5x$
d. $f(x) = \dfrac{2x^4 - 2}{x^2 + 5}$
e. $f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 6}{x^3 + 5x}$

Jawab:

a. Semua variabel berpangkat genap, yaitu 2 dan 0 jadi termasuk fungsi genap

b. Variabel ada yang berpangkat ganjil yaitu 1 dan berpangkat genap yaitu 0, jadi bukan fungsi genap maupun fungsi ganjil.
c. Semua variabel berpangkat ganjil, jadi merupakan fungsi ganjil.

d. Semua variabel dari pembilang dan penyebut berpangkat genap, jadi merupakan fungsi genap.

e. Semua variabel pembilang berpangkat genap dan semua variabel penyebut berpangkat ganjil, jadi merupakan fungsi ganjil.

6). Sifat-sifat fungsi

Berdasarkan sifatnya fungsi terbagi menjadi :

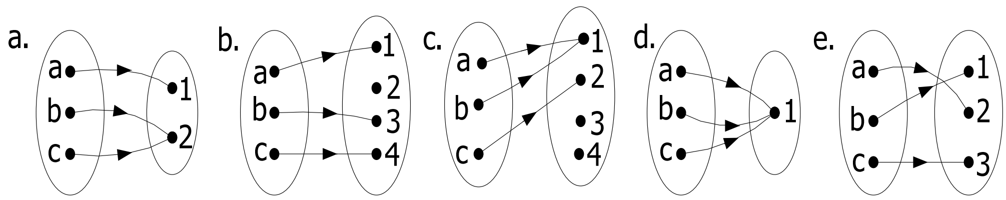
a. Fungsi surjektif adalah suatu fungsi yang setiap elemen daerah hasil (R_f) merupakan bayangan paling sedikit dari daerah kodomain (K_f)
Kalimat tersebut secara matematika diartikan :
Misal $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah fungsi. Jika $R_f = B$ atau daerah hasil dari fungsi f sama dengan kodomain f, maka f adalah fungsi subyektif atau pada.

b. Fungsi Injektif adalah suatu fungsi yang setiap elemen domain (D_f) memiliki pasangan yang berbeda pada kodomain (K_f),
Kalimat tersebut secara matematika diartikan :
Misal $f : A \rightarrow B$ adalah sebuah fungsi dan R_f adalah daerah hasil f.
Bila x_1 dan x_2 adalah sembarang dua elemen pada $D_{f,}$ jika $x_1 \neq x_2$ mengakibatkan $f(x_1) \neq f(x_2)$ dan jika $f(x_1) = f(x_2)$ mengakibatkan $x_1 = x_2$, maka $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi injektif atau fungsi satu-satu.

c. Fungsi bijektif adalah korespondensi satu-satu, yaitu suatu fungsi yang setiap anggota domain dipasangkan tepat satu ke anggota kodomain dan setiap anggota kodomain merupakan pasangan dari satu dan hanya satu anggota domain

Contoh 16

Dari diagram panah di bawah ini, manakah yang merupakan fungsi surjektif, fungsi injektif dan fungsi bijektif.



Jawab:

Diagram panah a merupakan fungsi surjektif karena elemen Range sama dengan elemen Kodomain

Diagram panah b merupakan fungsi injektif karena banyaknya elemen domain sama dengan banyaknya elemen range

Diagram panah c bukan merupakan fungsi surjektif,injektif atau bijektif

Diagram panah d merupakan fungsi surjektif karena elemen Range sama dengan elemen kodomain

Diagram panah e merupakan fungsi bijektif karena elemen Range sama dengan elemen kodomain

c. Rangkuman

1. Relasi dari dua himpunan A dan B adalah pemasangan anggota-anggota A dengan anggota B. Relasi antara dua himpunan A dan B dapat dinyatakan dengan :
   a. Diagram Panah
   b. Diagram Cartesius
   c. Pasangan Berurutan.

2. Pada relasi dari himpunan A ke B, himpunan A disebut Domain (daerah asal) himpunan B disebut Kodomain (daerah kawan) dan semua anggota B yang mendapat pasangan dari A disebut (daerah hasil).

3. Pemetaan atau fungsi adalah relasi khusus dari himpunan A ke B dimana setiap anggota A tepat memiliki pasangan dengan anggota B

4. Banyaknya pemetaan yang mungkin terjadi dari anggota A ke anggota B jika banyaknya anggota A = a dan banyaknya anggota B= b adalah b^a

5. Pemetaan khusus yang terjadi jika setiap anggota A dipasangkan tepat satu ke anggota B dan anggota B dipasangkan tepat satu dengan anggota A disebut *Korespondensi Satu-satu Pada.* Korespondensi satu-satu akan mungkin terjadi jika banyaknya anggota A = banyaknya anggota B

6. Banyaknya korespondensi satu-satu yang mungkin terjadi dari anggota A ke anggota B jika banyaknya anggota A atau B = n adalah n! dengan n! = n . (n – 1).(n– 2) … 3.2.1

7. Berdasarkan sifatnya fungsi terbagi menjadi :
   a. Fungsi surjektif adalah suatu fungsi yang elemen daerah hasilnya (R_f) sama dengan elemen daerah kodomain (K_f). nama lain fungsi surjektif adalah fungsi onto atau fungsi kepada

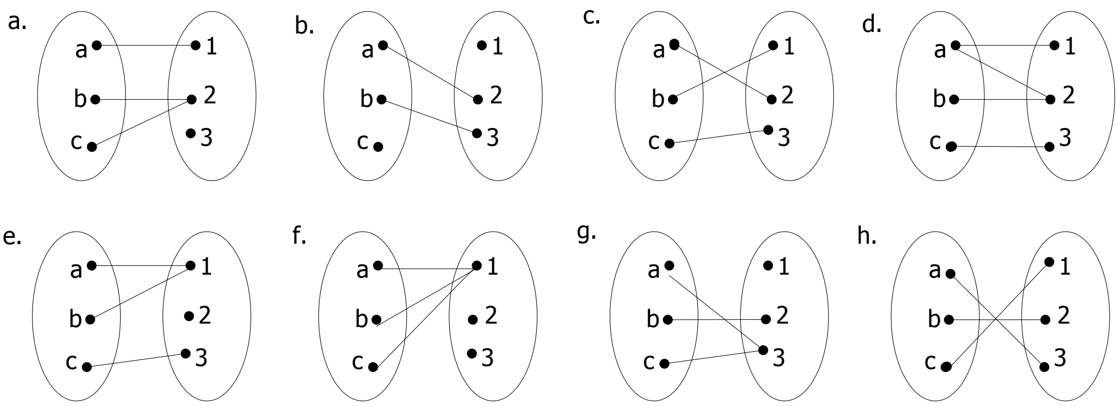
   b. Fungsi Injektif adalah suatu fungsi yang setiap domain memiliki pasangan yang berbeda pada kodomain, atau banyaknya anggota domain (D_f) sama dengan banyaknya anggota range (R_f)

   c. Fungsi bijektif adalah korespondensi satu-satu pada, yaitu suatu fungsi yang setiap anggota domain dipasangkan tepat satu ke anggota kodomain dan setiap anggota kodomain merupakan pasangan dari satu dan hanya satu anggota domain

LATIHAN 1

1. Relasi-relasi dari himpunan A = {a,b,c} ke B = {1,2,3} digambarkan dengan himpunan pasangan sebagai berikut. Relasi manakah yang merupakan fungsi?
   a. {(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 1), (b, 3)}
   b. {(a, 2), (b, 2), (c, 2)}
   c. {(a, 3), (b, 1), (b, 2)}
   d. {(a, 1), (b, 3), (c, 2)}
   e. {(a, 1), (b, 1), (c, 2)}

2. Relasi-relasi dari himpunan A= {a,b,c} ke B = {1,2,3} digambarkan dengan diagram panah sebagai berikut. Relasi manakah yang merupakan fungsi?



3. Jika A = {0, 1, 2, 3} dan B = {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
   Relasi yang menghubungkan himpunan A ke B adalah "Tiga kurangnya dari"
   Buatlah :
   a. Diagram panah.
   b. Diagram cartesius.
   c. Himpunan pasangan berurutan.
   d. Ada berapa banyaknya pemetaan yang mungkin dari A ke B dan dari B ke A

4. Diketahui himpunan A= {2, 3, 5, 6 }dan B = {2, 3, 4, 5, 6 }. Relasi yang menghubungkan himpunan A ke himpunan B adalah "satu kurangnya dari "
   a. Buatlah diagram panah, diagram cartesius dan himpunan pasangan berurutannya
   b. Ada berapa pemetaan yang mungkin terjadi dari B ke A

5. Suatu relasi dinyatakan dalam himpunan pasangan berurutan {(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4)} Tentukan Domain,Kodomain dan Rangenya

6. Diketahui fungsi f : $x \rightarrow f(x)$ yang dirumuskan sebagai $f(x) = 2x - 3$, tentukanlah:
   a. Nilai f(-2), f(-1), f(0), f(1) dan f(2)
   b. Jika f(a) = 7 tentukan nilai a
   c. Jika f(x) = -5 tentukan nilai x

7. Diketahui fungsi f : $x \rightarrow f(x)$ dirumuskan sebagai $f(x) = 2x^2 - 5$, tentukan:
   a. Nilai f(-3), f(-2), f(-1), f(0),f(1), f(2) dan f(3)
   b. Gambarlah dalam diagram cartesius
   c. Jika f(a) = 3 tentukan nilai a
   d. Jika f(x) = 45 tentukan nilai x

8. Jika A = {1,3,4,5}, B={ a,b,c} C = { p,q,r,s,t} dan D = { 2,4,5,4,7}
   a. Ada berapa pemetaan yang mungkin dari A ke B
   b. Ada berapa pemetaan yang mungkin dari C ke A
   c. Ada berapa pemetaan yang mungkin dari D ke B

d. Ada berapa korespondensi satu-satu yang mungkin dari C ke D
e. Mungkinkah terjadi korespondensi satu-satu dari A ke C, mengapa?

9. Jika f : x→ 3x − 1. Tentukan daerah hasil yang domainnya adalah {0, 1, 2, 3}. Kemudian buatlah diagram panah, diagram cartesius serta himpunan pasangan berurutan

10. Tentukan domainnya sehingga fungsi di bawah ini memberikan nilai bilangan real

a. $y = x^2 + 4$
b. $y = | 5x - 1 |$
c. $y = \sqrt{3x+5}$
d. $y = \dfrac{2}{x}$
e. $y = \dfrac{2x-5}{x^2+4x-12}$
f. $y = \sqrt{x^2-7x+12}$

11. Dari fungsi-fungsi yang disajikan dengan himpunan pasangan berurutan berikut ini manakah yang merupakan fungsi onto, injektif atau bijektif Jika domain A={a, b, c, d} dan kodomain B = {1, 2, 3, 4}?
a. {(a, 1), (b, 1), (c, 3), (d, 4)}
b. {(a, 1), (b, 2), (c, 3),(d,3)}
c. {(a, 3), (b, 2), (c, 1),(d,4)}
d. {(a, 2), (b, 2), (c, 2),(d,2)}
e. {(a, 1), (b, 1), (c, 2),(d,2)}

12. Jika g : x→ 2x² +1 domainnya {-2 ≤ x ≤ 2, x ε B}, tentukanlah daerah hasil dan buatlah diagram cartesiusnya.

13. Diketahui f(x) = ax + b. dengan f (2) = 9 dan f (0) = -1 Tentukan nilai a dan b kemudian tuliskan persamaannya.

14. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 3x$. tentukanlah nilai dari: f(-3), f(4), f(0) dan $f(\frac{1}{2})$

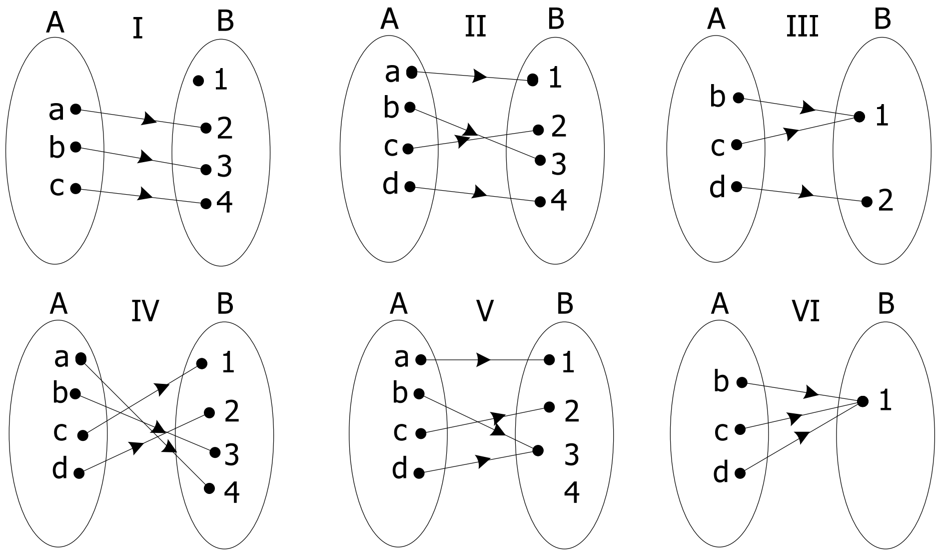
15. Diketahui f(x) = ax + b. dengan f (3) = 4 dan f (-2) = -11 Tentukan nilai a dan b kemudian tuliskan persamaannya

16. Selidiki fungsi di bawah ini fungsi genap, fungsi ganjil atau bukan kedua duanya:

a. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$
b. $f(x) = \dfrac{2x^3+2x^2}{x^4+3}$
c. $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - x$
d. $f(x) = \dfrac{x^4+3x^2-2}{x^3+5x}$
e. $f(x) = \dfrac{x^5-x^3+6x}{8x^7+x}$
f. $f(x) = 2x^4 + 5x^2$

17. Lukislah grafiknya dari fungsi di bawah ini :
a. $y = | x + 5 |$
b. $y = | 6 - 3x |$
c. $y = | x^2 - 6x - 16|$
d. $y = | 9 - x^2 |$
e. $y = | 3x - x^2 |$

18. Dari fungsi-fungsi yang disajikan dengan diagram panah berikut ini manakah yang merupakan fungsi onto, injektif atau bijektif, jika relasi dari A ke B ?



B.2 Konsep Fungsi Linier

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Membuat grafik fungsi linier.
- Menentukan persamaan grafik fungsi linier yang melalui dua titik, melalui satu titik dan gradien tertentu, dan jika diketahui grafiknya.
- Menemukan syarat hubungan dua grafik fungsi linier saling sejajar dan saling tegak lurus
- Menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan fungsi Linier

b. Uraian Materi

1). Pengertian fungsi linier

Fungsi linier adalah suatu fungsi yang variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus. Oleh karena itu fungsi linier sering disebut dengan *persamaan garis lurus (pgl)* dengan bentuk umumnya sbb.:

$f : x \to mx + c$ atau $f(x) = mx + c$ atau $y = mx + c$

m adalah gradien / kemiringan / kecondongan dan c adalah konstanta

Contoh 17

Fungsi linier
- $f : x \to 2x + 5$
- $f(x) = 5x - 10$
- $y = x - 7$
- $3y + 4x = 12$
- $y = 5$

bukan fungsi linier
- $y = x^2 + 1$
- $\frac{2}{y} = x$
- $5xy + y = 10$

2). Melukis grafik fungsi linier

Langkah-langkah melukis grafik fungsi linier

a Tentukan titik potong dengan sumbu x, y = 0 diperoleh koordinat A(x_1, 0)

b Tentukan titik potong dengan sumbu y, x = 0 diperoleh koordinat B(0, y_1)

c hubungkan dua titik A dan B sehingga terbentuk garis lurus

Contoh 18

Lukislah grafik dari $y = 2x - 6$

Jawab:

Titik potong dengan sumbu x → y = 0

$y = 2x - 6$
$0 = 2x - 6$
$6 = 2x$
$x_1 = 3 \rightarrow (3, 0)$

Titik potong dengan sumbu y → x = 0

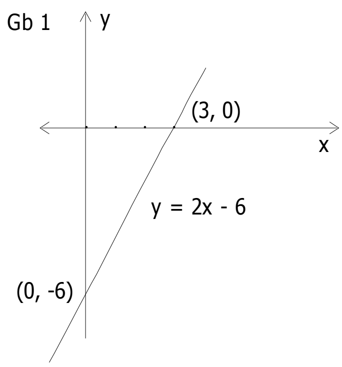
$y = 2x - 6$
$y = 2.0 - 6$
$y_1 = -6 \rightarrow (0, -6)$

sehingga diperoleh tabel :

x	3	0
y	0	- 6
(x, y)	(3, 0)	(0, -6)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 1.*

Untuk lukisan selanjutnya cukup dibuat tabel seperti di atas



Contoh 19

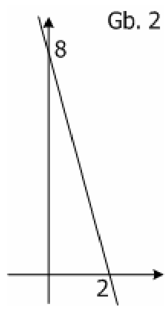
Lukislah grafik dari $y = 8 - 4x$

Jawab:

Dengan langkah di atas diperoleh tabel:

x	2	0
y	0	8
(x, y)	(2, 0)	(0, 8)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 2*



Contoh 20

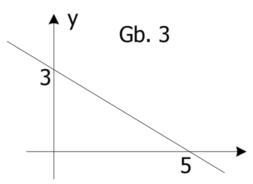
Lukislah grafik dari $3x + 5y = 15$

Jawab:

Dengan langkah di atas diperoleh tabel:

x	5	0
y	0	3
(x, y)	(5, 0)	(0, 3)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 3*



Contoh 21

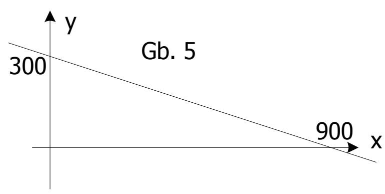
Lukislah grafik dari $x = 900 - 3y$

Jawab:

Dengan langkah di atas diperoleh tabel:

x	900	0
y	0	300
(x, y)	(900, 0)	(0, 300)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 5*



Contoh 22

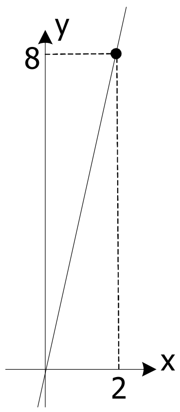
Lukislah grafik dari y = 4x

Jawab:

Fungsi di atas grafiknya memotong titik pangkal (0, 0) karena tidak ada konstanta jadi untuk melukisnya hanya butuh satu titik saja, misal x = 2 maka y = 2.4 = 8 sehingga tabelnya sebagai berikut.

x	0	2
y	0	8
(x, y)	(0, 0)	(2, 8)

Grafiknya diperoleh pada *gambar 4*



Gb. 4

Contoh 23

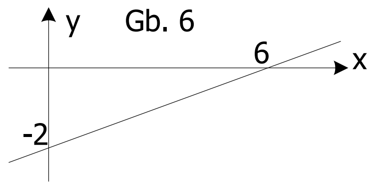
Lukislah grafik dari y = $\frac{1}{3}$x – 2

Jawab:

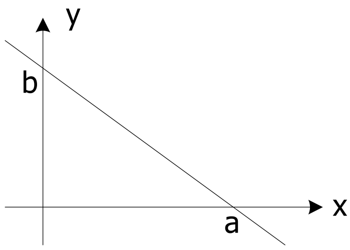
Persamaan fungsi di atas memuat pecahan, untuk menghilangkan pecahan kalikan dengan 3 sehingga diperoleh persamaan 3y = x – 6, dengan langkah di atas diperoleh tabel sebagai berikut:

x	6	0
y	0	-2
(x, y)	(6, 0)	(0, -2)

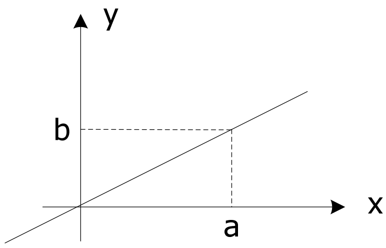
Grafiknya diperoleh pada *gambar 6*



3). Membuat persamaan garis lurus dari grafiknya



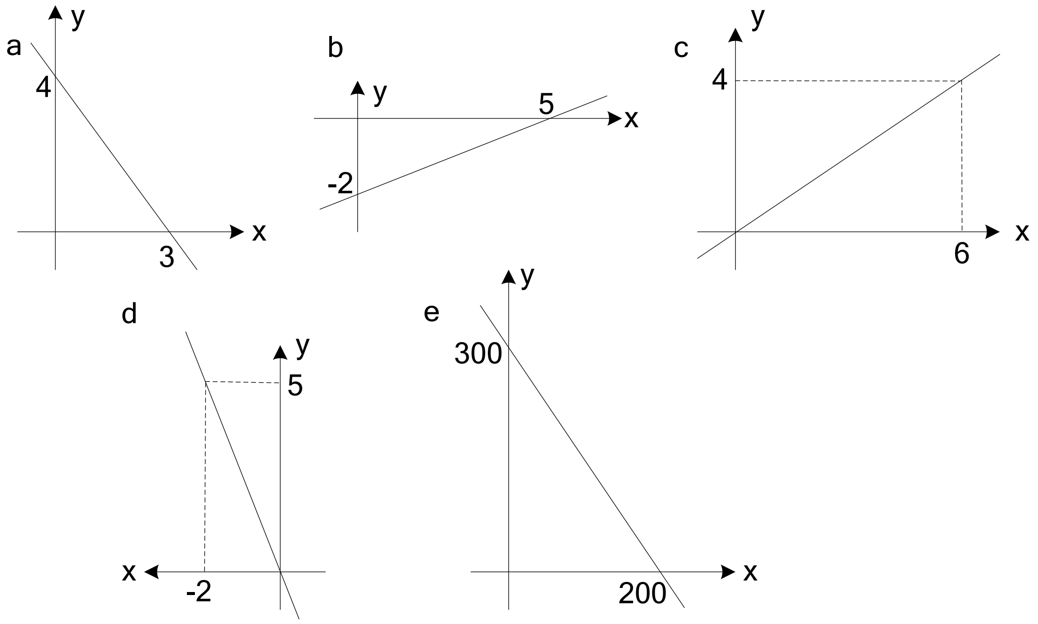
Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah *bx + ay = ab*



Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah $y = \frac{b}{a}x$

Contoh 24

Tentukanlah persamaan garisnya dari grafik di bawah ini



Jawab:

a. a = 3, b = 4, maka persamaan fungsinya
   $4x + 3y = 3.4$
   $4x + 3y = 12$

b. a = 5, b = -2, maka persamaan fungsinya
   $-2x + 5y = -2.5$
   $-2x + 5y = -10$ atau $2x - 5y = 10$

c. a = 6, b = 4, maka persamaan fungsinya
   $y = \frac{4}{6}x$
   $6y = 4x$
   $3y = 2x$ atau $2x - 3y = 0$

d. a = -2, b = 5, maka persamaan fungsinya
   $y = \frac{5}{-2}x$
   $-2y = 5x$ atau $5x + 2y = 0$

e. a = 200, b = 300, maka persamaan fungsinya
   $300x + 200y = 60.000$
   $3x + 2y = 600$

4). Gradien dan persamaan garis lurus

a). Garis lurus yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ memiliki gradien m:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \text{ atau } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh 25

Tentukan gradien dari garis lurus yang melalui titik-titik:

a. A(2, 4) dan B(3, 8)
b. P(-2, 1) dan Q(4, -11)

Jawab:

a. A(2, 4) berarti, $x_1 = 2$ dan $y_1 = 4$ dan B(3, 8) berarti $x_2 = 3$ dan $y_2 = 8$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-4}{3-2} = 4$

b. P(-2, 1) berarti, x_1 = -2 dan y_1 = 1 dan B(4, -11) berarti x_2 = 4 dan y_2 = -11

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-11-1}{4-(-2)} = \frac{-12}{6} = -2$

b. *Persamaan garis lurus yang melalui titik A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2)* adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Contoh 26

Tentukanlah persamaan garis lurus yang melalui titik (3, -4) dan (-2, 6)

Jawab:

x_1= 3, y_1 = -4, x_2 = -2 dan y_2 = 6, maka persamaan fungsi linier atau persamaan garis lurusnya adalah:

$\Leftrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$\Leftrightarrow \frac{y-(-4)}{6-(-4)} = \frac{x-3}{-2-3}$

$\Leftrightarrow \frac{y+4}{10} = \frac{x-3}{-5}$

$\Leftrightarrow$ -5(y + 4) = 10 (x – 3)

$\Leftrightarrow$ -5y – 20 = 10 x – 30 di bagi -5

$\Leftrightarrow$ y + 4 = - 2x + 6

$\Leftrightarrow$ y + 2x + 4 – 6 = 0

$\Leftrightarrow$ y + 2x – 2 = 0 atau

$\Leftrightarrow$ y + 2x = 2 atau

$\Leftrightarrow$ y = -2x + 2

Contoh 27

Tentukanlah persamaan garis lurus yang melalui titik (3, 1) dan (-5, 5)

Jawab:

x_1= 3, y_1 = 1, x_2 = -5 dan y_2 = 5

$\Leftrightarrow \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$\Leftrightarrow \frac{y-1}{5-1} = \frac{x-3}{-5-3}$

$\Leftrightarrow \frac{y-1}{4} = \frac{x-3}{-8}$

$\Leftrightarrow$ -8(y – 1) = 4 (x – 3)

$\Leftrightarrow$ -8y + 8 = 4x – 12 dibagi - 4

$\Leftrightarrow$ 2y – 2 = -x + 3

$\Leftrightarrow$ 2y + x – 2 – 3 = 0

$\Leftrightarrow$ 2y + x – 5 = 0 atau

$\Leftrightarrow$ 2y + x = 5

c. *Persamaan garis lurus (pgl) yang bergradien m dan melalui titik A(x_1, y_1)* adalah:

$$y = m (x - x_1) + y_1$$

Contoh 28

Tentukanlah persamaan garis lurus yang bergradien 2 dan melalui titik (-3,1)

Jawab:

$\Leftrightarrow$ y = m (x – x_1) + y_1

$\Leftrightarrow$ y = 2 (x – (-3)) + 1

$\Leftrightarrow$ y = 2 (x + 3) + 1

$\Leftrightarrow$ y = 2x + 6 + 1

$\Leftrightarrow$ y = 2x + 7

Contoh 29

Tentukanlah persamaan garis lurus yang bergradien $-\frac{2}{3}$ dan melalui (-6, 2)

Jawab:

$\Leftrightarrow$ $y = m(x - x_1) + y_1$

$\Leftrightarrow$ $y = -\frac{2}{3}(x - (-6)) + 2$

$\Leftrightarrow$ $y = -\frac{2}{3}(x + 6) + 2$

$\Leftrightarrow$ $y = -\frac{2}{3}x - 4 + 2$

$\Leftrightarrow$ $y = -\frac{2}{3}x - 2$ atau kali 3

$\Leftrightarrow$ $3y = -2x - 6$ atau $3y + 2x + 6 = 0$

5). Menentukan gradien dari persamaan garis lurus (pgl)

- Persamaan garis lurus : $ax + by = c$ maka gradiennya $m = -\frac{a}{b}$
- Persamaan garis lurus : $y = ax + b$ maka $m = a$
- Garis yang sejajar sumbu x memiliki persamaan $y = c$ dan $m = 0$
- Garis yang sejajar sumbu y memiliki persamaan $x = c$ dan tidak memiliki gradien

Contoh 30

a gradien dari Pgl : $2x + y = 5$ adalah $m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$

b gradien dari pgl : $-4x + 2y - 2 = 0$ adalah $m = -\frac{a}{b} = -\frac{-4}{2} = 2$

c gradien dari pgl : $-3y + 2x + 3 = 0$ adalah $m = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$

d gradien dari pgl : $y = 4x + 1$ adalah $m = 4$

e gradien dari pgl : $y = -10$ adalah $m = 0$

6). Titik potong dua buah garis

Menentukan titik potong dua buah garis lurus *identik* dengan menyelesaikan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel baik dengan metode eleminiasi, metode substitusi maupun metode grafik

Contoh 31

Tentukan titik potong persamaan garis : $y = 3x + 5$ dan $y = -2x + 15$

Jawab:

Eliminasi y,

$$\begin{array}{l} y = 3x + 5 \\ \underline{y = -2x + 15\ -} \\ 0 = 5x - 10 \end{array}$$

$5x = 10 \leftrightarrow x = 2$

substitusi $x = 2$ ke $y = 3x + 5$

$y = 2 \cdot 3 + 5$

$y = 11$ Jadi titik potong kedua garis di atas adalah (2, 11)

Contoh 32

Tentukan titik potong persamaan garis : $5x - 3y = 9$ dan $7x - 6y = 9$

Jawab:

Eliminasi y,

$$\begin{array}{l|l|l} 5x - 3y = 9 & x\,2 & 10x - 6y = 18 \\ 7x - 6y = 9 & x\,1 & \underline{7x - 6y = 9\ -} \\ & & 3x \qquad = 9 \\ & & \quad x = 3 \end{array}$$

substitusi $x = 3$ ke $5x - 3y = 9$

$5(3) - 3y = 9$

$-3y = 9 - 15$

$y = 2$

Jadi titik potong kedua garis di atas adalah (3, 2)

7). Hubungan dua buah garis

Dua garis yang bergradien m_1 dan m_2 dikatakan sejajar jika $m_1 = m_2$ dan tegak lurus jika $m_1 \times m_2 = -1$

Contoh 33

Dari beberapa persamaan garis di bawah ini, manakah yang saling sejajar dan berpotongan tegak lurus.

I. $2x + y - 4 = 0$

II. $y = -2x + 1$

III. $2y - x = 8$

IV. $3y + 2x + 1 = 0$

V. $y = \frac{3}{2}x$

VI. $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

Jawab:

$m_{I} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$, $m_{II} = -\frac{a}{b} = -2$, $m_{III} = -\frac{a}{b} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$,

$m_{IV} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3}$, $m_{V} = \frac{3}{2}$ dan $m_{VI} = \frac{2}{3}$

I dan II saling sejajar karena gradiennya sama, yaitu $m = -2$

I dan III, IV dan V berpotongan tegak lurus karena $m_{I} \cdot m_{III} = -1$ dan $m_{IV} \cdot m_{V} = -1$

Contoh 34

Tentukan persamaan garis yang sejajar garis y – 3x + 1 = 0 dan melalui titik (2, -4)

Jawab:

y – 3x + 1 = 0 maka $m_1 = -\frac{-3}{1}$ = 3 karena sejajar maka $m_1 = m_2$ jadi $m_2 = 3$

$\Leftrightarrow$ $y = m_2 (x - x_1) + y_1$
$\Leftrightarrow$ $y = 3 (x - 2) + (-4)$
$\Leftrightarrow$ $y = 3x - 6 - 4$
$\Leftrightarrow$ $y = 3x - 10$

Contoh 35

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus 2y + x = 1 melalui titik pangkal (0, 0)

Jawab:

2y + x + 1 = 0 maka $m_1 = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

karena tegak lurus maka $m_1 \cdot m_2 = -1$

$m_2 = \frac{-1}{m_1} = \frac{-1}{-0{,}5} = 2$, jadi persamaan garisnya adalah:

$\Leftrightarrow$ $y = m_2 (x - x_1) + y_1$
$\Leftrightarrow$ $y = 2(x - 0) + 0$
$\Leftrightarrow$ $y = 2x$

Contoh 36

Tentukan persamaan garis yang tegak lurus $y = -\frac{1}{4}x$ dan melalui titik potong persamaan garis y = -x + 4 dan garis y = 3x – 8

Jawab:

$y = -\frac{1}{4}x$ maka $m_1 = -\frac{1}{4}$ karena tegak lurus maka $m_1 \cdot m_2 = -1$ diperoleh $m_2 = 4$

Menentukan titik potong persamaan garis : y = -x + 4 dan garis y = 3x – 8 dengan metode substitusi diperoleh:

$-x + 4 = 3x - 8$
$-4x = -12 \Leftrightarrow x = 3$

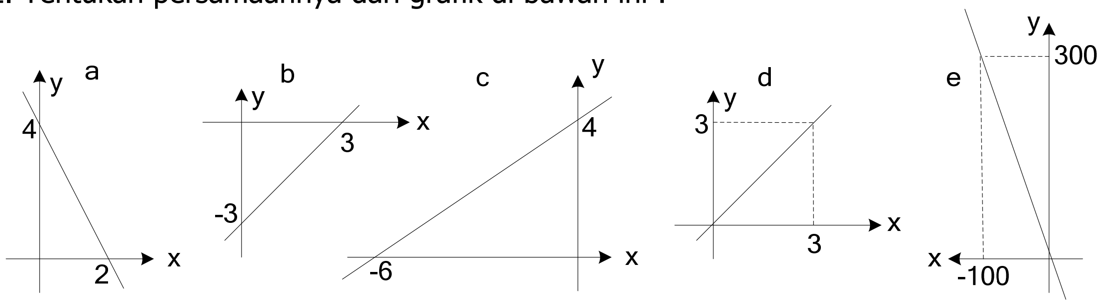
substitusikan nilai x = 3 ke persamaan 1 atau 2 diperoleh y = 1 sehingga titik potong kedua garis tersebut adalah (3, 1). Persamaan garis yang akan dibuat adalah bergradien m = 4 dan melalui (3, 1), yaitu

$y = m_2 (x - x_1) + y_1$
$y = 4 (x - 3) + 1$
$y = 4x - 12 + 1$
$y = 4x - 11$

LATIHAN 2

1. Lukislah grafik garis lurus di bawah ini:
   - a $y = 3x + 6$
   - b $y = 12 - 3x$
   - c $2x + 5y = 10$
   - d $y = -2x$
   - e. $y = \frac{1}{2}x$
   - f $3x - 2y = 900$
   - g $y - 2x = 0$
   - h $y - 3x + 6 = 0$
   - i $360y + 240x = 42.000$
   - j. $y = \frac{1}{2}x + 4$

2. Tentukan persamaannya dari grafik di bawah ini :



3. Tentukanlah gradiennya dari garis lurus yang melalui titik-titik di bawah ini:
   - a (-4, 5) dan (4, -1)
   - b (3, -5) dan (-3, 5)
   - c (-2, 4) dan (4, 5)
   - d (2, 6) dan (-4, 6)
   - e (4, -2) dan (4, 8)

4. Tentukan persamaan garis lurus yang melalui dua titik di bawah ini:
   - a (2, 5) dan (5, 8)
   - b (4, -1) dan (-2, 11)
   - c (4, 3) dan (-1, -4)
   - d (-2,4) dan (-2, 8)

5. Tentukanlah gradien garis yang memiliki persamaan:
   - a $y = -3x + 2$
   - b $3x - y + 6 = 0$
   - c. $\frac{2}{3}x + 3y + 9 = 0$
   - d $y = x + 4$
   - e $x + y = -5$
   - f. $-\frac{4}{5}x - 2y + 1 = 0$

6. Tentukanlah persamaan garis yang diketahui sebagai berikut:
   - a Gradien m = -4 dan melalui (2, 5)
   - b gradient m = 2 dan melalui (-4, 5)
   - c Gradien $m = -\frac{1}{3}$ dan melalui titik pangkal
   - d Gradien $m = \frac{1}{2}$ dan melalui (-6, 1)

7. Selidiki apakah dua garis berpotongan tegak lurus, sejajar atau tidak duanya:

a. $4y - 2x = 0$
   $2y - x - 6=0$
b. $2y - x - 4=0$
   $2y + 6x - 7 = 0$
c. $2y - x = 6$
   $y = -2x + 10$
d $3x - 9y + 1 = 0$
   $y = 1/3\,x - 1$
e $2y - x + 8 = 0$
   $8y - 4x - 24 = 0$
f $2y = 3x + 4$
   $-2y + 3x = 1$

8. Tentukan persamaan garis lurus yang :
   a sejajar garis $x + y + 1 = 0$ dan melalui titik (1,2)
   b tegak lurus garis $x + 5y = 0$ dan melalui titik (-3, 6)

9. Tentukanlah persamaan garis lurus yang diketahui sebagai berikut :
   a. Melalui dua titik (2, -4) dan (5, 5)
   b. Bergradien -5 dan melalui titik pangkal
   c. Bergradien 3 dan melalui (-5,-1)
   d. Melalui (8, -4) dan titik pangkal
   e. Sejajar garis: $y = 3x + 3$ dan melalui (-2, 4)
   f. Tegak lurus : $3y - x + 8 = 0$ dan melalui (3, -1)

10. Lukis garis $y = 3x - 9$ dan $x + 2y = 10$ dan tentukanlah titik potongnya.

11. Tentukan persamaan garis yang sejajar garis $5x - y = 2$ dan melalui titik potong dua garis $2x - y = 7$ dan $x + 3y = 7$.

12. Tentukan persamaan garis yang tegak lurus $y = 4x$ dan melalui titik potong dua garis $x + 2y - 10 = 0$ dan $2x - y - 15 = 0$

---

8). Aplikasi fungsi linier dalam bidang ekonomi

a). Fungsi Permintaan

Dalam dunia bisnis, dikenal tentang hukum ekonomi, yaitu jika harga suatu barang naik maka permintaan terhadap barang tersebut menurun, sebaliknya jika harga suatu barang turun maka permintaan terhadap barang tersebut naik.
Secara matematika, harga barang merupakan fungsi dari permintaan. Fungsi permintaan yang paling sederhana adalah fungsi permintaan linier dengan bentuk umum fungsi permintaan sebagai berikut:

$$P = P_o + m\,x$$

Dengan P = harga satuan per unit
P_o = harga barang tertinggi saat $x = 0$ ($P_o > 0$)
x = jumlah barang ($x \geq 0$)
m = gradien fungsi dengan a selalu bernilai negatif($m < 0$)
Kurva permintaan selalu di kuadran I dan turun dari kiri atas ke kanan bawah
Perhatikan gambar II.a

b). Fungsi Penawaran

Dalam dunia bisnis, juga dikenal tentang hukum penawaran, yaitu jika harga suatu barang naik maka jumlah barang yang ditawarkan juga ikut naik, sebaliknya jika harga barang turun maka penawaran terhadap barang tersebut juga turun.

Secara matematika, harga barang merupakan fungsi juga dari penawaran. Fungsi penawaran yang paling sederhana adalah fungsi penawaran linier dengan bentuk umum fungsi penawaran sebagai berikut:

$$P = P_o + m\,x$$

Dengan P = harga satuan per unit

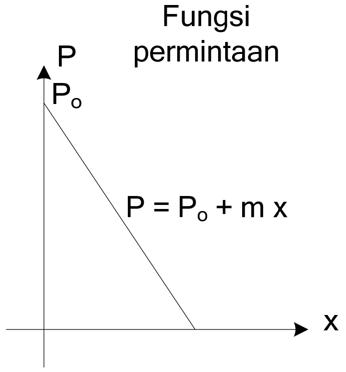
P_o = harga barang terendah saat x = 0 ($P_o > 0$)

x = jumlah barang ($x \geq 0$)

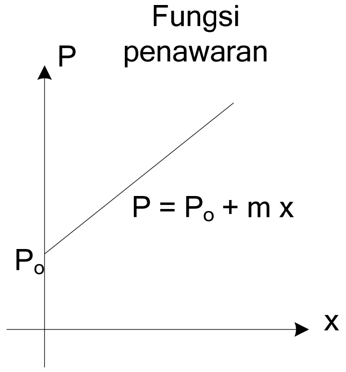
m = gradien fungsi dengan a selalu bernilai positif (m > 0)

Kurva penawaran selalu di kuadran I dan naik dari kiri bawah ke kanan atas.

Perhatikan gambar II.b



Gambar II.a : Fungsi permintaan



Gambar II.b : Fungsi penawaran

Contoh 37

Dari fungsi linier di bawah ini, manakah yang termasuk fungsi permintaan dan fungsi penawaran.

a. P = - 4x + 400

b. P – 3x = 600

c. P = 2x + 10

d. P + 10x = 1.000

Jawab:

a. P = - 4x + 400 merupakan fungsi permintaan karena nilai gradiennya -4 (m < 0)

b. P – 3x = 600 merupakan fungsi penawaran karena nilai gradiennya 3 (m > 0)

c. P = 2x + 10 merupakan fungsi penawaran karena nilai gradiennya 2 (m > 0)

d. P + 10x = 1.000 merupakan fungsi permintaan karena nilai m = -10 (m < 0)

Contoh 38

Harga tertinggi pada fungsi permintaan suatu barang adalah Rp8.000,00. Jika pada saat harganya Rp6.000 jumlah barang yang diminta adalah 500 unit.

a. Tentukan fungsi permintaan liniernya

b. Lukis kurva permintaannya

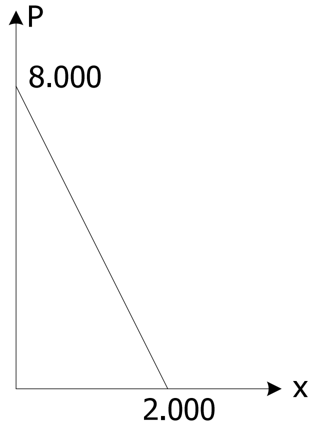
Jawab:

a. P_o = 8.000, P = 6.000 dan x = 500 disubstitusikan ke fungsi permintaan P = Po + m x diperoleh:

6.000 = 8.000 + m . 500
500 m = - 2.000 ⇔ m = -4
Jadi fungsi permintaannya: P = -4x + 8.000

b. Dengan menggunakan prinsip melukis fungsi linier, maka kurva P = -4x + 8.000 dapat dilukis sebagai berikut:

P	0	2.000
x	8.000	0



Contoh 39

Dalam suatu hukum penawaran suatu barang diperoleh data: jika harga barang Rp900,00 tiap unit maka jumlah barang yang ditawarkan 20 unit, dan jika harga barang Rp1.200,00 tiap unit maka jumlah barang yang ditawarkan 50 unit.

a. Tentukan rumus fungsi penawarannya

b. Jika Jumlah barang yang ditawarkan 1.000 unit, tentukan harga barang tersebut.

Jawab:

a. Fungsi penawaran linier dirumuskan sebagai berikut:
$P = P_o + m\,x$
Untuk P = 800 dan x = 20 diperoleh persamaan: $900 = P_o + 20\ m$ . . . 1)
Untuk P = 1.200 dan x = 50 diperoleh persamaan: $1.200 = P_o + 50\ m$ . . . 2)

Dari 1) dan 2) jika P_o di eliminasikan, diperoleh:

$$\begin{array}{r} 1200 = P_o + 50m \\ 900 = P_o + 20m \ \_ \\ \hline 300 = 30\ m \end{array} \Leftrightarrow m = 10,$$

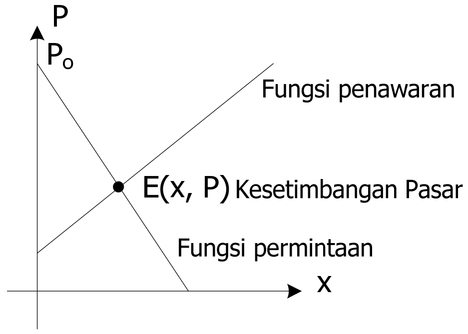
substitusikan nilai m = 10 ke 1) diperoleh:
$900 = P_o + 20\ m$
$900 = P_o + 200 \Leftrightarrow P_o = 700$
Jadi fungsi penawarannya: P = 10x + 700

b. P = 10 . 1.000 + 700
= Rp10.700,00

c). Titik Kesetimbangan Pasar

Pasar merupakan tempat bertemunya penjual dan pembeli untuk mengadakan transaksi jual beli. Oleh karena itu akan terjadi tawar-menawar antara penjual dan pembeli. Harga pasar atau sering disebut dengan kesetimbangan pasar akan terjadi bila harga yang diminta konsumen sesuai dengan harga yang ditawarkan produsen.

Secara matematika, kesetimbangan pasar terjadi apabila kurva permintaan dan kurva penawaran berpotongan pada sebuah titik yang dinamakan titik kesetimbangan pasar. Dalam bentuk grafik:



Gambar II.c : Titik kesetimbangan

Menentukan titik kesetimbangan pasar diperoleh dengan cara menyelesaikan sistim persamaan linier dua variabel x dan P

Contoh 40

Tentukan titik kesetimbangan pasarnya dari fungsi permintaan dan fungsi penawaran di bawah ini:

a. Fungsi permintaan: P = -2x + 600
   Fungsi penawaran: P = 3x + 100

b. Fungsi permintaan: 2P + 5x = 1.500
   Fungsi penawaran: 3P – 4x = 1.100

Jawab:

a. Harga penawaran = harga permintaan

$$3x + 100 = -2x + 600$$
$$3x + 2x = 600 - 100$$
$$5x = 500$$
$$x = 100$$

Harga penawaran: $P = 3x + 100$

$$P = 3.\ 100 + 100 = 400$$

Jadi titik kesimbangan pasar terjadi pada saat harga Rp400 dan jumlah barang yang diminta atau ditawarkan sebanyak 100 unit

b. $2P = -5x + 1.500 \Leftrightarrow P = -\frac{5}{2}x + 750$

$3P = 4x + 1.100 \Leftrightarrow P = \frac{4}{3}x + \frac{1.100}{3}$

Harga penawaran = harga permintaan

$$\frac{4}{3}x + \frac{1.100}{3} = -\frac{5}{2}x + 750 \quad \text{(kalikan 6)}$$

$$8x + 2.200 = -15x + 4.500$$
$$8x + 15x = 4.500 - 2.200$$
$$23x = 2.300$$
$$x = 100$$

Harga penawaran: $3P = 4x + 1.100$

$$3P = 4.\ 100 + 1.100$$
$$P = 500$$

Jadi titik kesimbangan pasar terjadi pada saat harga Rp500 dan jumlah barang yang diminta atau ditawarkan sebanyak 100 unit

d). Titik pulang pokok (*Break even point*)

Suatu perusahaan dalam memproduksi barang tentu akan memerlukan biaya, yaitu biaya tetap (upah karyawan, biaya gedung, bunga kredit bank dan lain-lain) dan biaya variabel (biaya yang diperlukan dalam proses produksi).

Dalam suatu usaha yang dijalankan, suatu perusahaan akan terjadi kemungkinan:

Jika pendapatan yang diterima melebihi biaya total (biaya variabel + biaya tetap) yang dikeluarkan, maka usaha tersebut dikatakan untung.

Jika pendapatan yang diterima kurang dari biaya total yang dikeluarkan, maka usaha tersebut dikatakan rugi.

Jika pendapatan yang diterima sama dengan biaya total yang dikeluarkan, maka usaha tersebut dikatakan dalam kondisi tidak tidak rugi. Kondisi seperti ini disebut dengan titik pulang pokok atau untung maupun ***break even point***

Contoh 41

CV SEJAHTERA memproduksi mainan anak-anak dengan biaya Rp6.500,00 tiap unit. Biaya tetap yang dikeluarkan Rp17.500.000,00. Jika mainan akan dijual Rp10.000,00/tiap unit, tentukan:

a. Jika B merupakan biaya total yang dikeluarkan, tentukan fungsi biayanya.
b. Jumlah mainan yang harus terjual agar terjadi ***break even point***
c. Jumlah mainan yang harus terjual agar perusahaan untung Rp17.500.000,00

Jawab:

a. B = Biaya variabel + biaya tetap

$$B = 6.500\ x + 17.500.000$$

b. *Break even point* terjadi jika: Biaya total = pendapatan

$$6.500\ x + 17.500.000 = 10.000\ x$$
$$17.500.000 = 10.000\ x - 6.500\ x$$
$$x = \frac{17.500.000}{3.500} = 5.000$$

Jumlah mainan yang harus terjual agar terjadi *break even point* adalah 5.000 unit

c. Untung = pendapatan – biaya total

$17.500.000 = 10.000x - (6.500x + 17.500.000)$

$17.500.000 = 10.000x - 6.500x - 17.500.000$

$17.500.000 + 17.500.000 = 3.500x$

$$x = \frac{35.000.000}{3.500} = 10.000$$

Jumlah mainan yang harus terjual agar untung Rp17.500.000,00 adalah 10.000 unit

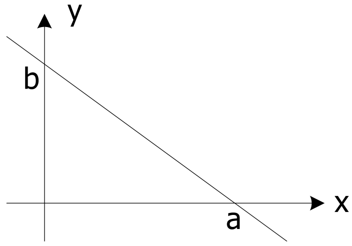
c. Rangkuman

1. Fungsi linier adalah suatu fungsi yang variabelnya berpangkat satu atau suatu fungsi yang grafiknya merupakan garis lurus dengan bentuk umumnya sbb.:

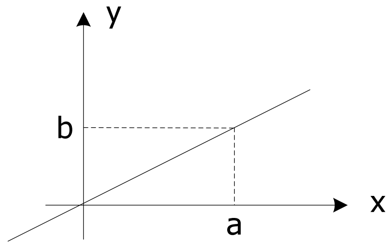
   $f : x \to mx + c$ atau $f(x) = mx + c$ atau $y = mx + c$

2. Langkah-langkah melukis grafik fungsi linier
   a. Tentukan titik potong dengan sumbu x dengan y = 0 ; $A(x_1, 0)$
   b. Tentukan titik potong dengan sumbu y dengan x = 0 ; $B(0, y_1)$
   c. hubungkan dua titik A dan B sehingga terbentuk garis lurus

3. Membuat persamaan garis lurus dari grafiknya



Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah bx + ay = ab



Dari grafik di atas, persamaan garisnya adalah $y = \frac{b}{a}x$

4. Garis lurus yang melalui $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ memiliki gradien $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

5. Persamaan garis lurus melalui $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

6. Persamaan garis lurus bergradien m dan melalui $A(x_1, y_1)$: $y = m(x - x_1) + y_1$

7. Persamaan garis lurus : ax + by = c memiliki gradien $m = -\frac{a}{b}$

8. Persamaan garis lurus : y = ax + b memiliki gradien m = a

9. Garis yang sejajar sumbu x memiliki persamaan y = c dan m = 0

10. Garis yang sejajar sumbu y memiliki persamaan x = c dan tidak memiliki gradien

11. Menentukan titik potong dua buah garis lurus *identik* dengan menyelesaikan himpunan penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel baik dengan metode eliminasi metode substitusi maupun metode grafik

12. Dua garis yang bergradien m_1 dan m_2 dikatakan sejajar jika $m_1 = m_2$ dan tegak lurus jika $m_1 \times m_2 = -1$

13. Fungsi permintaan dan penawaran linier dirumuskan sebagai berikut:

$$P = P_o + m\,x$$

P = harga satuan per unit
P_o = harga barang tertinggi untuk fungsi permintaan
P_o = harga barang terendah untuk fungsi penawaran
x = jumlah barang ($x \geq 0$)
m = gradien fungsi dengan $m < 0$ untuk fungsi permintaan
$m > 0$ untuk fungsi penawaran
Kurva permintaan dan penawaran selalu di kuadran I

14. Secara matematika, kesetimbangan pasar terjadi apabila kurva permintaan dan kurva penawaran berpotongan pada sebuah titik yang dinamakan titik kesetimbangan pasar. Menentukan titik kesetimbangan pasar diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan linier dua variabel x dan P

15. Jika pendapatan yang diterima sama dengan biaya total yang dikeluarkan, maka usaha tersebut dikatakan tidak untung atau tidak rugi. Hal seperti ini disebut dengan titik pulang pokok atau *break even point*

LATIHAN 3

1. Dari fungsi linier di bawah ini, manakah yang termasuk fungsi permintaan dan fungsi penawaran, berikan alasan dari nilai gradiennya
   a. $5P + 2x = 400$
   b. $2P - 3x - 300 = 0$
   c. $3x = P - 350$
   d. $P = -5x + 10$
   e. $10P + 2x = 500$
   f. $5x = 2p - 250$

2. Harga tertinggi pada fungsi permintaan suatu barang adalah Rp1.500,00. Jika pada saat harganya Rp800 jumlah barang yang diminta adalah 350 unit.
   a. Tentukan fungsi permintaan liniernya
   b. Lukis kurva permintaannya

3. Harga terendah pada fungsi penawaran suatu barang adalah Rp5.000,00. Jika pada saat harganya Rp8.000 jumlah barang yang diminta adalah 600 unit.
   a. Tentukan fungsi penawaran liniernya
   b. Lukis kurva penawarannya

4. Dalam hukum penawaran suatu barang diperoleh data: jika harga barang Rp500,00 tiap unit maka jumlah barang yang ditawarkan 50 unit, dan jika harga barang Rp650,00 tiap unit maka jumlah barang yang ditawarkan 80 unit.
   a. Tentukan rumus fungsi penawarannya
   c. Sketsa grafik penawarannya
   b. Jika Jumlah barang yang ditawarkan 500 unit, tentukan harga barang tersebut.

5. Dalam hukum permintaan suatu barang diperoleh data: jika harga barang Rp1.250,00 tiap unit maka jumlah barang yang diminta 500 unit, dan jika harga barang 900,00 tiap unit maka jumlah barang yang diminta 600 unit.
   a. Tentukan rumus fungsi permintaannya
   b. Jika harga barang Rp1.600,00, tentukan jumlah barang yang diminta.

6. Tentukan titik kesetimbangan pasarnya dan sketsa grafiknya dari fungsi permintaan dan fungsi penawaran di bawah ini:
   a. Fungsi permintaan: $P = -7x + 1400$
      Fungsi penawaran: $P = 3x + 400$

   b. Fungsi permintaan: $3P + 7x = 1.500$
      Fungsi penawaran: $2P - 5x = 900$

   c. Fungsi permintaan: $x = -4p + 3.400$
      Fungsi penawaran: $2P = 5x + 600$

   d. Fungsi permintaan: $3P + 2x = 230$
      Fungsi penawaran: $2P - 9x = 50$

7. CV BAGI ADIL memproduksi suatu barang dengan biaya Rp2.500,00 tiap unit. Biaya tetap yang dikeluarkan Rp12.500.000,00. Jika produk dijual Rp10.000,00. dengan pemberian rabat kepada distributor sebesar 20%. Tentukan:
   a. Tentukan fungsi biayanya B jika B merupakan biaya total yang dikeluarkan.
   b. Jumlah barang yang harus terjual agar terjadi *break even point*
   c. Jumlah barang yang harus terjual agar CV untung Rp2.500.000,00

8. Biaya untuk memproduksi 10 buah kemeja pria adalah Rp800.000,00. Sedangkan bila memproduksi 30 buah adalah Rp2.000.000,00. Jika fungsi biaya dianggap fungsi linier:
   a. Tentukan persamaan fungsi biayanya
   b. Tentukan besar biaya tetapnya
   c. Tentukan besar biayanya jika kemeja yang diperoduksi 50 unit

9. PT KIRANA mencetak sebuah buku dengan biaya Rp12.000,00 tiap unit. Biaya tetap yang dikeluarkan Rp15.000.000,00. Jika buku dijual dengan harga Rp30.000,00 dengan perhitungan 30 % untuk rabat distributor dan 10% untuk royalti pengarang, tentukan :
   a. Fungsi biayanya B jika B merupakan biaya total yang dikeluarkan.
   b. Jumlah buku yang harus terjual agar terjadi *break even point*
   c. Jumlah buku yang harus terjual agar perusahaan untung Rp15.000.000,00

B.3 Fungsi Kuadrat

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menentukan titik potong grafik fungsi dengan sumbu koordinat, sumbu simetri dan nilai ekstrim suatu fungsi
- Menggambar grafik fungsi kuadrat
- Menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan fungsi kuadrat

b. Uraian Materi

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah: $f(x) = ax^2 + bx + c$ dimana $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola dengan persamaan $y = ax^2 + bx + c$.

Beberapa langkah yang ditempuh untuk menggambar grafik fungsi kuadrat adalah:

a. Titik potong grafik dengan sumbu x, dengan mengambil y = 0

b. Titik potong grafik dengan sumbu y, dengan mengambil x = 0

c. Sumbu simetri grafik yaitu $x = -\frac{b}{2a}$

d. Koordinat titik balik atau titik puncak (x,y) di mana $x = -\frac{b}{2a}$ dan $y = -\frac{D}{4a}$ dengan $D = b^2 - 4ac$.

e. Grafik terbuka ke bawah jika a < 0 dan terbuka ke atas jika a > 0.

Contoh 42

Gambarlah grafik fungsi kuadrat (parabola) berikut ini dengan domain bilangan real!

a. $f(x) = x^2 - 2x - 8$ b. $g(x) = 4x - x^2$

Jawab:

a. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 2x - 8$ mempunyai persaman $y = x^2 - 2x - 8$ di mana a = 1, b = -2 dan c = -8

- Titik potong grafik dengan sumbu x, untuk y = 0

  $x^2 - 2x - 8 = 0$

  $(x - 4)(x + 2) = 0$

  x = 4 atau x = -2

  Titik potong dengan sumbu x adalah (-2, 0) dan (4, 0).

  Nilai x = 4 dan x = -2 disebut pembuat nol fungsi, artinya pada x = 4 dan x = -2 fungsi tersebut bernilai nol.

- Titik potong grafik dengan sumbu y, untuk x = 0

  $y = 0^2 - 4(0) - 8 = -8$

  Titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0, -8).

❖ Persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$

$= -\frac{(-2)}{2(1)} = 1$

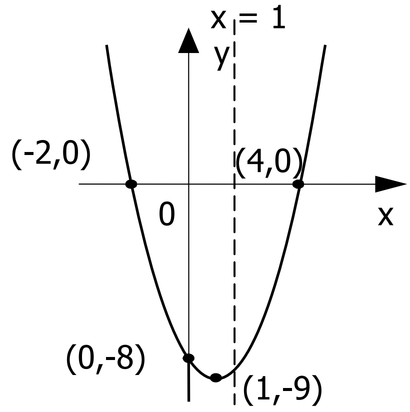
❖ Koordinat titik balik

$x = -\frac{b}{2a}$ $y = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= -\frac{(-2)}{2(1)}$ $= -\frac{(-2)^2 - 4(1)(-8)}{4(1)}$

$= 1$ $= -\frac{4+32}{4} = -9$

Koordinat titik balik adalah (1,-9).



❖ Karena a = 1 > 0 maka grafik membuka ke atas.

b. Grafik fungsi $f(x) = 4x - x^2$ mempunyai persaman $y = 4x - x^2$ dimana koefisien a = -1, b = 4 dan c = 0.

❖ Titik potong grafik dengan sumbu x, untuk y = 0

$4x - x^2 = 0$

$x(4 - x) = 0$

$x = 0$ atau $x = 4$

Titik potong dengan sumbu x adalah (0, 0) dan (4, 0).

Nilai x = 0 dan x = 4 disebut pembuat nol fungsi, artinya pada saat x = 0 dan x = 4 fungsi tersebut bernilai nol.

❖ Titik potong grafik dengan sumbu y, untuk x = 0

$y = 4(0) - (0)^2 = 0$

Titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0, 0).

❖ Persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$

$= -\frac{4}{2(-1)}$

$= 2$

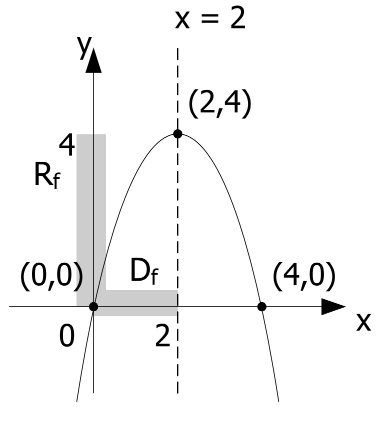
❖ Koordinat titik balik

$x = -\frac{b}{2a}$ $y = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= -\frac{4}{2(-1)}$ $= -\frac{4^2 - 4(-1)(0)}{4(-1)}$

$= 2$ $= -\frac{16}{-4} = 4$

Koordinat titik balik adalah (2, 4).



❖ Karena a = -1 < 0 maka grafik membuka ke bawah.

Koordinat titik balik grafik fungsi kuadrat dapat berupa titik maksimum atau titik minimun tetapi tidak sekaligus kedua-duanya.

❖ Jika a < 0 maka titik balik berupa titik maksimum dan

❖ Jika a > 0 maka titik balik berupa titik minimum.

Pada contoh 37 b. grafik fungsi mempunyai titik maksimum (2, 4) dengan nilai maksimum sama dengan 4 atau y = 4. Sedangkan pada contoh 37 a. grafik fungsi mempunyai titik minimum (1,-9) dengan nilai minimum -9 atau y = -9.

Sehingga nilai maksimum atau minimum grafik fungsi adalah $y = -\frac{D}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$,

ini terjadi pada saat $x = -\frac{b}{2a}$.

Contoh 43

Jika domain dari fungsi pada contoh 42 b. adalah $D_f = \{x \mid 0 \le x \le 2, x \in R\}$, tentukan range fungsi tersebut !

Jawab:

Domain dan range fungsi dapat dilihat dari grafik pada jawaban contoh nomor 42b yang merupakan selang terarsir pada sumbu x dan sumbu y, yaitu pada x = 0 nilai fungsi $f(0) = 4(0) - 0^2 = 0$, sedangkan x = 2 fungsi bernilai $f(2) = 4.2 - 2^2 = 4$. Sehingga range berada pada interval 0 sampai 4 atau $R_f = \{y \mid 0 \le y \le 4, y \in R\}$.

Yang perlu diperhatikan untuk mencari range adalah selain nilai pada ujung-ujung interval yang diperiksa tetapi juga nilai maksimum atau minimum fungsi. Interval range/daerah hasil diperoleh di antara nilai terkecil dan terbesar dari ketiga nilai tersebut.

Contoh 44

Tentukan range $f(x) = x^2 - 2x - 3$ dengan domain $D_f = \{x \mid -1 \le x \le 4, x \in R\}$!

Jawab:

Nilai pada ujung-ujung interval

Untuk x = -1 $\Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$

x = 4 $\Rightarrow f(4) = 4^2 - 2(4) - 3 = 5$

Nilai maksimum/minimum $y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4.1.(-3)}{4.1} = -\frac{16}{4} = -4$

Dari ketiga nilai yang didapat dapat disimpulkan bahwa range fungsi tersebut adalah $R_f = \{y \mid -4 \le y \le 5, y \in R\}$.

Contoh 45

Selembar plat berbentuk persegipanjang. Jika diketahui kelilingnya 180 cm, berapakah luas maksimum plat tersebut ?

Jawab:

Misalkan panjang plat = p dan lebarnya = t

Keliling K = 2(p + t) = 180

P + t = 90

Artinya p = 90 – t atau t = 90 – p.

Luas L = p.t = (90 – t)t

$= 90t - t^2$

Luas maksimum = $-\dfrac{b^2-4ac}{4a} = -\dfrac{90^2-4.(-1).0}{4.(-1)} = -\dfrac{8100}{-4} = 2.025\ cm^2$

Contoh 46

Jika x + y = 5, Tentukanlah nilai x dan y agar bentuk (x – 2y + 4)(-x + 2y + 8) mencapai nilai maksimum, dan tentukan pula nilai maksimum tersebut.

Jawab:

Misalkan P = (x – 2y + 4)(-x + 2y + 8)
x + y = 5
y = 5 – x substitusi pada P
P = (x – 2(5 – x) + 4)(-x + 2(5 – x) + 8)
= (x – 10 + 2x + 4)(-x + 10 – 2x + 8)
= (3x – 6)(-3x+18)
= $-9x^2 + 72x - 108$

P mencapai maksimum jika : $x = -\dfrac{b}{2a}$

$= -\dfrac{72}{2(-9)} = 4$

y = 5 – x
= 5 – 4 =1

P maksimumnya = $-9x^2 + 72x - 108$
= $-9.4^2 + 72.4 - 108$
= 36

c. Rangkuman

1. Bentuk umum fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ atau $y = ax^2 + bx + c$. dimana a, b, c $\in$ R dan a $\neq$ 0. Grafik fungsi kuadrat berbentuk parabola

2. Langkah-langkah yang ditempuh untuk menggambar grafik fungsi kuadrat adalah:
   a. Titik potong grafik dengan sumbu x, dengan mengambil y = 0.
   b. Titik potong grafik dengan sumbu y, dengan mengambil x = 0.
   c. Sumbu simetri grafik yaitu $x = -\dfrac{b}{2a}$
   d. Koordinat titik balik atau titik puncak (x, y) dinama $x = -\dfrac{b}{2a}$ dan $y = -\dfrac{D}{4a}$ dengan $D = b^2 - 4ac$.
   e. Grafik terbuka ke bawah jika a < 0 dan terbuka ke atas jika a > 0.

LATIHAN 4

1. Tentukan: titik potong dengan sumbu x, sumbu y, persaman sumbu simetri, koordinat titik balik, gambar grafik dan range dari fungsi berikut ini!
   a. $f(x) = x^2 - 3x - 4$, $D_f = \{x|-1 < x < 4, x \in R\}$
   b. $g(x) = x^2 - 4$, $D_g = \{x|\ 0 < x < 3, x \in R\}$
   c. $h(x) = -x^2 + 6x$, $D_h = \{x|-1 \leq x \leq 7, x \in R\}$
   d. $k(x) = 2x^2 - 3x + 3$, $D_k = \{x|0 \leq x \leq 3, x \in R\}$

2. Bayangan x = -2 oleh fungsi $f(x) = x^2 - 3x + k - 1$ adalah 0, tentukan nilai k dan gambar grafiknya!

3. Grafik fungsi $g(x) = (a - 2)x^2 - 3x + a - 4$ melalui titik (-1,1), tentukan
   a. Nilai a
   b. Range fungsi dengan domain $D_g = \{x\ |-4 < x < 4, x \in B\}$.

4. Tentukan nilai p agar fungsi kuadrat $f(x) = px^2 + 4x + 2$ bernilai minimum sama dengan 3.

5. Sebuah peluru ditembakkan ke udara hingga lintasannya berbentuk parabola. Tinggi lintasan peluru setelah t detik dirumuskan dengan $h(t) = 20t - 2t^2$. Dari grafiknya, tentukanlah:
   a. Setelah berapa detik peluruh tersebut mencapai tinggi maksimum.
   b. Tinggi maksimum peluruh tersebut.
   c. Waktu yang diperlukan peluru hingga jatuh kembali ke tanah.

6. Jumlah dua bilangan sama dengan 20. Tentukan dua bilangan tersebut supaya hasil kalinya maksimum dan bilangan-bilangan itu !

7. Tentukanlah nilai p dari data di bawah ini:
   a. Nilai maksimum $px^2 - 4x + p - 2$ adalah 1
   b. Nilai maksimum $px^2 + 4x + p$ adalah 3

8. Hitunglah nilai minimum dari $x^2 + y^2$ untuk $2x + y = 4$.

9. Nilai minimum fungsi $f(x) = ax^2 + bx - 8$ adalah -9 dicapai pada x = 1, tentukanlah:
   a. Nilai a dan b
   b. Sketsa gambar grafiknya

10. Sebatang besi 400 centimeter akan dibuat persegipanjang dengan cara memotong kemudian mengelasnya untuk menyambungnya kembali, berapakah ukuran persegi panjang tersebut agar didapat luas persegi panjang yang maksimum dan hitung luas maksimum tersebut !

11. Keliling suatu segitiga siku-siku 25 cm. Jika sisi miringnya 9 cm, tentukanlah luas maksimum segitiga tersebut.

12. Luas dari kertas poster = $2m^2$. Bidang gambar pada kertas poster itu dibatasi dengan margin atas dan margin bawah masing-masing 21 cm, margin kiri dan margin kanan masing-masing selebar 14 cm. Jika panjang kertas poster adalah x dan luas bidang gambar adalah L.
    a. Nyatakan L sebagai fungsi dalam x
    b. Tentukan luas maksimum bidang gambar tersebut

B.4 Menerapkan Konsep Fungsi Kuadrat

a. Tujuan

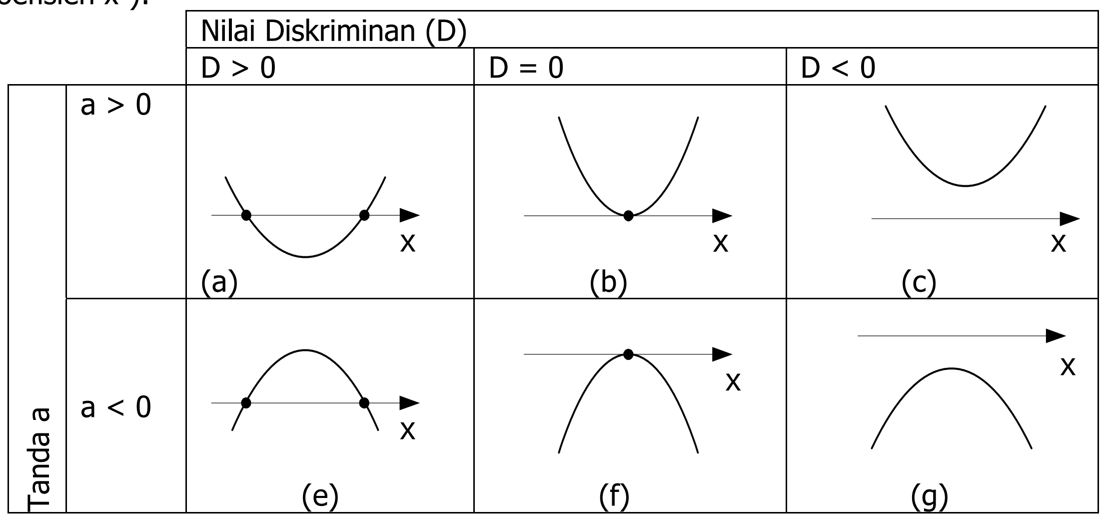
Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menentukan sifat-sifat fungsi kuadrat berdasarkan nilai diskriminannya
- Menentukan persamaan fungsi kuadrat jika diketahui grafik atau unsur-unsur lainnya
- Menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan fungsi kuadrat

b. Uraian Materi

1). Kedudukan Grafik fungsi kuadrat

Kedudukan grafik fungsi kuadrat yang dilihat dari banyaknya titik potong dengan sumbu x, ditentukan oleh nilai diskriminan yaitu $D = b^2 - 4ac$. Sedangkan grafik membuka ke atas atau ke bawah ditentukan oleh tanda a (koefisien x^2). Berikut beberapa kemungkinan kedudukan grafik dilihat dari harga diskriminan dan tanda a (koefisien x^2):



Gambar II.d : Kedudukan fungsi kuadrat berdasarkan nilai D dan tanda a

Keterangan:

a) Pada (a) dan (e) untuk $D > 0$ grafik memotong sumbu x di dua titik, jika $a > 0$ grafik membuka ke atas sebaliknya membuka ke bawah untuk $a < 0$.

b) Pada (b) dan (f) untuk D = 0 grafik memotong di satu titik atau *menyinggung* sumbu x.

c) Pada (c) dan (g) grafik tidak memotong sumbu x
   i). Untuk a > 0 dan D < 0 seluruh grafik berada di atas sumbu x artinya seluruh peta atau nilai fungsi bernilai positif untuk seluruh harga x dan ini biasa disebut dengan *definit positif*.

   ii). Untuk a < 0 dan D < 0 seluruh grafik berada di bawah sumbu x artinya seluruh peta atau nilai fungsi bernilai negatif untuk seluruh harga x dan ini biasa disebut dengan *definit negatif*.

Contoh 47
Tanpa menggambar sebutkan sifat-sifat fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 3x - 4$

Jawab:
$f(x) = x^2 - 3x - 4$
$y = x^2 - 3x - 4$, diperoleh a = 1, b = -3 dan c = - 4

- a = 1 berarti a > 0 (a positif), maka grafik membuka ke atas
- $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(-4) = 9 + 16 = 25$

Karena D > 0 (D positif), maka grafik memotong sumbu x di dua titik yang berbeda. Jadi, grafik fungsi f berupa parabola yang terbuka ke atas dan memotong sumbu x di dua titik yang berbeda (a > 0 dan D > 0).

Contoh 48
Tentukan nilai k supaya grafik fungsi kuadrat berikut menyinggung sumbu x !
a. $f(x) = (1 + k^2)\, x^2 + 10kx + 16$ b. $g(x) = mx^2 + (m + 1)x + 1$

Jawab:
a. Dari rumus fungsi $a = 1 + k^2$, $b = 10k$ dan $c = 16$
   Grafik menyinggung sumbu x, jika D = 0

$$D = 0$$
$$b^2 - 4ac = 0$$
$$(10k)^2 - 4(1+k^2)16 = 0$$
$$100\,k^2 - 64 - 64\,k^2 = 0$$
$$36\,k^2 - 64 = 0$$
$$(6k - 8)(6k + 8) = 0$$

$6k - 8 = 0$ atau $6k + 8 = 0$

$6k = 8$ $\qquad$ $6k = -8$

$k = \frac{8}{6}$ $\qquad$ $k = -\frac{8}{6}$

$k = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $k = -\frac{4}{3}$

b. Agar $g(x) = mx^2 + (m + 1)x + 1$ grafiknya menyinggung sumbu x, D = 0
   $D = b^2 - 4ac$

$0 = (m+1)^2 - 4.m.1$

$0 = m^2 - 2m + 1$

$0 = (m - 1)^2$

$m = 1$

Jadi agar $g(x) = mx^2 + (m + 1)x + 1$ menyinggung sumbu x, nilai m = 1

2). Menentukan Persamaan Grafik Fungsi Kuadrat

Persamaan grafik fungsi kuadrat dapat dicari jika kondisi-kondisi dibawah ini diketahui:

a) Grafik memotong sumbu x di $(x_1,0)$ dan $(x_2,0)$ serta melalui titik sembarang (x_3,y_3) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

b) Grafik mempunyai titik balik $P(x_p,y_p)$ serta melalui titik sembarang (x_1,y_1) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_p)^2 + y_p$.

c) Grafik melalui tiga buah titik yaitu (x_1,y_1), (x_2,y_2) dan (x_3,y_3), maka persamaannya adalah $y = ax^2 + bx + c$.

Contoh 49

Tentukan persamaan grafik fungsi yang mempunyai titik balik di titik (1,-1) serta melalui (2, 3).

Jawab:

Kondisi yang di ketahui adalah titik balik P(1,-1) serta melalui titik (2,3) dan dari kondisi tersebut kita dapat $x_p = 1$ dan $y_p = -1$ sehingga persamaannya adalah

$y = a(x - 1)^2 + (-1)$ grafik melalui (2, 3) didapat

$3 = a(2 - 1)^2 + (-1)$

$3 = a - 1$

$a = 4$

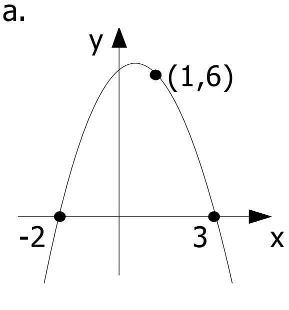
Sehingga $y = 4(x - 1)^2 + (-1)$

$y = 4(x^2 - 2x + 1) - 1 = 4x^2 - 8x + 3$

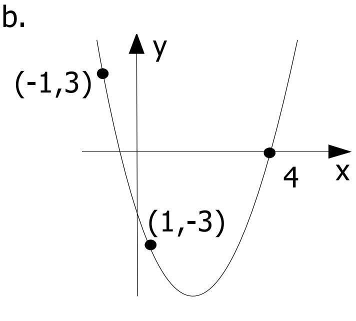
Contoh 50

Tentukan persamaan grafik dari fungsi grafik seperti pada gambar di bawah ini!

a.



b.



Jawab:

a. Grafik memotong sumbu x di titik (-2, 0) dan (3, 0)
Sehingga $y = a(x + 2)(x - 3)$ melalui titik (1, 6)
$6 = a(1 + 2)(1 - 3)$
$6 = a(3)(-2)$
$6 = -6a$
$a = -1$

Substitusikan kembali $a = -1$ ke $y = a(x + 2)(x - 3)$ didapat

$$y = -1(x + 2)(x - 3) = -1(x^2 - 3x + 2x - 6) = -x^2 + x + 6$$

Jadi persamaan grafik fungsi adalah $y = -x^2 + x + 6$.

b. Grafik melalui tiga buah titik, yaitu (-1,3), (1,-3) dan (4,0). Gunakan persamaan bentuk $y = ax^2 + bx + c$

$(-1,3) \Rightarrow 3 = a(-1)^2 + b(-1) + c$
$3 = a - b + c$ . . . 1)

$(1,-3) \Rightarrow -3 = a(1)^2 + b(1) + c$
$-3 = a + b + c$ . . . 2)

$(4,0) \Rightarrow 0 = a(4)^2 + b(4) + c$
$0 = 16a + 4b + c$ . . . 3)

Eliminasi persamaan 1) dan 2) didapat

$$\begin{array}{l} a - b + c = 3 \\ \underline{a + b + c = -3} \; - \\ \quad -2b = 6 \\ \quad\quad b = -3 \end{array}$$

Eliminasi persamaan 1) dan 3) didapat

$$\begin{array}{l} 16a + 4b + c = 0 \\ \underline{a \;\; - b \;\; + c \;\; = 3} \; - \\ 15a + 5b = -3 \end{array}$$

substitusi $b = -3$ didapat

$15a + 5b = -4$
$15a + 5(-3) = -3$
$15a - 15 = -3$
$15a = 12$

$$a = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Substitusi $a = \frac{4}{5}$ dan $b = -3$ ke persamaan 1) didapat $a - b + c = 3$

$3 = a - b + c$

$3 = \frac{4}{5} - (-3) + c$

$c = -\frac{4}{5}$

Substitusi $a = \frac{4}{5}$, $b = -3$ dan $c = -\frac{4}{5}$ ke persamaan $y = ax^2 + bx + c$, sehingga persamaan yang dicari adalah $y = \frac{4}{5}x^2 - 3x - \frac{4}{5}$

c. Rangkuman

1. Kedudukan grafik fungsi kuadrat ditinjau dari nilai diskriminan (D) dan a adalah sebagai berikut:
   a. Jika $D > 0$ maka grafik memotong sumbu x di dua titik
   b. Jika $D = 0$ maka grafik menyinggung sumbu x
   c. Jika $D < 0$ maka grafik tidak memotong sumbu x
   d. Jika $a > 0$ maka grafik terbuka ke atas dan diperoleh titik puncak minimum
   e. Jika $a < 0$ maka grafik terbuka ke bawah dan diperoleh titik puncak maksimum

2. Persamaan grafik fungsi kuadrat dapat dicari jika kondisi-kondisi di bawah ini diketahui:

   a. Grafik memotong sumbu x di $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$ serta melalui titik sembarang (x_3, y_3) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

   b. Grafik mempunyai titik balik $P(x_p, y_p)$ serta melalui titik sembarang (x_1, y_1) pada grafik, maka persamaannya adalah $y = a(x - x_p)^2 + y_p$.

   c. Grafik melalui tiga buah titik yaitu (x_1, y_1), (x_2, y_2) dan (x_3, y_3), maka persamaannya adalah $y = ax^2 + bx + c$.

LATIHAN 4

1. Tentukanlah sifat-sifat grafik fungsi kuadrat berikut berdasarkan nilai a dan diskriminannya:

a. $y = x^2 - 12x + 20$	f. $y = 2x^2 - x + 1$
b. $y = -x^2 - 4x - 10$	g. $y = 6x^2 + 9x$
c. $y = x^2 - 12x + 36$	h. $y = 6x^2 - 17x + 5$
d. $y = (x - 4)^2$	i. $y = -x^2 - x + 10$
e. $y = -x^2 - 2x + 35$	j. $y = -x^2 - 4x + 5$

2. Tentukanlah batas-batas nilai m supaya grafik fungsi menyinggung sumbu x

a. $f(x) = x^2 - 2mx + (3m + 4)$	c. $f(x) = (m - 1)x^2 - 2mx + (m - 2)$
b. $g(x) = mx^2 + 6x + 9$	d. $h(x) = mx^2 + (m + 1)x + 1$

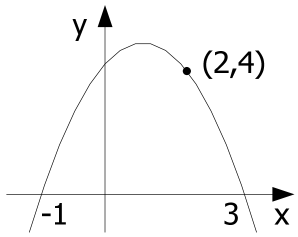
3. Tentukan persamaan grafik fungsi berikut:
   a. Grafik memotong sumbu x di titik (-1, 0) dan (1, 0) serta melalui titik (2,1).
   b. Titik potong dengan sumbu x adalah (-3, 0) dan (1, 0) serta melalui titik (0, 9)
   c. Titik puncak (3, 1) dan melalui titik (0, 8)
   d. Grafik mempunyai titik puncak P(2, 1) serta melalui titik (0, 4).
   e. Grafik melalui titik (1, 0), (-1, -2) dan titik (3, 1).
   f. Grafik melalui (-2, -3), (2, 5), dan (3,12)

4. Tentukan fungsi kuadrat jika grafiknya mempunyai titik balik P(3,-1) serta f(1) = 7.

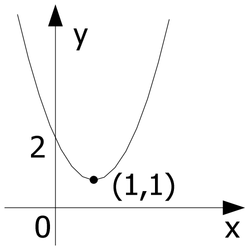
5. Tentukan fungsi kuadrat yang mempunyai nilai-nilai nol (pembuat nol) 2 dan 5, sedangkan nilai maksimumnya adalah 9!

6. Tentukan persamaan grafik fungsi dari gambar berikut:

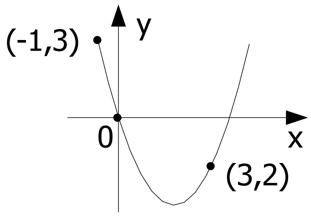
a.



b.



c.



7. Koordinat titik puncak grafik fungsi $y = ax^2 + bx + 5$ ialah (4,9), tentukan nilai a dan b!

Uji Kemampuan

A. Pilihan Ganda

1. Untuk fungsi $f:x \to 3x^2 - 4x$ maka bayangan dari -6 adalah . . . .
   a. 112 c. 126 e. 142
   b. 122 d. 132

2. Pembuat nol fungsi dari fungsi kuadrat $f(x) = 16 - x^2$ adalah . . . .
   a. 8 dan -8 c. 0 dan 16 e. 4 dan 8
   b. 4 dan -4 d. 0 dan -16

3. Persamaan sumbu simetri dari $f(x) = 6 - 5x - x^2$ adalah . . . .
   a. $x = -2$ c. $x = -2\frac{1}{2}$ e. $x = 5$
   b. $x = 2$ d. $x = 3$

4. Diketahui $f(x) = x^2 + 4x - 5$, maka nilai minimumnya adalah . . . .
   a. -17 c. -5 e. 4
   b. -9 d. -2

5. Diketahui fungsi kuadrat melalui titik (0, -6), (3, 0) dan (-2, 0) maka persamaan kuadrat nya adalah . . . .
   a. $f(x) = x^2 - x - 6$ c. $f(x) = 3x^2 + 3x - 6$ e. $f(x) = 2x^2 + 3x - 6$
   b. $f(x) = x^2 + x + 6$ d. $f(x) = x^2 - 2x + 12$

6. Harga kesetimbangan pasar dari fungsi permintaan $q = 15 - p$ dan fungsi penawaran $q = 2p - 6$, jika p menyatakan harga dan q menyatakan jumlah adalah . . . .
   a. 3 c. 7 e. 9
   b. 6 d. 8

7. Diketahui $F(x) = ax + 6$, $f(-2) = 10$ maka $f(5) =$ . . . .
   a. -4 c. 4 e. 6
   b. -2 d. 2

8. Jika $f(x) = ax + b$, $f(1) = -1$, $f(3) = 5$, maka . . . .
   a. $f(x) = 3x - 4$
   b. $f(x) = 3x + 4$
   c. $f(x) = -3x + 4$
   d. $f(x) = -3x - 4$
   e. $f(x) = 2x - 4$

9. Diketahui $f(x) = ax + 2b$, $f(1) = -1$ dan $f(2) = -10$. Nilai $f(6) =$ . . . .
   a. -22
   b. -14
   c. 12
   d. 14
   e. 22

10. Himpunan pasangan berurutan berikut ini yang merupakan fungsi adalah
   a $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$
   b $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4)\}$
   c $\{(1, 1), (2,1), (3,1), (4, 1)\}$
   d $\{(2, 3), (3, 2), (4, 3), (4, 4)\}$
   e $\{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e)\}$

11. Gradien dari garis yang melalui (-3, 6) dan (4, -5) adalah . . . .
   a. -3
   b. $-\frac{11}{7}$
   c. -1
   d. $-\frac{3}{7}$
   e. 3

12. Persamaan garis yang bergradien –3 dan melalui titik pangkal adalah . . . .
   a. $y = -3x$
   b. $y - 3x = 0$
   c. $3y = x$
   d. $3y + x = 0$
   e. $y = -\frac{1}{3}x$

13. Persamaan garis yang melalui (3, 7) dan (5, 11) adalah . . . .
   a. $y + 2x + 1 = 0$
   b. $y = -2x - 1$
   c. $y = 2x + 1$
   d. $y = 2x - 1$
   e. $2y - x - 1 = 0$

14. Persamaan garis yang melalui (2, -3) dan tegak lurus garis $y = 2x + 1$ adalah . . .
   a. $y = \frac{1}{2}x + 2$
   b. $y = -\frac{1}{2}x + 2$
   c. $y = -2x - 2$
   d. $y = -x - 2$
   e. $y = -\frac{1}{2}x - 2$

15. Koordinat titik potong dari garis $y = 2x - 2$ dan garis $y = 3x - 5$ adalah . . . .
   a. (-3, 4)
   b. (-3, 4)
   c. (3, 4)
   d. (4, 3)
   e. (-4, -3)

16. Persamaan garis yang melalui titik (2, 5) dan sejajar dengan garis $y = 2x - 1$ adalah. . . . .
   a. $y = -2x + 1$
   b. $y = x + 1$
   c. $y = 2x - 1$
   d. $y = 2x + 1$
   e. $y = -2x - 1$

17. Persamaan garis lurus yang melalui (2, 4) dan tegak lurus $2x - y + 3 = 0 =$ . . . .
   a. $y = -\frac{1}{2}x + 5$
   b. $y = \frac{1}{2}x - 5$
   c. $y = -\frac{1}{2}x - 5$
   d. $y = -2x + 5$
   e. $y = -2x - 5$

18. Diketahui persamaan garis $y = x + 2$. Titik potong pada sumbu y adalah . . . .
    a. (0, -2) c. (-2, 0) e. (0, 2)
    b. (-2, 2) d. (2, 0)

19. Persamaan garis yang melalui titik (0, 0) dengan gradien 2 adalah . . . .
    a. $y = -2x$ c. $y = \frac{1}{2}x$ e. $y = 2x$
    b. $y = 4x$ d. $y = 2x + 2$

20. Diketahui garis $y = 2x - 5$ dan $3y - 9x + 6 = 0$, maka titik potong kedua garis tersebut adalah . . . .
    a. (3, 11) c. (-3, -11) e. (-3, 11)
    b. (-11, -3) d. (3, -11)

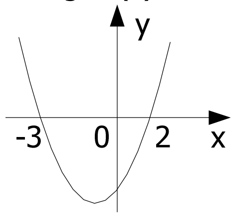
21. Nilai maksimum dari fungsi kuadrat $f(x) = -x^2 + 2x + 15$ adalah . . . .
    a. -32 c. 1 e. 32
    b. -16 d. 16

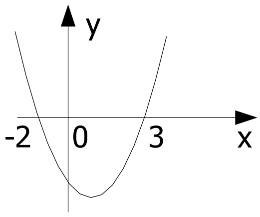
22. Nilai a supaya grafik fungsi $y = (a - 1)\,x^2 - 2ax + (a - 3)$ menyinggung sumbu x adalah . . . .
    a. -0,75 c. 0,50 e. 1,00
    b. 0,25 d. 0,75

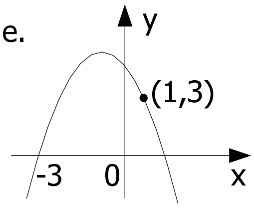
23. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas. Hubungan tinggi peluru (h) dalam meter dengan waktu dalam detik dinyatakan dengan $h(t) = 300t - 5t^2$. Waktu untuk mencapai tinggi maksimum adalah . . . .
    a. 20 detik c. 30 detik e. 45 detik
    b. 25 detik d. 40 detik

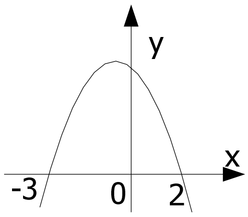
24. Koordinat titik balik grafik $y = x^2 - 6x + 8$ adalah . . . .
    a. (3,-1) c. (4,2) e. (-6,8)
    b. (-3,-1) d. (6,8)

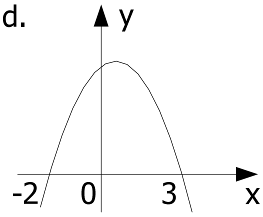
25. Grafik fungsi $f(x) = 6 - x - x^2$ adalah . . . .

a.


c.


e.


b.


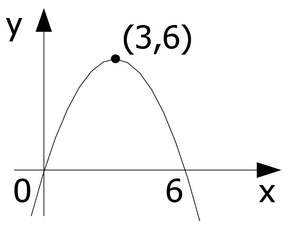
d.


26. Reaksi obat tidur setelah disuntikkan pada tubuh dapat dinyatakan dengan persamaan $F(t) = 6t - t^{2,}$ dimana t adalah waktu perjam. Waktu yang diperlukan untuk mencapai reaksi maksimum . . . .
    a. 5 jam c. 8 jam e. 10 jam
    b. 6 jam d. 9 jam

27. Grafik $y = 2x^2 - x - 6$ memotong sumbu x di . . . .
    a. $(-\frac{3}{2},0)$ dan (2,0) c. $(-\frac{3}{2},0)$ dan (-2,0) e. $(\frac{1}{3},0)$ dan (-3,0)
    b. (3,0) dan (-2,0) d. (3,0) dan (-2,0)

28. Sebidang tanah persegi panjang akan dipagari kawat untuk beternak ayam. Kawat yang tersedia panjangnya 400 meter. Luas tanah maksimum sehingga kawat dapat memagari tanah tersebut adalah . . . .
    a. 2.000 m^2 c. 18.000 m^2 e. 200.000 m^2
    b. 15.000 m^2 d. 20.000 m^2

29. Persamaan grafik fungsi disamping adalah…
    a. $y = 4x - \frac{2}{3}x^2$
    b. $y = -\frac{2}{3}x^2 - 4x$
    c. $y = x^2 - 6x - 9$
    d. $y = x^2 - 6x + 9$
    e. $y = -x^2 + 6x + 9$



30. Harga kesetimbangan pasar dari fungsi permintaan P=45–3Q dan fungsi penawaran P = 6Q + 9, jika P menyatakan harga dan Q menyatakan jumlah adalah . . .
    a. 4 d. 32 e. 35
    b. 12 e. 33

31. Grafik fungsi $f(x) = x^2 + 4x - 30$ simetris terhadap garis x = a . Nilai a =. . . .
    a. -4 c. -1 e. 4
    b. -2 d. 2

32. Akar-akar $2x^2 + ax + a = 6$ adalah p dan q. Nilai minimum dari $p^2 + q^2$ = ...
    a. 2,0 c. 3,0 e. 5,0
    b. 2,5 d. 4,5

33. Suatu fungsi kuadrat yang berbentuk $y = (x - a)^2 + b$ mempunyai nilai minimum 5 untuk x = 2, nilai a + b = ...
    a. 3 c. 7 e. 12
    b. 4 d. 8

34. Diketahui $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ dengan daerah asal $\{x|-2 \le x \le 3, x \in R\}$. Range fungsi adalah . . . .
    a. $\{y|-3 \le y \le 5, y \in R\}$ c. $\{y|-13 \le y \le -3, y \in R\}$ e. $\{y|-13 \le y \le 5, y \in R\}$.

b. $\{y|-3 \le y \le 3, y \in R\}$ d. $\{x|-13 \le x \le 3, x \in R\}$.

35. Akar-akar persamaan $x^2 + (a + 2)x + a + 3 = 0$ adalah p dan q. Nilai minimum dari $p^2 + q^2 - pq$ tercapai untuk a = ...
 a. -1,0 c. 0,5 e. 5
 b. -0,5 d. 1,0

36. Absis titik balik grafik fungsi $y = px^2 + (p - 3)x + 3$ adalah p. Nilai p = ...
 a. -3,5 c. -1,0 e. 1,5
 b. -2,5 d. 1,0

37. Diketahui fungsi permintaan sebuah barang adalah $p = 38 - 0{,}03x$ dan fungsi biaya total $TC = 500 + 8x - 0{,}06x^2$. Biaya tercatat dalam ribuan rupiah. Jika x menyatakan jumlah barang dan p menyatakan harga maka besar keuntungan yang diperoleh dari hasil penjualan 100 unit barang adalah. . . .
 a. Rp2.800.000,00 c. Rp2.950.000,00 e. Rp3.100.000,00
 b. Rp2.900.000,00 d. Rp3.050.000,00

38. Fungsi kuadrat mempunyai nilai maksimum 3 untuk x = 1 dan grafiknya melalui titik (3, 1). Grafik fungsi memotong sumbu y di titik . . . .
 a. (0, 3,5) c. (0, 2,5) e. (0, 1,5)
 b. (0, 3) d. (0, 2)

39. Perusahaan sepatu “CARDIL” memproduksi sepatu wanita dengan harga jual Rp100.000,00 perpasang. Untuk itu perusahaan tersebut mengeluarkan biaya variabel Rp5.000,00 per pasang dan biaya tetap sebesar Rp10.000.000,00. Jika jumlah sepatu yang terjual sebanyak 300 pasang maka besar keuntungan yang diterima adalah . . . .
 a. Rp2.500.000,00 c. Rp5.000.000,00 e. Rp10.000.000,00
 d. Rp3.000.000,00 d. Rp7.500.000,00

40. Koordinat titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 2x - 3$ adalah . . . .
 a. (1, 4) c. (4, 1) e. (-1, -4)
 b. (-1, 4) d. (1, -4)

B. Essay

1. Tentukanlah persamaan garis lurus yang diketahui sebagai berikut :
 a. bergradien -5 dan melalui (2,-8)
 b. Melalui dua titik (2, -4) dan (5, 5)
 c. sejajar garis $y - 3x = 0$ dan melalui titik pangkal
 d. tegak lurus garis $3y + x = 6$ dan melalui (5,-4)
 e. Memotong sumbu x pada (4,0) dan sumbu y pada (0, -6)

2. Tentukanlah koordinat titik puncak dari fungsi kuadrat di bawah ini:
 a. $f(x) = x^2 - 4x - 1$
 b. $y = -2x^2 - 8x + 7$
 c. f x) = $3x^2 + 3x$

3. Diketahui $(m - 3) x^2 + (2m - 3)x + m = 0$. Tentukan nilai m !
   a. Agar mempuanyai dua akar real berlainan
   b. Tidak mempunyai akar real

4. Diketahui $f(x) = -2x^2 - 5x + 7$ dengan domain $\{x|-5 \leq x \leq 5, x \in R\}$. Tentukanlah !
   a. Koordinat titik potong dengan sumbu x
   b. Koordinat titik potong dengan sumbu y
   c. Persamaan sumbu simetri
   d. Koordinat titik puncak
   e. Range
   f. Sketsa grafiknya

5. Tentukan fungsi kuadrat yang grafiknya:
   a. Melalui titik A(0, 3), B(2, -5), C(-1, 3)
   b. Mempunyai titik puncak (1, 4) dan memotong sumbu y di titik (0, 6)
   c. Memotong sumbu x di (2, 0) dan -5, 0) dan melalui titik (0, -20)

6. Tentukan nilai m agar $f(x) = mx^2 - (m + 2)x + m$ menyinggung sumbu x dan membuka ke atas!

7. Segitiga siku-siku yang mana mempunyai luas terbesar jika jumlah sisi siku-sikunya sama dengan 25 cm ? Tentukan luas maksimumnya

8. Akar-akar persamaan kaudrat $x^2 - 8x + m^2 - 2m +1 = 0$ adalah x_1 dan x_2. Tentukan nilai m supaya $x_1\ x_2$ maksimum !

9. Grafik fungsi $f(x) = (p+3) x^2 - 2(p - 1) x + 2p - 5$ mempunyai titik puncak yang absisnya sama dengan p. Tentukan p dan lukiskan grafiknya !

10. Tentukanlah nilai supaya $y = mx^2 + (m - 5) x + 8$ menyinggung garis $y + 1 = 2x$.

11. Diketahui $f(x) = ax + b$. dengan $f(- 4) = - 13$ dan $f(2) = 5$ Tentukan :
    a. Nilai a dan b kemudian tuliskan persamaannya
    b. Nilai dari f(-6)
    c. Nilai m jika f(m) = 14

Nasihat yang terbaik diberikan oleh pengalaman.
Tapi nasihat ini datangnya selalu terlambat

Sumber: Art & Gallery

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
6. Menerapkan konsep barisan dan deret dalam pemecahan masalah	**6.1 Mengidentifikasi pola, barisan, dan deret bilangan** **6.2 Menerapkan konsep barisan dan deret aritmatika** **6.3 Menerapkan konsep barisan dan deret geometri**

A. PENDAHULUAN

Standar Kompetensi **Barisan dan Deret** terdiri dari tiga (3) Kompetensi Dasar. Pada penyajian dalam buku ini, setiap Kompetensi Dasar memuat Tujuan, Uraian materi, Rangkuman dan Latihan. Kompetensi Dasar dalam Standar Kompetensi ini meliputi **Pola Barisan dan Deret Bilangan; Konsep Barisan dan Deret Aritmatika** dan **Konsep Barisan dan Deret Geometri**. Standar Kompetensi ini digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan tertentu yang berhubungan dengan pola bilangan, juga dapat digunakan dalam matematika keuangan dalam rangka menunjang program keahliannya. Sebelum mempelajari standar kompetensi ini, diharapkan anda telah menguasai standar kompetensi sistem bilangan real

Pada setiap akhir Kompetensi dasar tercantum soal-soal latihan yang disusun dari soal-soal yang mudah sampai soal-soal yang sukar. Latihan soal ini digunakan untuk mengukur kemampuan anda terhadap kompetensi dasar ini, artinya setelah mempelajari kompetensi dasar ini secara mandiri dengan bimbingan guru sebagai fasilitator, ukur sendiri kemampuan anda dengan mengerjakan soal-soal latihan tersebut.

Untuk melancarkan kemampuan anda supaya lebih baik dalam mengerjakan soal, disarankan semua soal dalam latihan ini dikerjakan baik di sekolah dengan bimbingan guru maupun di rumah.

Untuk mengukur standar kompetensi lulusan tiap siswa, di setiap akhir kompetensi dasar, guru akan memberikan evaluasi apakah anda layak atau belum layak mempelajari standar Kompetensi berikutnya. Anda dinyatakan layak jika anda dapat mengerjakan soal 60% atau lebih soal-soal evaluasi yang akan diberikan guru.

B. KOMPETENSI DASAR

B.1. Pola Barisan dan Deret Bilangan

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menunjukkan pola bilangan dari suatu barisan dan deret
- Membedakan pola bilangan, barisan, dan deret
- Menuliskan suatu deret dengan Notasi Sigma

b. Uraian Materi

Pernahkah dibayangkan bagaimana menjumlahkan semua bilangan asli dari 1 sampai 100, bagaimana menghitung jumlah simpanan di bank, bagaimana menghitung perkiraan jumlah penduduk suatu negara beberapa tahun ke depan dan lain-lain, itu semua dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep barisan dan deret bilangan. Dari contoh di atas, ternyata barisan bilangan merupakan suatu yang menarik untuk diketahui. Oleh karena itu, matematika secara khusus memasukkan masalah barisan bilangan dalam bidang aljabar sejak dari tingkat SLTP sampai tingkat SLTA.

Barisan bilangan yang pernah dipelajari di tingkat SLTP diantaranya adalah pengertian suku dan pola bilangan, menentukan suku ke-n dari suatu barisan, serta menyelesaikan soal verbal yang berkaitan pola atau barisan bilangan. Pengertian pola atau barisan bilangan yang telah dipelajari di tingkat SLTP sangat membantu untuk memahami pengertian barisan dan deret aritmatika, barisan dan deret geometri, notasi sigma maupun induksi matematika yang akan dipelajari dalam bab ini.

1). Pola barisan

Definisi barisan dan deret bilangan pernah dipelajari di tingkat SLTP, namun untuk mengingat kembali akan dibahas sedikit tentang definisi barisan dan deret bilangan.

Barisan bilangan adalah urutan bilangan yang memiliki aturan atau pola tertentu. Elemen-elemen dari suatu barisan bilangan sering disebut dengan istilah *suku*.

Elemen pertama disebut suku pertama (U_1), elemen ke-2 disebut suku ke-2 (U_2), elemen ke-3 disebut suku ke-3 (U_3) dan seterusnya sampai pada elemen ke-n disebut suku ke-n (U_n)

Aturan atau pola dari suatu barisan dapat dinyatakan dalam bentuk definisi atau dapat juga dinyatakan dalam bentuk rumusan.

Contoh 1
Tentukan pola atau aturan dari barisan di bawah ini:
a. 1, 3, 5, 7, . . .
b. 1, 4, 9, 16, 25, . . .
c. 8, 27, 64, 125, 216, . . .

Jawab:
a. Aturan atau pola dari barisan bilangan: 1, 3, 5, 7, . . . secara definisi adalah bilangan ganjil mulai dari 1 atau bilangan naik yang memiliki selisih 2 yang dimulai dari 1. Sedangkan secara rumus polanya adalah U_n = 2n – 1 dengan n dimulai dari 1. (untuk seterusnya kata-kata " *n dimulai dari 1* " tidak perlu dituliskan)

b. Pola dari barisan bilangan: 1, 4, 9, 16, 25, . . . secara definisi adalah kuadrat bilangan asli mulai dari 1. Sedangkan secara rumus polanya adalah $U_n = n^2$.

c. Pola dari barisan bilangan: 8, 27, 64, 125, 216. . . secara definisi adalah pangkat tiga dari bilangan asli mulai dari 2. Sedangkan secara rumus polanya: $U_n = (n + 1)^3$

Contoh 2
Tentukan pola suku ke-n dari barisan di bawah ini:
a. 3, 7, 11, 15, 19, . . .
b. 50, 47, 44, 41, 38, . . .
c. 2, 4, 8, 16, 32, . . .

Jawab:
a. 3, 7, 11, 15, 19, . . . ; selisih dua suku yang berurutan adalah 4 dan suku pertamanya 3 , jadi polanya U_n = 4n – 1 (angka -1 diperoleh dari 3 – 4, akan dibahas lebih lanjut pada barisan aritmatika)
b. 50, 47, 44, 41, 38, . . . ; selisih dua suku yang berurutan adalah -3 dan suku pertamanya 50, jadi polanya Un = -3n + 53 (angka 53 diperoleh dari 50 – (-3))

c. 2, 4, 8, 16, 32, . . . ; rasio dua suku yang berurutan adalah 2, jadi polanya $U_n = 2^n$ (akan dibahas lebih lanjut pada barisan geometri)

Contoh 3

Tentukan empat suku pertamanya dan suku ke-25 jika suatu barisan memiliki pola suku ke-n:

a. $U_n = 3n - 7$
b. $U_n = 2n^2 + 3n$
c. $U_n = \dfrac{n^2 + n}{2n + 1}$
d. $U_n = 2.3^{(n-1)}$

Jawab:

a. $U_n = 3n - 7$
   $U_1 = 3.1 - 7 = -4$, $U_2 = 3.2 - 7 = -1$, $U_3 = 3.3 - 7 = 2$ dan $U_4 = 3.4 - 7 = 5$
   Jadi 4 suku pertamanya: -4, -1, 2, 5, . . .
   Suku ke-25: $U_{25} = 3.25 - 7 = 68$

b. $U_n = 2n^2 + 3n$
   $U_1 = 2.1^2 + 3.1 = 5$, $U_2 = 2.2^2 + 3.2 = 14$, $U_3 = 2.3^2 + 3.3 = 27$ dan $U_4 = 2.4^2 + 3.4 = 44$. Jadi 4 suku pertamanya: 5, 14, 27, 44, . . .
   Suku ke-25: $U_{25} = 2.\ 25^2 + 3.\ 25 = 1250 + 75 = 1.325$

c. $U_n = \dfrac{n^2 + n}{2n + 1}$
   $U_1 = \dfrac{1^2 + 1}{2.1 + 1} = \dfrac{2}{3}$, $U_2 = \dfrac{2^2 + 2}{2.2 + 1} = \dfrac{6}{5}$, $U_3 = \dfrac{3^2 + 3}{2.3 + 1} = \dfrac{12}{7}$ dan $U_4 = \dfrac{4^2 + 4}{2.4 + 1} = \dfrac{20}{9}$
   Jadi 4 suku pertamanya: $\dfrac{2}{3}, \dfrac{6}{5}, \dfrac{12}{7}, \dfrac{20}{9}, \ldots$
   Suku ke-25: $U_{25} = \dfrac{25^2 + 25}{2.25 + 1} = \dfrac{650}{51}$

d. $U_n = 2.3^{(n-1)}$
   $U_1 = 2.3^{(1-1)} = 2$, $U_2 = 2.3^{(2-1)} = 6$, $U_3 = 2.3^{(3-1)} = 18$ dan $U_4 = 2.3^{(4-1)} = 54$.
   Jadi 4 suku pertamanya: 2, 6, 18, 54,. . .
   Suku ke-25: $U_{25} = 2.\ 3^{(25-1)} = 2.\ 3^{24}$

Ada beberapa barisan yang memiliki nama. Nama barisan itu biasanya dicirikan oleh bilangan-bilangan penyusunnya. Sebagai contoh:

a. 1, 2, 3, 4, 5, . . . ; dinamakan barisan bilangan asli
b. 1, 3, 5, 7, 9, . . . ; dinamakan barisan bilangan ganjil
c. 2, 4, 6, 8, 10, . . . ; dinamakan barisan bilangan genap
d. 1, 3, 6, 10, 15, . . ; dinamakan barisan bilangan segitiga karena memiliki pola $\dfrac{n(n+1)}{2}$, pola tersebut seperti menentukan luas segitiga = $\dfrac{a.t}{2}$

e. 1, 4, 9, 16, 25, . . . ; dinamakan barisan bilangan persegi karena memiliki pola n^2, pola tersebut seperti menentukan luas persegi = s^2.

f. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .; dinamakan barisan bilangan *Fibonacci*, dengan pola *bilangan berikutnya merupakan jumlah dari dua bilangan sebelumnya*. Nama barisan bilangan ini diberikan atas jasa *Leonardo Fibonacci* yang telah mengungkapkan misteri barisan tersebut, dan lain-lain.

2). Deret bilangan

Jika suku-suku suatu barisan dijumlahkan maka akan terbentuk sebuah ***deret*** . Misalkan:
Barisan bilangan asli: 1, 2, 3, 4, . . . deret bilangan asli: 1 + 2 + 3 + 4 + . . .
Barisan bilangan ganjil: 1, 3, 5, 7, . . . deret bilangan ganjil: 1 + 3 + 5 + . . .

Untuk menyatakan jumlah dari suatu deret biasanya dilambangkan dengan huruf S, misalkan:
Jumlah satu suku *(dari)* yang pertama dilambangkan dengan S_1
Jumlah dua suku yang pertama dilambangkan dengan S_2.
Jumlah tiga suku yang pertama dilambangkan dengan S_3,
Jumlah n suku yang pertama dilambangkan dengan S_n

Contoh 4
Dari deret: 1 + 5 + 9 + 13 + 17 + 21 + . . . Tentukan:
a. Jumlah 1 suku yang pertama, jumlah 2 suku yang pertama dan suku ke-2
b. Jumlah 2 suku yang pertama, jumlah 3 suku yang pertama dan suku ke-3
c. Jumlah 3 suku yang pertama, jumlah 4 suku yang pertama dan suku ke-4

Jawab:
Jumlah 1 suku yang pertama: $S_1 = 1$, Jumlah 2 suku yang pertama: $S_2 = 1 + 5 = 6$, suku ke-2: $U_2 = 5$ diperoleh hubungan $\mathbf{U_2 = S_2 - S_1}$

Jumlah 2 suku yang pertama: $S_2 = 1 + 5 = 6$, Jumlah 3 suku yang pertama: $S_3 = 1 + 5 + 9 = 15$, suku ke-3: $U_3 = 9$ diperoleh hubungan $\mathbf{U_3 = S_3 - S_2}$

Jumlah 3 suku yang pertama: $S_3 = 1 + 5 + 9 =15$, Jumlah 4 suku yang pertama: $S_4 = 1 + 5+ 9 +13 = 28$, suku ke-4: $U_4 = 13$ diperoleh hubungan $\mathbf{U_4 = S_4 - S_3}$

Dari jawaban contoh 4, dapat diambil kesimpulan bahwa: suku ke-n = selisih antara Jumlah n suku yang pertama dengan jumlah (n – 1) suku yang pertama

$$\boxed{\mathbf{U_n = S_n - S_{(n-1)}}} \quad \text{dengan syarat } n > 1$$

Contoh 5
Suatu deret bilangan memiliki jumlah n suku yang pertama dinyatakan dengan rumus: $S_n = 3n^2 + 4n + 7$. Tentukan:
a. Jumlah 5 suku yang pertama
b. Rumus suku ke-n
c. Suku ke-10

Jawab:

a. Dari $S_n = 3n^2 + 4n + 7$, Jumlah 5 suku yang pertama: $S_5 = 3.5^2 + 4.5 + 7 = 102$

b. Untuk menentukan rumus suku ke-n jika diketahui S_n digunakan hubungan antara U_n dan S_n, yaitu:

$U_n = S_n - S_{(n-1)}$
$U_n = \{3n^2 + 4n + 7\} - \{3(n-1)^2 + 4(n-1) + 7\}$
$U_n = \{3n^2 + 4n + 7\} - \{3n^2 - 6n + 3 + 4n - 4 + 7\}$
$U_n = \{3n^2 + 4n + 7\} - \{3n^2 - 2n + 6\}$
$U_n = 3n^2 - 3n^2 + 4n + 2n + 1$
$U_n = 6n + 1$ dengan syarat $n > 1$, untuk menentukan U_1, digunakan $U_1 = S_1$

c. Untuk menentukan U_{10} dapat digunakan dua cara, yaitu:
- Dari rumus U_n yang diperoleh dari jawaban b, jadi $U_{10} = 6.\ 10 + 1 = 61$
- Dari hubungan antara U_n dan S_n, yaitu:

$U_n = S_n - S_{(n-1)}$
$U_{10} = S_{10} - S_9$
$U_{10} = (3.\ 10^2 + 4.\ 10) - (3.\ 9^2 + 4.\ 9)$
$U_{10} = 340 - 279 = 61$

3). Notasi Sigma

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak menggunakan simbol atau lambang untuk menyatakan suatu pernyataan atau ungkapan yang panjang. Misalkan notasi faktorial dengan lambang ! digunakan untuk menyatakan perkalian berurutan mulai dari 1, notasi sigma dengan lambang $\sum$ digunakan untuk menyatakan suatu penjumlahan yang berurutan, dan masih banyak lambang-lambang lainnya.

Notasi Sigma adalah suatu Notasi yang dipakai untuk menuliskan secara singkat penjumlahan n suku. Simbol ini diambil dari huruf kapital Yunani yang berarti *Sum* atau penjumlahan dan pertama kali dikenalkan oleh **Leonhard Euler** pada abad ke-18.

Secara umum notasi sigma didefinisikan dengan:

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n$$

- k = 1 disebut batas bawah penjumlahan. Untuk menyatakan batas bawah penjumlahan, bukan hanya dimulai dari 1, dapat juga dimulai dari angka bulat berapa saja dan huruf k dapat diganti huruf apa saja, yang sama dengan notasi didepannya, misalkan: $\sum_{i=1}^{n} U_i$, $\sum_{x=-2}^{n} U_x$, $\sum_{m=5}^{n} U_m$ dan lain-lain.

- U_k merupakan suatu polinom dalam variabel k. Jika U_x maka polinomnya bervariabel x dan seterusnya. Polinom dapat berupa konstanta, berderajat 1, berderajat 2 dan lainnya.

- n merupakan bilangan bulat dan disebut batas atas benjumlahan. n $\geq$ batas bawah penjumlahan.

Contoh 6

Uraikan dalam bentuk penjumlahan notasi sigma di bawah ini, dan tentukan nilainya:

a. $\sum_{i=1}^{5}(3i+1)$ b. $\sum_{n=6}^{10}(n^2-1)$ c. $\sum_{x=1}^{6}\frac{x^2-5}{x}$ d. $\sum_{i=2}^{10}3$

Jawab:

a. $\sum_{i=1}^{5}(3i+1) = (3.1 + 1) + (3.2 + 1) + (3.3 + 1) + (3.4 + 1) + (3.5 + 1)$

$= 4 + 7 + 10 + 13 + 16 = 50$

b. $\sum_{n=6}^{10}(n^2-1) = (6^2 - 1) + (7^2 - 1) + (8^2 - 1) + (9^2 - 1) + (10^2 - 1)$

$= 35 + 48 + 63 + 80 + 99 = 325$

c. $\sum_{x=1}^{6}\frac{x^2-5}{x} = \frac{1^2-5}{1} + \frac{2^2-5}{2} + \frac{3^2-5}{3} + \frac{4^2-5}{4} + \frac{5^2-5}{5} + \frac{6^2-5}{6}$

$= -4 + (-\frac{1}{2}) + \frac{4}{3} + \frac{11}{4} + \frac{20}{5} + \frac{31}{6} = \frac{35}{4}$

d. $\sum_{i=2}^{10}3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 27$

c. Rangkuman

1. Barisan bilangan adalah urutan bilangan yang memiliki aturan atau pola tertentu. Elemen-elemen dari suatu barisan bilangan sering disebut dengan istilah *suku*.
2. Jika suku-suku suatu barisan dijumlahkan maka akan terbentuk sebuah *deret* .
3. suku ke-n suatu deret = selisih antara Jumlah n suku yang pertama dengan jumlah (n – 1) suku yang pertama

   $U_n = S_n - S_{(n-1)}$ dengan syarat n > 1
4. Notasi sigma didefinisikan dengan: $\sum_{k=1}^{n}U_k = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_n$

LATIHAN 1

1. Tentukan tiga suku berikutnya dari barisan di bawah ini:
   a. 3, 7, 13, 21, 31, . . .
   b. 5, -11, 17, -23, 29, -35, . . .
   c. 3, 12, 48, 192, 768, . . .
   d. 1, 5, 5, 3, 9, 1, 13, -1, . . .
   e. 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, . . .
   f. 3, 3, 6, 18, 72, 360, 2160, . . .
2. Tentukan 4 suku yang pertamanya dan suku ke-50 jika suatu barisan memiliki pola U_n sebagai berikut:
   a. $U_n = 5n - 7$
   b. $U_n = 4.\ 3^{(n-2)}$
   c. $U_n = 2n^2 - 5n$
   d. $U_n = (-1)^n.(3n + 2)$
   e. $U_n = \dfrac{2n}{(n+2)(2n-1)}$

3. Tentukan rumus suku ke-n dan suku ke-15 dari barisan di bawah ini:
   a. 3, 7, 13, 21, 31, . . .
   b. 5, 11, 17, 23, 29. . .
   c. 3, 6, 12, 24, 48, . . .
   d. 2, 4, 8, 16, 32, . . .
   e. $5^0, 5^1, 5^2, 5^3$,. . .
   f. $3^2, 3^3, 3^4, 3^5$, . . .

4. Suatu deret bilangan memiliki jumlah n suku yang pertama dinyatakan dengan rumus: $S_n = n^2 + 2n + 5$. Tentukan:
   a. Jumlah 6 suku yang pertama
   b. Rumus suku ke-n
   c. Suku ke-8

5. Suatu deret bilangan memiliki jumlah n suku yang pertama dinyatakan dengan rumus: $S_n = 2n^2 - 4n + 8$. Tentukan:
   a. Jumlah 4 suku yang pertama
   b. Rumus suku ke-n
   c. Suku ke-20

6. Tentukan nilainya:
   a $\sum_{x=5}^{9} 2x^3$
   b $\sum_{x=5}^{200} 4$
   c $\sum_{m=3}^{7} (2m^2 + 3m - 4)$
   d $\sum_{m=5}^{8} \dfrac{2}{m}$
   e $\sum_{x=1}^{10} 2.3^{x-2}$
   f. $\sum_{x=52}^{56} (\dfrac{5x+4}{3})$
   g. $\sum_{x=3}^{10} (3x+4)$
   h. $\sum_{p=65}^{72} (850 - 8p)$
   i. $\sum_{n=62}^{68} (\dfrac{n+2}{2})$
   j. $\sum_{n=80}^{85} (-3n + 100)$

B.2 Barisan dan deret Aritmatika

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menjelaskan barisan dan deret aritmatika
- Menentukan suku ke-n suatu barisan aritmatika
- Menentukan jumlah n suku suatu deret aritmatika
- Menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan deret aritmatika

b. Uraian Materi

1). Barisan Aritmatika

Selain nama-nama barisan di atas, ada nama barisan tertentu yang disebut dengan barisan aritmatika.

Barisan aritmatika adalah barisan yang memiliki beda atau selisih tetap antara dua suku yang berurutan.
Dari definisi di atas maka barisan bilangan asli merupakan barisan aritmatika yang memiliki beda antara suku berurutannya = 1, barisan bilangan ganjil merupakan barisan aritmatika yang memiliki beda antara suku berurutannya = 2.

Sedangkan barisan bilangan segitiga, barisan bilangan persegi dan barisan bilangan Fibonacci *bukan barisan aritmatika* karena beda tiap suku yang berurutannya *tidak sama*

Contoh 7
Dari barisan di bawah ini, manakah yang termasuk barisan aritmatika.
a. 1 , 6, 11, 16, 21, . . .
b. 40, 37, 34, 31, 29, . . .
c. 3, 6, 12, 24, 48, . . .

Jawab:
a. 1, 6, 11, 16, 21, . . . merupakan barisan aritmatika sebab beda antara suku-suku yang berurutannya tetap, yaitu beda(b) = 6 – 1 = 11 – 6 = . . . = 5

b. 40, 37, 34, 31, 29, . . . merupakan barisan aritmatika sebab beda antara suku-suku yang berurutannya tetap, yaitu beda(b) = 37 – 40 = 34 – 37 = . . . = -3

c. 3, 6, 12, 24, 48, . . .bukan merupakan barisan aritmatika sebab beda antara suku-suku yang berurutan tidak tetap, yaitu $6 - 3 \neq 12 - 6 \neq 24 - 12 \neq \ldots$

Jika a adalah suku pertama, b adalah beda tiap suku yang berurutan maka:

U_1,	U_2,	U_3,	U_4,	. . . U_n
a	a + b	a + 2b	a + 3b	. . . a + (n – 1)b

Dari barisan di atas, diperoleh rumus suku ke-n, yaitu:

$$\mathbf{U_n = a + (n - 1)b}$$

$U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = U_4 - U_3 = \ldots = \boxed{U_n - U_{(n-1)} = b}$

Dapat juga diperoleh hubungan:
$U_3 - U_1 = a + 2b - a = 2b \Rightarrow (3 - 1)b$
$U_4 - U_1 = a + 3b - a = 3b \Rightarrow (4 - 1)b$
$U_5 - U_2 = a + 4b - (a + b) = 3b$, dari uraian disamping diperoleh hubungan:

$$\boxed{U_n - U_m = (n - m)\, b} \qquad n > m$$

Contoh 8
Tentukan rumus suku ke-n dan suku ke-100 dari barisan di bawah ini:
a. 1 , 7, 13, 19, 25, . . .
b. 150, 140, 130, 120, . . .

Jawab:
a. 1, 7, 13, 19, 25, . . . merupakan barisan aritmatika dengan beda tiap suku yang berurutannya: b = 6 dan suku pertama: a = 1 maka,
$U_n = a + (n - 1)b$
$U_n = 1 + (n - 1)6$
$U_n = 6n - 5$
Suku ke-100: $U_{100} = 6 \cdot 100 - 5 = 595$

b. 150, 140, 130, 120, . . . merupakan barisan aritmatika dengan beda tiap suku yang berurutannya: b = -10 dan suku pertama: a = 150 maka,
$U_n = a + (n - 1)b$
$U_n = 150 + (n - 1)(-10)$
$U_n = -10n + 160$
Suku ke-100: $U_{100} = -10 \cdot 100 + 160 = -840$

Contoh 9
Suku ke-9 dan suku ke-16 suatu barisan aritmatika adalah 79 dan 135, tentukan:
a. Suku pertama dan bedanya
b. Rumus suku ke-n
c. Suku ke-150

Jawab:
a. Suku ke-n barisan aritmatika:
$U_n = a + (n - 1)b$
$U_9 = a + (9 - 1)b \Leftrightarrow 79 = a + 8b$ . . . 1)
$U_{16} = a + (16 - 1)b \Leftrightarrow 135 = a + 15b$ . . . 2)
Dari eleminasi a atau b persamaan 1) dan 2) diperoleh a = 15 dan b = 8

b. Rumus suku ke-n:
$U_n = a + (n - 1)b$
$U_n = 15 + (n - 1)8 = 8n + 7$

c. Suku ke-150: $U_{150} = 8 \cdot 150 + 7 = 1207$

Contoh 10
Suku ke-7 dan suku ke-15 suatu barisan aritmatika adalah 41 dan 89, tentukan suku ke-20 dan suku ke-35

Jawab:
Untuk menyelesaikan contoh soal di atas, dapat digunakan cara *contoh 9*, dapat juga digunakan cara lain, yaitu:

$U_n - U_m = (n - m)\,b$
$U_{15} - U_7 = (15 - 7)\,b$
$89 - 41 = 8b \Rightarrow b = 6$

$U_n - U_m = (n - m)\,b$
$U_n = (n - m)\,b + U_m$
$U_{20} = (20 - 15).\,8 + U_{15}$
$U_{20} = 5.\,8 + 89 = 129$

$U_{35} = (35 - 15).\,8 + U_{15}$
$U_{35} = 20.\,8 + 89$
$U_{35} = 249$

2). Suku Tengah Barisan Aritmatika

Barisan bilangan yang memiliki suku tengah apabila banyak sukunya ganjil. Jika Suku ke-t atau U_t merupakan suku tengah, maka banyaknya suku adalah (2t – 1) dan suku terakhir adalah suku ke-(2t – 1) atau $U_{(2t-1)}$.

$U_t = a + (t - 1)b$

$U_t = \frac{1}{2}(2a + 2(t - 1)b)$

$U_t = \frac{1}{2}(2a + (2t - 2)b)$

$U_t = \frac{1}{2}(a + \underbrace{a + (2t - 1 - 1)b}_{U_{2t-1}})$ sehingga diperoleh hubungan:

$$\boxed{U_t = \frac{1}{2}(U_1 + U_{(2t-1)})}$$

Karena $U_{(2t-1)}$ merupakan suku akhir dari deret tersebut dan U_1 merupakan suku awal,

maka: $$\boxed{U_{tengah} = \frac{1}{2}(U_{awal} + U_{akhir})}$$

Contoh 11
Tentukan suku tengah dan suku keberapa dari suku tengah tersebut jika ada, dari barisan aritmatika di bawah ini?
a. 8, 14, 20, 26, . . . , 224
b. 130, 126, 122, . . . , -26
c. 23, 30, 37, . . ., 457

Jawab:
a. Dari barisan aritmatika: 8, 14, 20, 26, . . . , 224 diperoleh beda tiap suku b = 6, suku pertama a = 8 dan suku terakhir 224, maka diperoleh hubungan:
   $U_n = a + (n - 1)b$
   $224 = 8 + (n - 1)6$
   $224 = 6n + 2 \Rightarrow n = 37$, karena banyaknya suku ganjil yaitu 37 maka terdapat suku tengah yaitu suku ke-t dimana 2t – 1 = 37, jadi t = 19
   Suku tengah: $U_t = a + (t - 1)b$

$U_t = 8 + (19 - 1)6 = 116$ atau

Suku tengah: $U_t = \frac{1}{2}(U_{awal} + U_{akhir}) = \frac{1}{2}(8 + 224) = 116$

b. Dari barisan aritmatika: 130, 126, 122, . . . , -26 diperoleh beda tiap suku b = -4, suku pertama a = 130 dan suku terakhir -26, maka diperoleh hubungan:
$U_n = a + (n - 1)b$
$-26 = 130 + (n - 1)(-4)$
$-26 = 134 - 4n \Rightarrow n = 40$, karena banyaknya suku genap yaitu 40 maka tidak terdapat suku tengah

c. Dari barisan aritmatika: 23, 30, 37, . . ., 457 diperoleh beda tiap suku b = 7, suku pertama a = 23 dan suku terakhir 457, maka diperoleh hubungan:
$U_n = a + (n - 1)b$
$457 = 23 + (n - 1)7$
$457 = 7n + 16 \Rightarrow n = 63$, karena banyaknya suku ganjil yaitu 63 maka terdapat suku tengah yaitu suku ke-t dimana 2t – 1 = 63, jadi t = 32
Suku tengah: $U_t = a + (t - 1)b$
$U_t = 23 + (32 - 1)7 = 240$

3). Barisan Aritmatika Tingkat Banyak (Pengayaan)

Barisan aritmatika tingkat x adalah sebuah barisan aritmatika yang memiliki selisih yang sama tiap suku yang berurutannya setelah x tingkatan.

Dengan menggunakan pembuktian Binomium Newton (tidak diuraikan disini), maka rumus umum suku ke-n untuk barisan aritmatika tingkat banyak adalah:

$$\mathbf{Un = a + (n - 1)b + \frac{(n-1)(n-2)c}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)d}{3!} + \ldots}$$

a = suku ke-1 barisan mula-mula, b = suku ke-1 barisan tingkat satu, c = suku ke-1 barisan tingkat dua, d = suku ke-1 barisan tingkat tiga dan seterusnya

- Barisan aritmatika tingkat satu jika c = d = . . . = 0, sehingga diperoleh:
  $U_n = a + (n - 1)b \Rightarrow$ sudah dibahas di atas
- Barisan aritmatika tingkat dua jika d = e = . . . = 0, sehingga diperoleh:
  $U_n = a + (n - 1)b + \frac{(n-1)(n-2).c}{2}$
- Barisan aritmatika tingkat tiga jika e = f = . . . = 0, sehingga diperoleh:
  $U_n = a + (n - 1)b + \frac{(n-1)(n-2).c}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3).d}{6}$ dan seterusnya.

Contoh 12
Barisan aritmatika tingkat berapakah dari barisan-barisan di bawah ini:
a. 1, 5, 9, 13, 17, . . .
b. 5, 6, 10, 17, 27, . . .
c. 2, 9, 19, 36, 64, 107, 169, . . .

Jawab:

Untuk mengetahui tingkat barisan aritmatika, kita uraikan barisan sebagai berikut:

a. 1 5 9 13 17 . . .

4 4 4 4 . . . . Tingkat satu

Barisan di atas termasuk barisan aritmatika tingkat satu yang sudah dijelaskan di atas dengan nilai a = 1 dan b = 4

b. 5 6 10 17 27 . . .

1 4 7 10 . . . . Tingkat satu

3 3 3 . . . Tingkat dua

Barisan di atas termasuk barisan aritmatika tingkat dua dengan nilai a = 5, b = 1 dan c = 3

c. 2 9 19 36 64 107 . . .

7 10 17 28 43 . . . . Tingkat satu

3 7 11 15 . . . Tingkat dua

4 4 4 . . . Tingkat tiga

Barisan di atas termasuk barisan aritmatika tingkat tiga dengan nilai a = 2, b = 7, c = 3 dan d = 4

Contoh 13

Tentukan rumus suku ke-n dari barisan di bawah ini:

a. 5, 6, 9, 14, 21, . . .

b. -4, -1, 7, 20, 38, . . .

Jawab:

a. 5 6 9 14 21 . . .

1 3 5 7 . . . . Tingkat satu

2 2 2 . . . Tingkat dua

Barisan di atas termasuk barisan aritmatika tingkat dua dengan nilai a = 5, b = 1 dan c = 2

Sehingga: $U_n = a + (n-1)b + \dfrac{(n-1)(n-2).c}{2}$

$U_n = 5 + (n-1).1 + \dfrac{(n-1)(n-2).2}{2}$

$U_n = 5 + n - 1 + n^2 - 3n + 2 = n^2 - 2n + 6$

b. $\underbrace{-4 \quad -1}_{3} \quad 7 \quad 20 \quad 38 \; . \; . \; .$

$$\begin{array}{ccccccccc} -4 & & -1 & & 7 & & 20 & & 38 \;\ldots \\ & 3 & & 8 & & 13 & & 18 & \ldots \text{ Tingkat satu} \\ & & 5 & & 5 & & 5 & \ldots & \text{Tingkat dua} \end{array}$$

Barisan di atas termasuk barisan aritmatika tingkat dua dengan nilai a = -4, b = 3 dan c = 5

Sehingga: $U_n = a + (n-1)b + \dfrac{(n-1)(n-2).c}{2}$

$U_n = -4 + (n-1).3 + \dfrac{(n-1)(n-2).5}{2}$

$U_n = -4 + 3n - 3 + 2{,}5n^2 - 7{,}5n + 5$

$U_n = 2{,}5n^2 - 4{,}5n - 2$

4). Deret Aritmatika

Jika suku-suku dari suatu barisan aritmatika dijumlahkan, maka akan terbentuk *deret aritmatika.* Nama lain deret aritmatika adalah *deret hitung* atau *deret tambah.* Sebagai contoh deret yang terbentuk dari barisan aritmatika: 1 , 5, 9, 13, . . . adalah deret: 1 + 5 + 9 + 13 + . . .

Jika S_n adalah jumlah n suku yang pertama deret aritmatika dan U_n adalah suku ke-n nya, maka:

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_{(n-2)} + U_{(n-1)} + U_n$

Dari sifat barisan aritmatika bahwa:

$U_n - U_{(n-2)} = 2b$ dan $U_n - U_{(n-1)} = b$ maka

$U_{(n-2)} = U_n - 2b$ dan $U_{(n-1)} = U_n - b$, Jadi:

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + (a+b) + (a+2b) + \ldots + (U_n - 2b) + (U_n - b) + U_n \text{ , jika dibalik,} \\ S_n = & U_n + (U_n - b) + (U_n - 2b) + \ldots + (a+2b) + (a+b) + a \\ \hline 2.S_n = & \underbrace{(a+U_n) + (a+U_n) + (a+U_n) + \ldots + (a+U_n) + (a+U_n) + (a+U_n)}_{\text{penjumlahan n suku dengan tiap sukunya} = (a+u_n)} \end{array} +$$

$2.S_n = n\,(a + U_n)$, sehingga diperoleh rumus jumlah n suku yang pertama:

$$\boxed{\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)}}$$

Dari rumus $S_n = \dfrac{n}{2}(a + U_n)$, jika U_n diganti a + (n – 1)b maka diperoleh:

$S_n = \dfrac{n}{2}(a + a + (n-1)b)$ atau $\boxed{\mathbf{S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)}}$

Catatan:

Hubungan antara U_n dan S_n : $\boxed{\mathbf{U_n = S_n - S_{(n-1)}}}$

Contoh 14

Tentukan nilai dari deret di bawah ini !

a. 2 + 8 + 14 + 20 + . . . (sampai 25 suku)

b. 3 + 10 + 17 + 24 + 31 + . . .+ 262

Jawab:

a. Dari deret: 2 + 8 + 14 + 20 + . . . dapat diketahui suku pertama a = 2, beda tiap suku b = 6 dan banyaknya suku n = 25, sehingga jumlah 25 suku yang pertama sebagai berikut:

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)\,b)$

$S_{25} = \frac{25}{2}(2.2 + (25-1).6)$

S_{25} = 12,5. (4 + 144) = 1.850

b. Dari deret: 3 + 10 + 17 + 31 + . . . + 262 dapat diketahui suku pertama a = 3, beda tiap suku b = 7 dan suku terakhir U_n = 262. Untuk menentukan jumlah semua sukunya, dicari dahulu banyaknya suku sebagai berikut:

$U_n = a + (n - 1)b$

$262 = 3 + (n - 1)7$

$262 = 7n - 4 \Leftrightarrow n = 38$

Untuk menentukan jumlah 38 suku yang pertamanya dapat menggunakan rumus:

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)\,b)$ atau $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$.

$S_{38} = \frac{38}{2}(2.3 + (38-1).7)$ $\quad S_{38} = \frac{38}{2}(3 + 262)$

S_{38} = 19. (6 + 259) = 5035 $\quad S_{38}$ = 19. (265) = 5035

Contoh 15

Tentukan jumlah semua bilangan antara 40 sampai 350 yang habis dibagi 6

Jawab:

Bilangan setelah 40 yang habis dibagi 6 yaitu:

Kita bagi dahulu 40 dengan 6 menghasilkan 6,67. Bilangan setelah 40 yang habis dibagi 6 adalah 6 x 7 = 42

Bilangan sebelum 350 yang habis dibagi 6 yaitu:

Kita bagi dahulu 350 dengan 6 mengasilkan 58,33. Bilangan sebelum 350 yang habis dibagi 6 adalah 6 x 58 = 348. Sehingga terbentuk deret: 42 + 48 + 54 + . . . + 348.

Dari deret: 42 + 48 + 54 + . . . + 348 dapat diketahui suku pertama a = 42, beda tiap suku b = 6 dan suku terakhir U_n = 348. Untuk menentukan jumlah semua sukunya, ditentukan dahulu banyaknya suku sebagai berikut:

$U_n = a + (n - 1)b$

$348 = 42 + (n - 1)6$

$348 = 6n + 36 \Leftrightarrow n = 52$

Jadi jumlah 52 suku yang pertamanya sebagai berikut:

$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$

$S_{52} = \frac{52}{2}(42 + 348)$

S_{52} = 26 . (390) = 1.0140

Contoh 16

Jumlah n bilangan yang pertama deret aritmatika dirumuskan: $S_n = 7n^2 - 4n$, tentukan rumus suku ke-n dan beda tiap sukunya.

Jawab:

Untuk menentukan rumus suku ke-n apabila diketahui S_n dari suatu deret aritmatika, dapat digunakan dua cara, yaitu cara hubungan antara U_n dan S_n dan cara uraian.

Cara 1, Hubungan antara U_n dan S_n

$U_n = S_n - S_{(n-1)}$

$U_n = \{7n^2 - 4n\} - \{7(n-1)^2 - 4(n-1)\}$

$U_n = \{7n^2 - 4n\} - \{7n^2 - 14n + 7 - 4n + 4\}$

$U_n = \{7n^2 - 4n\} - \{7n^2 - 18n + 11\}$

$U_n = 7n^2 - 7n^2 - 4n + 18n - 11$

$U_n = 14n - 11$ (khusus untuk deret aritmatika $n \geq 1$)

Cara 2, cara uraian:

$S_n = 7n^2 - 4n$

$S_1 = 7.1^2 - 4.1 = 3 \Rightarrow$ suku pertama a = 3

$S_2 = 7.2^2 - 4.2 = 20$

$U_2 = S_2 - S_1 = 20 - 3 = 17$

$b = U_2 - U_1 = 17 - 3 = 14$

$U_n = a + (n-1)b$

$U_n = 3 + (n-1)14 = 14n - 11$, jadi rumus suku ke-n: $U_n = 14n - 11$ dan beda b = 14.

Contoh 17

Produksi barang suatu pabrik bertambah setiap minggu dengan jumlah yang sama. Bila jumlah produksi sampai minggu ke-6 adalah 1425 unit dan jumlah Produksi sampai minggu ke-10 adalah 2875 unit. Tentukan jumlah produksi sampai minggu ke-52

Jawab:

Jumlah produksi sampai minggu ke-6 adalah S_6 dan jumlah produksi sampai minggu ke-10 adalah S_{10}

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$

$S_6 = \frac{6}{2}(2a + (6-1)b) = 1425$

$3(2a + 5b) = 1425$

$2a + 5b = 475 \quad ...\ 1)$

$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$

$S_{10} = \frac{10}{2}(2a + (10-1)b) = 2875$

$5(2a + 9b) = 2875$

$2a + 9b = 575 \quad ...\ 2)$

Dengan eleminasi a atau b dari persamaan 1) dan 2) diperoleh a = 175 dan b = 25

Jumlah produksi sampai minggu ke-52 adalah: $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$

$S_{52} = \frac{52}{2}(2.\ 175 + (52-1).25)$

$S_{52} = 26\ (350 + 1275) = 42250$

Contoh 18

Tutik meminjam di koperasi karyawan sebesar Rp5.000.000,00 dan akan dibayar setiap bulan dengan pembayaran yang sama besar sebesar Rp500.000,00. Jika koperasi membebankan bunga sebesar 2 % dari sisa pinjaman. Tentukan jumlah bunga total yang dibayarkan Tutik.

Jawab:

Pinjaman sebesar Rp. 5.000.000 akan dibayar setiap bulan dengan jumlah yang sama sebesar Rp.500.000. Dengan demikian Tutik akan mencicil selama 10 bulan, dengan besarnya masing-masing bunga sebagai berikut:

Bulan ke-1: bunga = 2% x Rp5.000.000 = Rp100.000,00

Bulan ke-2: bunga = 2% x Rp4.500.000 = Rp90.000,00

Bulan ke-3: bunga = 2% x Rp.4.000.000 = Rp80.000,00 dan seterusnya, ternyata besarnya bunga membentuk deret aritmatika dengan beda tiap suku b = -10.000 dan suku pertama a = Rp100.000,00 maka jumlah semua bunga:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)\,b)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2x100.000 + (10-1)(-10.000))$$

$$S_{10} = 5\ (200.000 - 90.000) = \text{Rp}550.000{,}00$$

Contoh 19

Tentukan nilainya:

a. $\sum\limits_{i=1}^{100}(2i+5)$ b. $\sum\limits_{n=6}^{50}(100-3n)$ c. $\sum\limits_{i=50}^{150}3$

Jawab:

a. Sesuai definisi notasi sigma bahwa:

$$\sum_{i=1}^{100}(2i+5) = (2.1 + 5) + (2.2 + 5) + (2.3 + 5) + \ldots + (2.100 + 5)$$

$$= 7 + 9 + 11 + \ldots + 205,$$

sesuai dengan deret aritmatika maka jumlahnya adalah:

$$= \frac{n}{2}(\ a + U_n) = \frac{100}{2}(7 + 205) = 10600$$

b. Sesuai definisi notasi sigma bahwa:

$$\sum_{n=6}^{50}(100-3n) = (100 - 3.6) + (100 - 3.7) + (100 - 3.8) + \ldots + (100 - 3.50)$$

$$= 82 + 79 + 76 + \ldots + (-50),$$

Banyaknya suku (n) = 50 – 6 + 1 = 45, sesuai dengan deret aritmatika, maka jumlahnya adalah:

$$= \frac{n}{2}(\ a + U_n)$$

$$= \frac{45}{2}(82 + (-50)) = 22{,}5\ .\ 32 = 720$$

c. $\sum_{i=50}^{150} 3$ = 3 + 3 + 3 + . . . + 3 , nilai n = 150 – 50 + 1 = 101

= 3.n = 3 x 101 = 303

Contoh 20

Nyatakan dalam bentuk notasi sigma dengan batas bawah 1 dari penjumlahan di bawah ini:

a. 1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 + 37 + 43
b. 2 + 5 + 8 + 11 + . . . + 233
c. 5 + 7 + 11 + 17 + 25 + 35 + 47 + 61

Jawab:

Untuk menentukan polinom dari suatu notasi sigma, kita gunakan rumus suku ke-n atau U_n dari deret atirmatika maupun deret geometri yang sudah kita pelajari.

a. 1 + 7 + 13 + 19 + 25 + 31 + 37 + 43
Deret di atas merupakan deret aritmatika dengan suku pertama a = 1, beda tiap suku b = 6 dan banyaknya suku n = 8, maka:
$U_n = a + (n - 1)b$
$= 1 + (n - 1)6$
$= 6n - 5$
Jadi notasi sigmanya adalah: $\sum_{n=1}^{8}(6n-5)$

b. 2 + 5 + 8 + 11 + . . . + 233
Deret di atas merupakan deret aritmatika dengan suku pertama a = 2, beda tiap suku b = 3 dan suku akhir 233, menentukan banyaknya suku sebagai berikut:
$U_n = a + (n - 1)b$
$233 = 2 + (n - 1)3$
$233 = 3n - 1$
$n = 78.$
Jadi notasi sigmanya adalah: $\sum_{n=1}^{78}(3n-1)$

c. 5 + 7 + 11 + 17 + 25 + 35 + 47 + 61
Deret di atas merupakan deret aritmatika tingkat 2 (baca lagi deret aritmatika tingkat banyak) dengan a = 5, b = 2 dan c = 2, rumus suku ke-n sebagai berikut:
$U_n = a + (n - 1)b + \frac{(n-1)(n-2).c}{2}$
$= 5 + (n - 1)2 + \frac{(n-1)(n-2).2}{2}$
$= 5 + 2n - 2 + n^2 - 3n + 2$
$= n^2 - n + 5$
Jadi notasi sigmanya adalah: $\sum_{n=1}^{8}(n^2-n+5)$

c. Rangkuman

1. Barisan aritmatika adalah barisan yang memiliki beda atau selisih tetap antara dua suku yang berurutan.

2. Rumus suku ke-n barisan aritmatika:
   - $U_n = a + (n - 1)b$
   - $U_n - U_{(n-1)} = b$
   - $U_n - U_m = (n - m)\,b$ untuk $n > m$

3. Suku tengah barisan aritmatika: $U_{tengah} = \frac{1}{2}(U_{awal} + U_{akhir})$

4. Rumus umum suku ke-n untuk barisan aritmatika tingkat banyak adalah:
   $$Un = a + (n-1)b + \frac{(n-1)(n-2)c}{2!} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)d}{3!} + \ldots$$

5. Rumus jumlah deret aritmatika: $S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$ atau $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)\,b)$

LATIHAN 2

1. Tentukan rumus suku ke-n dan suku ke-100 dari barisan aritmatika di bawah ini:
   a. 3, 9, 15, 21, . . .
   b. -5, -1 , 3, 7, 11,. . .
   c. 35, 32, 29, 26, . . .
   d. -8, -12, -16, -20, . . .
   e. 20, 16, 12, 8, . . .
   f. 100, 93, 86, 79, 72, . . .

2. Tentukan rumus suku ke-n dan suku ke-75 dari barisan di bawah ini:
   a. 1, 3, 7, 13, 21, . . .
   b. 2, 2, 9, 29, 68, 132, 227, . . .
   c 2, 7, 13, 20, 28, . . .
   d. -5, -1 , 6, 16, 29, 45, . . .

3. Tentukan beda, suku pertama, rumus suku ke-n dan suku ke-75 dari barisan aritmatika di bawah ini:
   a. Suku ke-4 = 15 dan suku ke-12 = 47
   b. Suku ke-15 = 52 dan suku ke-8 = 31
   c. Suku ke-3 + suku ke-5 = 68 dan suku ke-6 + suku ke-8 = 44
   d. Suku ke-2 = 17 dan suku ke-5 + suku ke-7 + suku ke-10 = - 12
   e. Suku pertama + suku ke-3 = - 4 dan suku ke-2 + suku ke-4 = - 1

4. Tentukan nilai suku tengahnya jika ada dari barisan aritmatika di bawah ini?
   a. 3, 7, 11, 15, . . . , 203
   b. 7, 13, 19, . . . , 475
   c. 5, 13, 21, . . . , 1.037
   d. 1500, 1489, 1478, . . . , 730

5. Tiga bilangan membentuk barisan aritmatika dengan jumlahnya 33. Jika ketiga bilangan dikalikan hasilnya 1.155. Tentukan bilangan-bilangan tersebut !

6. Seutas tali dipotong menjadi 9 bagian sesuai dengan barisan aritmatika. Jika potongan terpendek dan terpanjang adalah 23 cm dan 59 cm. Tentukan:
   a. Beda tiap potongan
   b. Panjang tali potongan ke-6

7. Seorang karyawan diawal kerjanya memiliki gaji Rp.1.100.000,00 Setiap kuartal gajinya akan dinaikkan sebesar Rp.75.000,00 Tentukan gaji karyawan tersebut setelah bekerja selama 7 tahun.

8. Suatu investasi dengan nilai awal Rp. 85 juta. Dalam perhitungan, untuk tahun pertama nilai investasi akan berkurang sebesar 10%, tahun ke-2 turun sebesar 12,5%, tahun ke-3 turun sebesar 15 % dan tahun-tahun berikutnya nilai investasi turun sesuai dengan barisan aritmatika. Tentukan:
   a. Nilai investasi pada awal tahun ke-8
   b. Nilai investasi pada akhir tahun ke-12
   c. Setelah berapa tahun investasi tidak memiliki nilai lagi

9. Tentukan nilainya dari deret aritmatika di bawah ini:
   a. 1+ 5 + 9 + 13 + . . . (sampai 75 suku)
   b. 54 + 51 + 48 + 45 + . . . (sampai 46 suku)
   c. 4 + 11 + 18 + 25 + . . . + 361 = . . .
   d. 81 + 75 + 69 + . . . + (-123) = . . .
   e. 5 + 1 + 8 + 5 + 11 + 9 + . . . (sampai 80 suku)
   f. 2 + 100 + 7 + 93 + 12 + 86 + . . . (sampai 73 suku)

10. Tentukan jumlah semua bilangan:
    a. Antara 100 sampai 300 yang habis dibagi 7
    b. Antara 200 sampai 450 yang gabis dibagi 5

11. Seutas tali dipotong menjadi 12 bagian sesuai dengan deret hitung. Jika potongan terpendek dan terpanjang adalah 25 cm dan 2,2 m. Tentukan:
    a. Beda tiap potongan
    b. Panjang tali sebelum dipotong-potong

12. Seorang pemilik kebun durian semenjak pohonnya berbuah tiap hari mencatat banyaknya buah yang masak dan berkesimpulan bahwa hasilnya pada hari ke-n memuat rumus: -7n + 210. Tentukan jumlah seluruh buah durian yang masak !

13. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap hari dengan jumlah yang sama. Bila keuntungan sampai hari ke-4 = Rp136.000 dan keuntungan sampai hari ke-11 = Rp605.000. Tentukan keuntungan yang diperoleh sampai hari ke-25 !

14. Fulan meminjam di koperasi “ SIMPAN PINJAM” sebesar Rp.10.000.000,. dan akan dibayar setiap bulan dengan pembayaran yang sama besar sebesar Rp.400.000. Jika koperasi membebankan bunga sebesar 2,5% dari sisa pinjaman. Tentukan jumlah bunga total yang dibayarkan Fulan !

15. Seorang karyawan karena prestasinya baik, dijanjikan oleh manajer gajinya dinaikan per Februari 2006 sebesar Rp. 55.000,00 tiap bulan. Jika gaji karyawan tersebut pada Januari 2006 sebesar Rp.1.200.000,00. Tentukan:
    a. Gaji karyawan pada Agustus 2007
    b. Jumlah semua gaji karyawan sampai Maret 2007

16. Tentukan nilainya:
    a. $\sum_{x=5}^{200} 4$
    d. $\sum_{x=3}^{100} (3x+4)$
    b. $\sum_{n=1}^{68} (2n+2)$
    d. $\sum_{p=15}^{72} (850-8p)$
    c. $\sum_{n=17}^{85} (-3n+100)$
    e. $\sum_{n=1}^{200} (-n+100)$

17. Ubahlah kedalam bentuk notasi sigma $\sum_{m=1}^{n} f(m)$:
    a. 1 + 4 + 9 + 25 + 36 + 49 + 64
    b. 8 + 27 + 64 + 125 + 216 + 343
    c. 3 + 7 + 11 + 15 + . . . (sampai 50 suku)
    d. -10 – 7 – 4 – 1 + 2 + . . . (sampai 25 suku)
    e. 150 + 143 + 136 + 129 + . . . (sampai 30 suku)
    f. 3 + 7 + 13 + 21 + 31 + 43 + . . . (sampai 20 suku)
    g. 1 + 6 + 14 + 25 + 39 + 56 + . . . (sampai 20 suku)
    h. 1 + 7 + 13 + 19 + 25 + . . . + 205

B.3 Barisan dan Deret Geometri

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menjelaskan barisan dan deret geometri
- Menentukan suku ke n suatu barisan geometri
- Menentukan jumlah n suku suatu deret geometri
- Menjelaskan deret geometri tak hingga
- Menentukan jumlah deret geometri turun dengan banyak suku tak hingga
- Menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan deret geometri

b. Uraian Materi

1). Barisan Geometri

Selain nama-nama barisan yang sudah dibahas satu persatu, masih banyak nama-nama barisan yang lain yang belum dapat dibahas semuanya. Namun ada satu lagi nama barisan yang akan dibahas dalam pokok bahasan ini, yaitu *barisan Geometri.*

Barisan geometri adalah barisan yang memiliki rasio atau pembanding yang tetap antara suku-suku yang berurutannya.

Contoh 21

Dari barisan-barisan di bawah ini, manakah yang termasuk barisan geometri:

a. 3, 12, 48, 192, 768, . . .
b. 2, 4, 12, 48, 240, 1440, . . .
c. 625, 125, 25, 5, 1, . . .
d. $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \frac{27}{5}, \frac{81}{5}, \ldots$
e. $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{8}{45}, \frac{16}{135}, \frac{32}{405}, \ldots$

Jawab:

a. 3, 12, 48, 192, 768, . . . merupakan barisan geometri karena memiliki rasio yang sama antara suku-suku yang berurutannya, yaitu: $\frac{12}{3} = \frac{48}{12} = \ldots = 4$

b. 2, 4, 12, 48, 240, 1440, . . . bukan merupakan barisan geometri karena rasio antara suku-suku yang berurutannya tidak sama, yaitu: $\frac{4}{2} \neq \frac{12}{4} \neq \frac{48}{12} \neq \ldots$

c. 625, 125, 25, 5, 1, . . . merupakan barisan geometri karena memiliki rasio yang sama antara suku-suku yang berurutannya, yaitu: $\frac{125}{625} = \frac{25}{125} = \ldots = \frac{1}{5}$

d. $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \frac{27}{5}, \frac{81}{5}, \ldots$ merupakan barisan geometri karena memiliki rasio yang sama antara suku-suku yang berurutannya, yaitu: $\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{9}{5} : \frac{3}{5} = \ldots = 3$

e. $\frac{2}{5}, \frac{4}{15}, \frac{8}{45}, \frac{16}{135}, \frac{32}{405}, \ldots$ merupakan barisan geometri karena rasio antara suku-suku yang berurutannya sama, yaitu: $\frac{4}{15} : \frac{2}{5} = \frac{8}{45} : \frac{4}{15} = \frac{16}{135} : \frac{8}{45} = \ldots = \frac{2}{3}$

Jika rasio dari barisan geometri adalah r dan suku pertamanya a, maka barisan geometri tersebut adalah:

$$\begin{array}{ccccc} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 \ldots\ldots & U_n \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ a & a.r & a.r^2 & a.r^3 \ldots\ldots & a.r^{(n-1)} \end{array}$$

Dari pola barisan di atas, maka rumus suku ke-n dari barisan geometri adalah:

$$\boxed{U_n = a.r^{(n-1)}}$$

Dari pola barisan di atas, kita dapat menentukan hubungan antara rasio dan suku-sukunya, yaitu:

$\frac{U_2}{U_1} = r$, $\frac{U_3}{U_1} = r^2$, $\frac{U_4}{U_1} = r^3$, $\frac{U_4}{U_2} = r^2$ dan seterusnya. Sehingga dapat disimpulkan:

$$\boxed{\frac{U_n}{U_m} = r^{(n-m)}} \quad \text{atau} \quad \boxed{U_n = r^{(n-m)}.U_m}$$

Contoh 22

Tentukanlah rumus suku ke-n dan suku ke-15 dari barisan geometri di bawah ini:

a. 3, 6, 12, 24, 48, . . .
b. 512, 256, 128, 64, . . .
c. 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 ; . . .
d. 60, 90, 135, $202\frac{1}{2}$, . . .
e. 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$,. . .

Jawab:

a. 3, 6, 12, 24, 48, . . . merupakan barisan geometri dengan rasio r = 2, dan suku pertama a = 3, maka rumus suku ke-n adalah:
$U_n = ar^{n-1}$
$U_n = 3.2^{n-1}$
Suku ke-15: $U_{15} = 3.2^{15-1}$
$= 3.2^{14} = 49152$

b. 512, 256, 128, 64, . . . merupakan barisan geometri dengan rasio $r = \frac{256}{512} = \frac{1}{2}$, dan suku pertama a = 512, maka rumus suku ke-n adalah:
$U_n = ar^{n-1}$
$U_n = 512.(\frac{1}{2})^{n-1} = 2^9.2^{-1(n-1)}$
$= 2^{9-n+1}$
$= 2^{10-n}$
Suku ke-15: $U_{15} = 2^{10-15}$
$= 2^{-5} = \frac{1}{32}$

c. 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 ; . . . merupakan barisan geometri dengan rasio r = 0,1 dan suku pertama a = 0,1 maka rumus suku ke-n adalah:
$U_n = ar^{n-1}$
$U_n = 0{,}1.\ 0{,}1^{n-1}$
$= 0{,}1^n = 10^{-n}$
Suku ke-15: $U_{15} = 10^{-15}$

d. 60, 90, 135, $202\frac{1}{2}$, . . . merupakan barisan geometri dengan rasio $r = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}$ dan suku pertama a = 60, maka rumus suku ke-n adalah:

$U_n = ar^{n-1}$

$U_n = 60.(\frac{3}{2})^{n-1}$

$= 3.\ 5.\ 2^2.\ 3^{n-1}\ .\ 2^{-n+1}$

$= 5.\ 2^{-n+3}.\ 3^n$

Suku ke-15: $U_{15} = 5.\ 2^{-15+3}.\ 3^{15}$

$= 5.\ 2^{-12}.3^{15}$

e. 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$,. . . merupakan barisan geometri dengan rasio r = $\frac{1}{5}$ dan suku pertama a = 1, maka rumus suku ke-n adalah:

$U_n = ar^{n-1}$

$U_n = 1.(\frac{1}{5})^{n-1}$

$= 5^{-n+1}$

Suku ke-15: $U_{15} = 5^{-n+1}$

$= 5^{-15+1} = 5^{-14}$

Contoh 23

Diketahui suatu barisan geometri suku ke-6 adalah 96 dan suku ke-9 adalah 768. Tentukan suku ke-12.

Jawab:

Rumus suku ke-n barisan geometri: $U_n = ar^{n-1}$

Suku ke-6 = 96 Suku ke-9 = 768

$ar^5 = 96$ . . .1) $ar^8 = 768$ . . . 2)

Cara 1:

Tentukan dahulu nilai a dan r, yaitu:

$\frac{ar^8}{ar^5} = \frac{768}{96} \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

Dari persamaan 1) $\Rightarrow ar^5 = 96$

$a.2^5 = 96 \Rightarrow a = 3$

Jadi suku ke-12: $U_{12} = ar^{11}$

$= 3.\ 2^{11} = 6144$

Cara 2:

Gunakan hubungan antara U_m dan U_n:

$\frac{U_n}{U_m} = r^{n-m} \Rightarrow \frac{U_9}{U_6} = r^{9-6}$

$\frac{768}{96} = r^3 \Rightarrow r = 2$

$U_n = r^{n-m}\ .\ U_m$

$U_{12} = 2^{12-9}\ .\ U_9$

$U_{12} = 2^3.\ 768 = 6144$

2). Nilai Tengah Barisan Geometri

Barisan bilangan yang memiliki suku tengah apabila banyak sukunya ganjil. Jika suku ke-t atau U_t merupakan suku tengah, maka banyaknya suku adalah (2t – 1) dan suku terakhir adalah suku ke-(2t – 1) atau $U_{(2t-1)}$.

$U_t = a.r^{t-1}$
$U_t^2 = (a.r^{t-1})^2$
$U_t^2 = (a^2.t^{2t-2})$
$U_t^2 = (a.\underbrace{a.r^{(2t-1-1)}}_{U_{2t-1}})$ sehingga diperoleh hubungan:

$$\boxed{U_t^2 = (U_1 . U_{(2t-1)})} \quad \text{atau} \quad \boxed{U_t = \sqrt{U_1 . U_{(2t-1)}}}$$

Karena $U_{(2t-1)}$ merupakan suku akhir dari deret tersebut dan U_1 merupakan suku awal, maka: $\boxed{U_{tengah} = \sqrt{U_{awal} . U_{akhir}}}$

Contoh 24

Tentukan suku tengah dan suku keberapa dari suku tengah tersebut jika ada, dari barisan geometri di bawah ini?

a. 5, 10, 20, 40, . . . , 5120
b. $\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}$, . . . , 1024
c. 6, 18, 54, . . . (sampai 13 suku)

Jawab:

Suatu barisan memiliki suku tengah jika memiliki banyaknya suku ganjil.

a. Dari 5, 10, 20, 40, . . . , 5120 maka diperoleh: suku pertama a = 5, rasio r = 2 dan suku terakhir 5120. Maka banyaknya suku diperoleh sebagai berikut:
$U_n = ar^{n-1}$
$5120 = 5.2^{n-1}$
$1024 = 2^{n-1}$
$2^{10} = 2^{n-1} \Rightarrow n = 11$, karena banyak suku ganjil, yaitu n = 11, maka ada suku tengahnya, yaitu suku ke-6: $U_6 = ar^5$
$U_6 = 5.2^5 = 160$

b. Dari $\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}$, . . . , 1024 maka diperoleh: suku pertama a = $\frac{1}{32}$, rasio r = 2 dan suku terakhir 1024. Maka banyaknya suku diperoleh sebagai berikut:
$U_n = ar^{n-1}$
$1024 = \frac{1}{32}.2^{n-1}$
$2^{10} = 2^{-5}.2^{n-1}$
$2^{10} = 2^{n-6} \Rightarrow n = 16$, karena banyak suku genap, yaitu n = 16, maka tidak ada suku tengahnya

c. Dari 6, 18, 54, . . . (sampai 13 suku), maka diperoleh suku pertama a = 6 dan rasio r = 3. Karena banyak suku ganjil, yaitu n = 13, maka ada suku tengahnya, yaitu suku ke-7: $U_7 = ar^6$

$U_7 = 6.3^6 = 4374$

3). Deret Geometri

Jika suku-suku dari suatu barisan geometri dijumlahkan, maka akan terbentuk *deret geometri.* Nama lain deret geometri adalah *deret ukur.* Sebagai contoh deret yang terbentuk dari barisan geometri: 1, 2, 4, 8, . . . adalah: 1 + 2 + 4 + 8 + . . .
Jika S_n adalah jumlah n suku yang pertama deret geometri dan U_n adalah suku ke-n nya, maka:

$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + U_{n-1} + U_n$
$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ . . .1) jika dikalikan r maka diperoleh:
$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^{n-1} + ar^n$ . . . 2)

Jika persamaan 1) dikurang 2), maka akan diperoleh:

$$\begin{array}{lcl} S_n & = & a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ r.S_n & = & ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \quad - \\ \hline \end{array}$$

$S_n - r.S_n = a - ar^n$
$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$, sehingga diperoleh rumus:

$$\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}} \qquad \ldots a)$$

Dengan cara yang sama, jika persamaan 2) dikurang 1), maka akan diperoleh rumus:

$$\boxed{S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}} \qquad \ldots b)$$

Rumus a) di atas biasanya digunakan jika 0 < r < 1. dan b) digunakan jika r > 1

Catatan:
Hubungan antara U_n dan S_n

$$\boxed{U_n = S_n - S_{(n-1)}}$$

Contoh 25
Tentukan jumlahnya dari deret di bawah ini:
a. 1 + 2 + 4 + 8 + . . . (sampai 13 suku)
b. $972 + 324 + 108 + 36 + \ldots + \frac{4}{27}$

Jawab:
a. Dari deret: 1 + 2 + 4 + 8 + . . . dapat diketahui suku pertama a = 1, rasionya r = 2 (r > 1, maka menggunakan rumus b) dan banyaknya suku n = 13, sehingga jumlah 13 suku yang pertama sebagai berikut:

$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$

$S_{13} = \dfrac{1(2^{13} - 1)}{2 - 1}$

$S_{25} = 2^{13} - 1 = 8191$

b. Dari deret: $972 + 324 + 108 + 36 + \ldots + \dfrac{4}{27}$ dapat diketahui rasio $r = \dfrac{324}{972} = \dfrac{1}{3}$ suku pertama a = 972 dan suku terakhir $U_n = \dfrac{4}{27}$. Untuk menentukan jumlah semua sukunya, kita tentukan dahulu banyaknya suku sebagai berikut:

$U_n = ar^{n-1}$

$\dfrac{4}{27} = 972.\ \dfrac{1}{3}^{\,n-1}$

$\dfrac{1}{3}^{\,n-1} = \dfrac{4}{27} . \dfrac{1}{972}$

$3^{-1(n-1)} = 3^{-8}$

$-n + 1 = -8 \Rightarrow n = 9.$

Untuk menentukan jumlah 9 suku yang pertamanya menggunakan rumus a):

$S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$

$S_9 = \dfrac{972.(1 - \frac{1}{3}^{9})}{1 - \frac{1}{3}}$

$= \dfrac{972.(\frac{19682}{19683})}{\frac{2}{3}}$

$= 972.\dfrac{19682}{19683}.\dfrac{3}{2} = \dfrac{39364}{27}$

Contoh 26

Setiap awal bulan Wenny menabung di Bank BRI sebesar Rp.500.000,00. Jika Bank memberikan bunga 2% per bulan dengan asumsi tidak ada biaya pada proses penabungan. Tentukan jumlah semua tabungan Wenny setelah menabung selama satu tahun !

Jawab:

Sebelum menjawab soal di atas, terlebih lebih dahulu mencari rumus modal akhir dengan menggunakan bunga majemuk, yaitu

Suatu modal M dengan bunga p% per bulan, maka setelah:

1 bulan modal menjadi = M + bunga

$M_1 = M + M.p = M(1 + p)$

2 bulan modal menjadi $= M_1$ + bunga

$$M_2 = M(1 + p) + M(1 + p)p$$
$$= M(1 + p)(1 + p) = M(1 + p)^2$$

3 bulan modal menjadi $= M_2$ + bunga

$$M_3 = M(1 + p)^2 + M(1 + p)^2 p$$
$$= M(1 + p)^2 (1 + p) = M(1 + p)^3$$

Dari pola uraian di atas, maka pada n bulan modal menjadi: $M_n = M(1 + p)^n$.
Setelah satu tahun simpanan Wenny pada:
Bulan pertama $= 500.000(1 + 0,02)^{12} = 500.000(1,02)^{12}$
Bulan ke-2 $= 500.000(1,02)^{11}$
Bulan ke-3 $= 500.000(1,02)^{10}$ dan seterusnya, sehingga membentuk deret:

$500.000(1,02)^{12} + 500.000(1,02)^{11} + 500.000(1,02)^{10} + \ldots + 500.000(1,02)$
Dari deret di atas, dapat diketahui: suku pertama $a = 500.000(1,02)^{12}$, rasio $r = 1,02$ dan banyaknya suku $n = 12$, maka jumlah semua sukunya adalah:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{500.000(1,02)(1,02^{12} - 1)}{1,02 - 1} = \frac{510.000 \text{ x } 0,268241794}{0,02} = \text{Rp. } 6.840.165,76$$

Contoh 27
Diketahui suatu deret: 5 + 15 + 45 + . . . Jika S_n merupakan jumlah n suku yang pertama, carilah nilai n terkecil sehingga $S_n > 8000$

Jawab:
Dari deret: 5 + 15 + 45 + . . .diperoleh suku pertama a = 5 dan rasio tiap suku r = 3.
Karena r > 1 dan $S_n > 8000$ maka rumus jumlahnya adalah $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1} > 8000$

$$\frac{5(3^n - 1)}{3 - 1} > 8000$$
$$\frac{5}{2}(3^n - 1) > 8000$$
$$3^n - 1 > 3200$$
$$3^n > 3201$$
$$n. \log 3 > \log 3201$$
$$n > \frac{\log 3201}{\log 3}$$
$$n > 7,35$$

Jadi n terkecil supaya $S_n > 8000$ adalah n = 8

4). Deret Geometri Tak hingga

Deret geometri terbagi menjadi dua:
- Deret geometri divergen yaitu deret geometri yang nilai rasionya r > 1
- Deret geometri konvergen yaitu deret geometri yang memiliki rasio r: $-1 < r < 1$

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri konvergen yang memiliki suku tak terhingga. Karena memiliki nilai rasio antara -1 sampai 1, maka deret geometri tak hingga merupakan deret geometri turun.

Karena rasio r bernilai antara -1 sampai 1, maka suku-suku berikutnya akan semakin kecil dan akan mendekati nol, dengan kata lain $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$. Dengan demikian meskipun banyaknya suku tidak berhingga, namun jumlah dari semua suku deret tersebut terbatas. Untuk menentukan jumlah suku-suku deret konvergen dengan jumlah suku tidak terbatas, perhatikan uraian di bawah ini:

Nilai S_n deret geometri konvergen dengan jumlah suku tak hingga dilambangkan dengan notasi: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{1-r} - \lim_{n\to\infty} \frac{ar^n}{1-r}$$

$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim\limits_{n\to\infty} r^n$, karena $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ maka,

$$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}.0$$

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{1-r}}$$

Catatan:

Yang memiliki nilai jumlah dari suatu deret geometri tak hingga hanya deret geometri konvergen, sedangkan deret geometri divergen jumlah tak hingganya tidak ada

Contoh 28

Tentukan jumlah tak hingganya dari deret geometri di bawah ini:

a. $18 + 6 + 2 + \frac{2}{3} + \ldots$

b. $80 + 64 + 51{,}2 + 40{,}96 + \ldots$

c. $\frac{1}{5} + 1 + 5 + 25 + \ldots$

Jawab:

a. Dari $18 + 6 + 2 + \frac{2}{3} + \ldots$ diperoleh suku pertama a = 18 dan rasionya $r = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$, jadi jumlah tak hingganya adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = \frac{18}{\frac{2}{3}} = 27$$

b. Dari $80 + 64 + 51{,}2 + 40{,}96 + \ldots$ diperoleh suku pertama a = 80 dan rasionya $r = \frac{64}{80} = 0{,}8$, jadi jumlah tak hingganya adalah:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{80}{1-0{,}8} = \frac{80}{0{,}2} = 400$$

c. Dari $\frac{1}{5}$ +1 + 5 + 25 + . . . diperoleh suku pertama a = $\frac{1}{5}$ = 0,2 dan rasionya r = 5, jadi jumlah tak hingganya tidak ada karena r = 5 > 1

Contoh 29

Tentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to \infty} (90 + 60 + 40 + \frac{80}{3} + \ldots)$

Jawab:

Menentukan nilai dari $\lim\limits_{x \to \infty} (90 + 60 + 40 + \frac{80}{3} + \ldots)$ sama artinya dengan menentukan jumlah tak hingga dari suatu deret: $90 + 60 + 40 + \frac{80}{3} + \ldots$

Dengan suku pertama a = 90 dan rasionya r = $\frac{60}{90} = \frac{2}{3}$. Jumlah tak hingganya:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

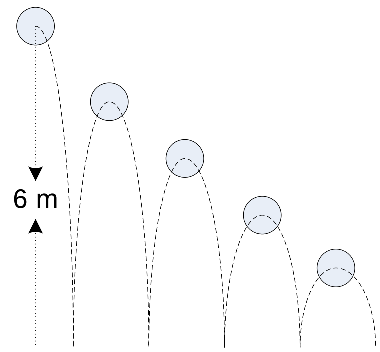
$$= \frac{90}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{90}{\frac{1}{3}} = 270$$

Contoh 30

Suatu bola pantul dijatuhkan dari ketinggian 6 meter. Setiap kali jatuh tinggi pantulan bola tersebut berkurang sepertiganya dari tinggi sebelumnya. Tentukan jumlah seluruh lintasan bola sampai bola itu berhenti.

Jawab:



Lihat gambar di samping, U_1 = 6, $U_2 = 6.\frac{2}{3} = 4$, $U_3 = 4.\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ dan seterusnya. Panjang lintasan bola merupakan 2 deret geometri konvergen, yaitu:

6 + 4 + $\frac{8}{3}$ + . . . dan 4 + $\frac{8}{3}$ + . . .

Jadi jumlah lintasan bola seluruhnya:

$$S_{\infty\,1} + S_{\infty\,2} = \frac{6}{1-\frac{2}{3}} + \frac{4}{1-\frac{2}{3}} = (18 + 12) \text{ m}$$

$$= 30 \text{ m}$$

c. Rangkuman

1. Barisan geometri adalah barisan yang memiliki rasio tetap antara suku-suku yang berurutannya.

2. Rumus suku ke-n dari barisan geometri adalah:
   - $U_n = a.r^{(n-1)}$
   - $\dfrac{U_n}{U_m} = r^{(n-m)}$
   - $U_n = r^{(n-m)}.\ U_m$

3. Rumus menentukan suku tengah dari barisan geometri adalah:

   $U_{tengah} = \sqrt{U_{awal}.\ U_{akhir}}$

4. Rumus menentukan jumlah deret geometri adalah:

   $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ untuk r > 1 dan $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ untuk r < 1

5. Rumus menentukan jumlah deret geometri turun untuk n tak hingga adalah:

   $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$

LATIHAN 3

1. Tentukan rumus suku ke-n dan suku ke-10 dari barisan di bawah ini:
   a. 1, 4, 16, 64, . . .
   b. 5, 10, 20, 40, 80,. . .
   c. 9, 27, 81, 243, . . .
   d. $\frac{1}{5}$, 1, 5, 25, 125, . . .
   e. 1.024, 512, 256, . . .

2. Tentukan rasio dan suku pertama barisan geometri di bawah ini:
   a. Suku ke-4 = 81 dan suku ke-6 = 729
   b. Suku ke-2 = 6 dan suku ke-5 = 162
   c. Suku ke-3 = 10 dan suku ke-6 = 1,25
   d. Suku ke-2 = 64 dan suku ke-3 + suku ke-4 = 20

3. Selesaikan soal barisan geometri di bawah ini :
   a. Suku ke-4 = 27 dan suku ke-6 = 243, tentukan suku ke-8
   b. Suku ke-2 = 100 dan suku ke-6 = 10^{-2}, tentukan suku ke-9
   c. Suku ke-2 = $2\sqrt{2}$ dan suku ke-5 = 8, tentukan suku ke-10

4. Tentukan nilai suku tengahnya apabila ada !
   a. $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, . . . , 1.024
   b. 3, 6, 12, . . . , 3.2^{13}
   c. 5, 15, 45, . . ., 98.415
   d. $\frac{2}{216}, \frac{2}{36}, \frac{1}{6}$, 1, . . . 2.6^{8}

5. Tiga bilangan membentuk deret geometri yang jumlahnya 93. Apabila hasil kali ketiga adalah 3375. Tentukan bilangan-bilangan tersebut !

6. Tentukan nilai dari deret geometri di bawah ini:
   a. 1+ 2 + 4 + 8 + . . . (sampai 10 suku)
   b. 54 + 18 + 6 + 2 + . . . (sampai 9 suku)
   c. 81 + 27 + 9 + . . . + $\frac{1}{27}$ = . . .
   d. 5 – 15 + 45 – 135 + . . . (sampai 8 suku)
   e. 3 – 6 + 12 – 24 + . . . (sampai 10 suku)
   f. 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + . . . (sampai 100 suku)
   g. 1 + 1 + 3 + 2 + 9 + 4 + 27 + 8 + . . . (sampai 19 suku)

7. Suatu tali dipotong menjadi 8 bagian dan panjang masing-masing potongan membentuk deret geometri. Jika Potongan terpendek dan terpanjang adalah 8 cm dan 174,96 meter. Tentukan panjang tali seluruhnya.

8. Setiap awal tahun Mutiara menabung di Bank BNI sebesar Rp. 1.000.000,00. Jika bank memberikan bunga 10 % per tahun dan dianggap tidak ada biaya administrasi. Tentukan tabungan mutiara setelah menabung selama 10 tahun.

9. Setiap akhir bulan Neni Menabung di BTN sebesar Rp.800.000. Jika Bank memberikan bunga 2,5% per bulan dan dianggap tidak ada biaya administrasi. Tentukan simpanan Neni setelah menabung selama 1,5 tahun !

10. Tentukan nilai x dari deret geometri : 2 + 4 + 8 + . . . + 2^{x} = 2046

11. Suatu bola dijatuhkan dari ketinggian 2 meter. Setelah dijatuhkan bola memantul lagi setinggi $\frac{4}{3}$ meter. Pantulan ke-3 setinggi $\frac{8}{9}$ meter dan seterusnya. Ternyata tinggi-tinggi pantulan selanjutnya membentuk suatu deret geometri. Tentukan panjang lintasan bola setelah memantul sebanyak 6 kali.

12. Tentukan jumlah tak hingganya dari deret di bawah ini, jika ada:
    a. 9 + 3 + 1 + . . .
    b. 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + . . .
    c. 12 – 8 + $\frac{16}{3} - \frac{32}{9}$ + . . .

d. 10 + 12,5 + 15,625 + . . .

e. $3 + \sqrt{3} + 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} + \ldots$

13. Tentukan nilainya: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(9 + 6 + 4 + \frac{8}{3} + \ldots\right)$

14. Sebuah bola tenis dijatuhkan dari ketinggian 2 meter. Setiap kali setelah bola itu memantul, ia mencapai ketinggian yang sama dengan 0,75 kali yang dicapai dari ketinggian sebelumnya. Tentukan jumlah lintasan total yang dilalui oleh bola tenis tersebut sampai berhenti.

15. Suatu perusahaan pada awal produksi, memproduksi komoditas sebanyak 54.000 unit. Karena manajemennya buruk setiap tahun produksi berkurang 0,2 dari produksi sebelumnya. Tentukan jumlah total produksi perusahaan tersebut sampai ia tidak memproduksi komoditasnya lagi !

Uji Kemampuan

A. Pilihan Ganda

1. Jika Jumlah n suku pertama suatu deret didefinisikan sebagai S_n = 6n + $3n^2$, maka suku ke-10 adalah . . .

   a. 63 b. 150 c. 180 d. 360 e. 657

2. Lucky mempunyai segulung kawat yang akan dipotong-potong. Jika potongan pertama panjangnya 8 cm, dan potongan berikutnya 1½ kali dari panjang potongan sebelumnya maka panjang potongan kawat yang ke-5 adalah....

   a. 18,0 cm b. 24,0 cm c. 27,5 cm d. 35,0 cm e. 40,5 cm

3. Suatu barisan geometri mempunyai suku pertama –48 dan suku keempat 6. Jumlah lima suku pertama dari barisan tersebut adalah....

   a. -93 b. -33 c. 33 d. 63 e. 93

4. Jumlah tak hingga suatu deret geometri adalah -50 dengan suku pertama -20. Rasio deret tersebut adalah . . . .

   a. $\frac{3}{5}$ a. $\frac{2}{5}$ c. $\frac{1}{5}$ d. $-\frac{2}{5}$ e. $-\frac{3}{5}$

5. Suatu deret aritmatika mempunyai rumus suku ke-n = 3n + 2. Jumlah 100 suku yang pertama dari deret tersebut adalah . . .

   a. 14.300 b. 15.350 c. 15.530 d. 16.350 e. 16.530

6. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 12 meter dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{4}$ kali ketinggian sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus-menerus hingga bola berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah . . .
   a. 36
   b. 48
   c. 72
   d. 84
   e. 96

7. Dari barisan aritmatika, diketahui suku ke-6 = 10 dan suku ke-25 = 67, maka suku ke-17 adalah...
   a. 37
   b. 43
   c. 46
   d. 49
   e. 53

8. Suku pertama suatu deret geometri adalah 2 dan suku ke-4 = 0,25. Jumlah 5 suku pertama deret tersebut adalah . . .
   a. $4\frac{31}{32}$
   b. $3\frac{31}{32}$
   c. $3\frac{15}{16}$
   d. $3\frac{7}{8}$
   e. $\frac{31}{32}$

9. Suatu deret geometri tak hingga, diketahui suku pertama $\frac{1}{4}$ dan jumlahnya $\frac{1}{3}$. Rasio dari deret tersebut adalah . . .
   a. $\frac{1}{6}$
   b. $\frac{1}{5}$
   c. $\frac{1}{4}$
   d. $\frac{1}{2}$
   e. 1

10. Jumlah semua bilangan bulat di antara 100 dan 300 yang habis dibagi 5 adalah ...
   a. 7.400
   b. 7.600
   c. 7.800
   d. 8.000
   e. 8.200

11. Jumlah n suku pertama suatu barisan dirumuskan $Sn = 3n^2 – 15n$. Nilai n supaya suku ke-n dari barisan tersebut sama dengan nol adalah . . .
   a. 3
   b. 5
   c. 6
   d. 8
   e. 9

12. Diketahui suatu barisan 2, 4, 8, 14, 22, . . . Suku ke-n barisan tersebut adalah. . .
   a. 2^n
   b. $n^2 – n + 2$
   c. $n^2 + n$
   d. $n^2 – 2n + 2$
   e. $n^2 – 2n + 3$

13. Nilai dari $\sum_{n=5}^{50}(2n+5)$ adalah . . .
   a. 1.760
   b. 2.670
   c. 2.760
   d. 2.860
   e. 3.760

14. Suku ke-5 dari deret aritmatika adalah 24 dan jumlah lima suku pertamanya sama dengan 80. Jumlah 15 suku yang pertama dari deret tersebut adalah. . .
   a. 520
   b. 540
   c. 560
   d. 580
   e. 600

15. Nilai dari : 4 + 7 + 10 + . . . + 601 = . . .
   a. 50.600 c. 56.500 e. 60.500
   b. 55.800 d. 60.000

16. Jumlah tak hingga suatu deret geometri adalah 8 dan jumlah semua suku genapnya adalah $\frac{8}{3}$. Suku ke-5 deret tersebut adalah . . .
   a. $\frac{1}{8}$ c. $\frac{1}{4}$ e. 2
   b. $\frac{1}{5}$ d. $\frac{1}{2}$

17. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap hari dengan jumlah yang sama. Bila keuntungan sampai hari ke-6 adalah Rp. 132.000 dan keuntungan sampai hari ke-15 adalah Rp. 600.000. Maka keuntungan sampai hari ke-20 adalah . . .
   a. Rp. 800.000 c. Rp. 920.000 e. Rp. 1.000.000
   b. Rp. 880.000 d. Rp. 960.000

18. Suku pertama suatu deret aritmatika adalah 12 dan suku terakhir adalah 182. Jika selisih suku ke-12 dan suku ke-7 adalah 25, maka banyak sukunya adalah . . .
   a. 32 c. 35 e. 38
   b. 34 d. 36

19. Jika a, b, n dan S adalah suku pertama, beda, banyaknya suku dan jumlah n suku yang pertama suatu barisan aritmatika, maka a = . . .
   a. $\frac{2S}{n}-\frac{1}{2}(n+1)b$ c. $\frac{S}{n}-\frac{1}{2}(n+1)b$ e. $\frac{S}{n}-\frac{1}{2}(n-1)b$
   b. $\frac{2S}{n}+\frac{1}{2}(n-1)b$ d. $\frac{S}{n}+\frac{1}{2}(n-1)b$

20. Tiga bilangan membentuk barisan aritmatika. Jika dijumlahkan dan dikalikan ketiga bilangan tersebut hasilnya adalah 33 dan 1.155 . Maka suku tengahnya adalah . . .
   a. 7 c. 15 e. 19
   b. 11 d. 16

21. Seorang petani cabe mencatat hasil panennya setiap hari, selama 12 hari mengalami kenaikan tetap yaitu pada hari pertama 25 Kg, hari kedua 30 Kg, hari ketiga 35 Kg dan seterusnya. Jumlah panen selama 12 hari adalah ....
   a. 300 Kg c. 400 kg e. 630 kg
   b. 350 Kg d. 600 kg

22. Jumlah semua bilangan asli antara 1 sampai 100 yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 5 adalah ...
   a. 133 c. 733 e. 1683
   b. 325 d. 1368

23. Seorang peternak ayam mencatat hasil ternaknya setiap bulan selama 10 bulan yang mengalami kenaikan tetap. Banyaknya ayam pada bulan pertama 15 ekor ayam, bulan kedua 20 ekor, bulan ketiga 25 ekor dan seterusnya. Jumlah ternak ayam selama 10 bulan pertama adalah . . . .

    c. 60 ekor   c. 500 ekor   e. 750 ekor
    d. 375 ekor   d. 600 ekor

24. Suku ke-2 dari barisan geometri adalah 4 sedangkan suku ke-5 adalah 32. Besar suku ke-8 adalah . . .

    a. 2^{-7} c. 2^6 e. 2^8
    b. 2^5 d. 2^7

25. Sebuah bakery pada bulan pertama memproduksi 10.000 potong kue donat dan tiap bulan produksinya naik 200 potong dari produksi bulan sebelumnya. Jumlah kue yang diproduksi bakery tersebut selama 1 tahun pertama adalah .... potong

    a. 12.200   c. 63.700   e. 134.400
    b. 12.400   d. 133.200

B. Soal Essay

1. Tentukan nilainya dari deret di bawah ini :
    a. $1 + 7 + 13 + 19 + 25 + . . . +265$
    b. $60 + 30 + 15 + \frac{15}{2} + \frac{15}{4} + . . . + \frac{15}{64}$
    c. $\sum_{p=3}^{75} (5p - 3)$
    d. $\sum_{m=2}^{12} (5.2^m + 3m)$
    e. $24 + 18 + 13{,}5 + 10{,}125 + ...$, tentukan jumlah tak hingganya.

2. Dari barisan 4 buah bilangan, setiap bilangan yang berdekatan sama selisihnya. Jumlah tiga bilangan pertama sama dengan nol dan kuadrat bilangan pertama sama dengan $-\frac{2}{3}$ kali bilangan ke-3. Tentukanlah bilangan-bilangan tersebut.

3. Tiga bilangan merupakan deret geometri dengan jumlahnya 26. Apabila suku tengahnya ditambah 4, maka ketiga bilangan itu membentuk barisan aritmatika. Tentukan bilangan-bilangan itu.

4. Suku ke-n suatu barisan dirumuskan: $U_n = 3^n - 1$,
    a. Tentukanlah rumus jumlah suku ke-n dan jumlah suku ke-2n nya.
    b. Tentukanlah jumlah 10 suku yang pertamanya.

5. Suatu deret geometri tak hingga jumlahnya 50, sedangkan jumlah tak hingga suku-suku genap banding jumlah tak hingga suku-suku ganjilnya adalah 4 : 5. Tentukanlah deret tersebut.

Sumber: Art & Gallery

Standar Kompetensi	Kompetensi Dasar
10. Menentukan kedudukan, jarak, dan besar sudut yang melibatkan titik, garis, dan bidang dalam ruang dimensi dua	10. 1 Mengidentifikasi sudut 10. 2 Menentukan keliling bangun datar dan luas daerah bangun datar 10. 3 Menerapkan transformasi bangun datar

A. PENDAHULUAN

Standar Kompetensi **Geometri Dimensi Dua** terdiri dari tiga (3) Kompetensi Dasar. Pada penyajian dalam buku ini, setiap Kompetensi Dasar memuat Tujuan, Uraian materi, Rangkuman dan Latihan. Kompetensi Dasar dalam Standar Kompetensi ini adalah **Sudut Bangun Datar, Keliling Bangun Datar dan Luas Daerah Bangun Datar** dan **Transformasi Bangun Datar.** Standar Kompetensi ini digunakan untuk menyelesaikan masalah–masalah sudut, luas dan keliling bangun datar, pada kehidupan sehari-hari dalam rangka untuk menunjang program keahliannya.

Sebelum mempelajari kompetensi ini, diharapkan anda telah menguasai standar kompetensi Sistem Bilangan Real terutama tentang perkalian, pembagian, penjumlahan dan pengurangan bilangan real dan fungsi.

Pada setiap akhir Kompetensi dasar tercantum soal-soal latihan yang disusun dari soal-soal yang mudah sampai soal-soal yang sukar. Latihan soal ini digunakan untuk mengukur kemampuan anda terhadap kompetensi dasar ini, artinya setelah mempelajari kompetensi dasar ini secara mandiri dengan bimbingan guru sebagai fasilisator, ukur sendiri kemampuan anda dengan mengerjakan soal-soal latihan tersebut.

Untuk melancarkan kemampuan anda supaya lebih baik dalam mengerjakan soal, disarankan semua soal dalam latihan ini dikerjakan baik di sekolah dengan bimbingan guru maupun di rumah.

Untuk mengukur standar kompetensi lulusan tiap siswa, di setiap akhir kompetensi dasar, guru akan memberikan evaluasi apakah anda layak atau belum layak mempelajari standar Kompetensi berikutnya. Anda dinyatakan layak jika anda dapat mengerjakan soal 60% atau lebih soal-soal evaluasi yang akan diberikan guru.

B. KOMPETENSI DASAR

B.1. Sudut Bangun Datar

a. Tujuan

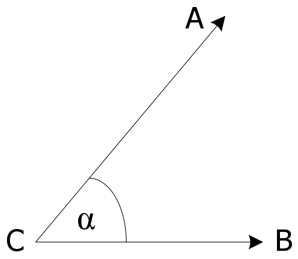
Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Mengukur sudut dengan menggunakan busur
- Mengkonversikan satuan sudut derajat ke radian atau sebaliknya.

b. Uraian Materi

1). Definisi dan pengukuran sudut

Sudut adalah daerah yang dibatasi oleh dua ruas garis dan titik. Untuk menyatakan nama, disertai suatu sudut dilambangkan dengan : "< " huruf-huruf Yunani seperti : α, β, θ dan lain-lain. Untuk mengukur sudut biasanya digunakan dengan **Busur.**



Gambar 4-1

Sudut disebelah diberi nama sudut α atau < ACB.
Untuk menentukan besarnya suatu sudut biasanya dinyatakan dengan **derajat (^{o})** atau **radian**

Cara mengukur besarnya sudut dengan Busur:

- Letakkan menempel garis 0^o pada busur ke salah satu ruas garis yang akan diukur besar sudutnya
- Letakkan titik pusat busur (titik pusat ½ lingkaran) pada titik sudut dan ruas garis yang lain terletak di dalam busur
- Ukur besar sudutnya dengan menggunakan skala pada busur

Secara garis besar, besarnya suatu sudut terbagi menjadi tiga bagian, yaitu:

- Sudut lancip yaitu sudut yang besarnya kurang dari 90^o.
- Sudut siku-siku yaitu sudut yang besarnya 90^o
- Sudut tumpul yaitu sudut yang besarnya lebih dari 90^o

Ukuran sudut dalam derajat yang lebih kecil dapat dinyatakan dalam menit (') dan detik('')
1 derajat = 60 menit dan 1 menit = 60 detik

Contoh 1
Nyatakan ukuran sudut di bawah ini dalam derajat, menit dan detik:
a. $34{,}3^o$ b. $79{,}18^o$ c. $137{,}82^o$

Jawab:
a. $34{,}3^o = 34^o + 0{,}3^o = 34^o + 0{,}3 \times 60' = 34^o\, 18'$

b. $79{,}18^o = 79^o + 0{,}18^o$
$= 79^o + 0{,}18 \times 60'$
$= 79^o + 10{,}8'$
$= 79^o + 10' + 0{,}8' = 79^o + 10' + 0{,}8 \times 60'' = 79^o\, 10'\, 48''$

c. $137{,}82^o = 137^o + 0{,}82^o = 137^o + 0{,}82 \times 60' = 137^o + 49{,}2'$
$= 137^o + 49' + 0{,}2'$
$= 137^o + 49' + 0{,}2 \times 60'' = 137^o\, 49'\, 12''$

Contoh 2
Nyatakan ukuran sudut di bawah ini dalam derajat saja:
a. $38^o\, 25'\, 18''$ b. $47^o\, 27'\, 36''$

Jawab:
a. $38^o\, 24'\, 18'' = \left(38 + \frac{24}{60} + \frac{18}{3.600} \right)^o$

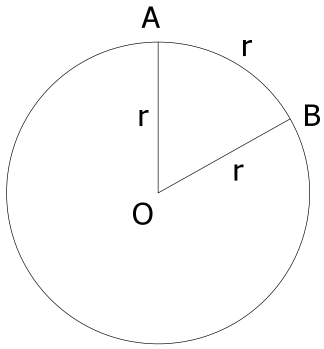
$= (38 + 0{,}4 + 0{,}005)^o = 38{,}405^o$

b. $47^o\ 27'\ 36'' = \left(47 + \dfrac{27}{60} + \dfrac{36}{3.600}\right)^o$

$= (47 + 0{,}45 + 0{,}01)^o = 47{,}46^o$

2). Pengubahan derajat ke radian atau sebaliknya

Pengukuran sudut berdasarkan ukuran radian didasarkan anggapan bahwa :
" satu radian = besarnya sudut pusat lingkaran yang dibatasi oleh busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari"



Gambar 4-2

Jika OA dan OB adalah jari-jari = r dan busur AB juga panjangnya r maka < AOB sebesar *1 radian.*
Kita sudah mengetahui bahwa : 1 putaran = 360^o
Dan keliling lingkaran : k = 2 π r maka berdasarkan rumus perbandingan pada lingkaran berlaku:

$$\frac{\angle AOB}{360^o} = \frac{\text{panjang busur AB}}{\text{keliling lingkaran}}$$

$$\frac{1 \text{ radian}}{360^o} = \frac{r}{2\pi r} \qquad \text{(kalikan silang diperoleh)}$$

2π radian = 360^o

π radian = $180^o \approx$ 3,14 radian = 180^o

1 radian $\approx 57{,}3^o$

Contoh 3

Ubahlah ukuran radian di bawah ini ke dalam derajat :

a. 2 radian   b. 1,5 radian   c. $\frac{1}{2}\pi$ radian

Jawab:

a. 2 radian = 2 x 57,3 ^{o} = 114,6 ^{o}

b. 1,5 radian = 1,5 x 57,3 ^{o} = 85,95 ^{o}

c. $\frac{1}{2}\pi$ radian $= \frac{1}{2}$ x $180^o = 90^o$

Contoh 4

Ubahlah ukuran derajat ini kedalam radian:

a. $40{,}3^o$ b. 30^o c. 120^o

Jawab:

a. $40{,}3^o = \dfrac{40{,}3}{57{,}3}$ radian = 0,703 radian

b. $30^o = \dfrac{30}{57{,}3}$ radian = 0,524 radian atau $30^o = 30 \times \dfrac{\pi}{180}$ radian $= \dfrac{1}{6}\pi$ radian

c. $120^o = 120 \times \dfrac{\pi}{180}$ radian $= \dfrac{2}{3}\pi$ radian

c. Rangkuman

1. Sudut adalah daerah yang dibatasi oleh dua ruas garis dan titik

2. Untuk menentukan besarnya suatu sudut biasanya dinyatakan dengan derajat atau radian. Ukuran sudut dalam derajat yang lebih kecil dapat dinyatakan dalam menit (') dan detik("), 1 derajat = 60 menit dan 1 menit = 60 detik

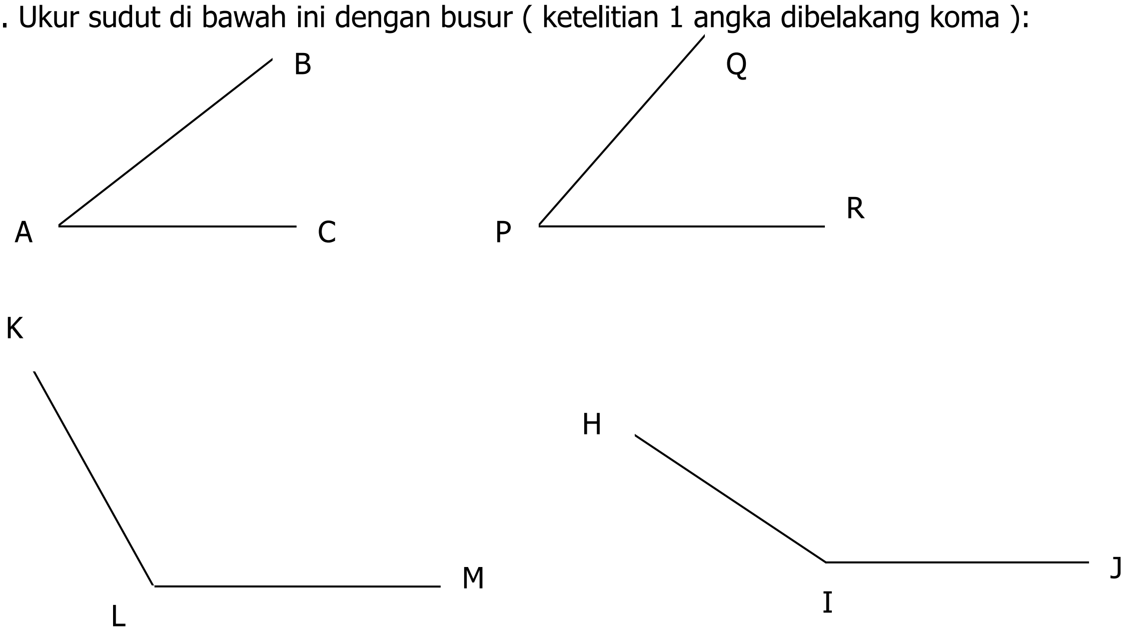
3. Secara garis besar, besarnya suatu sudut terbagi menjadi tiga bagian, yaitu:
   a. Sudut lancip yaitu sudut yang besarnya kurang dari 90^o.
   b. Sudut siku-siku yaitu sudut yang besarnya 90^o
   c. Sudut tumpul yaitu sudut yang besarnya lebih dari 90^o

4. satu radian = besarnya sudut pusat lingkaran yang dibatasi oleh busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari”

5. 1 putaran = 360^o
   π radian = 180^o
   1 radian ≈ $57{,}3^o$

LATIHAN 1

1. Ukur sudut di bawah ini dengan busur (ketelitian 1 angka dibelakang koma):



2. Ubah ukuran sudut ini ke dalam derajat, menit dan detik:

a. $25{,}44^o$	e. $145{,}48^o$
b. $45{,}8^o$	f. $23{,}22^o$
c. $125{,}32^o$	g. $185{,}42^o$
d. $18{,}18^o$	h. $128{,}09^o$

3. Ubahlah ukuran sudut di bawah ini menjadi derajat saja:

a. $56^o\, 6'\, 9''$	c. $122^o\, 15'\, 27''$	e. $125^o\, 42'\, 18''$	g. $58^o\, 39'\, 36''$
b. $13^o\, 51'\, 18''$	d. $22^o\, 12'\, 54''$	f. $125^o\, 30'\, 9''$	h. $151^o\, 21'\, 36''$

4. Ubahlah ukuran derajat ini ke radian:

a. 50^o	c. 105^o	e. 225^o	g. 45^o
b. 150^o	d. $23{,}7^o$	f. 315^o	h. 15^o

5. Ubahlah ukuran radian ini ke derajat?

a. 2,3 radian	b. $\frac{3}{4}$ radian	c. $\frac{3}{4}\pi$ radian	d. $1\frac{1}{3}\pi$ radian
a. 1,1 radian	b. 0,4 radian	c. $0{,}4\,\pi$ radian	d. $^5/_3\,\pi$ radian

6. Mana yang termasuk sudut tumpul, lancip maupun siku-siku?

a. 123^o	b. $\frac{1}{2}\pi$ radian	c. 1 radian	d. $22^o\, 12'\, 54''$

B.2 Keliling Bangun Datar dan Luas Daerah Bangun Datar

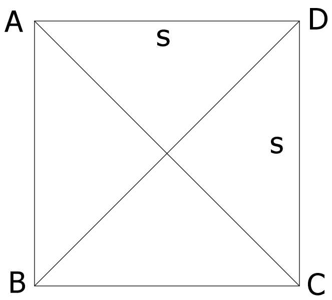
a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menghitung keliling dan luas bidang datar sesuai dengan rumusnya
- Menghitung luas bangun datar
- Menjelaskan sifat-sifat bangun datar
- Menyelesaikan masalah program keahlian yang berkaitan dengan luas dan keliling bangun datar

b. Uraian Materi

1). Persegi



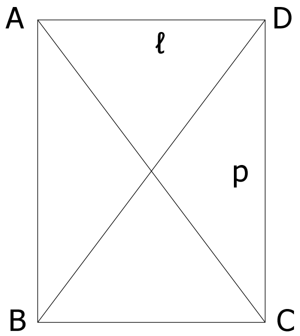
Gambar 4-3

Sifat-sifat :

- Keempat sisinya sama panjang
  AB = BC = CD = DA
- Keempat sudutnya siku-siku
  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$
- Kedua diagonalnya sama panjang dan saling berpotongan tegak lurus di tengah-tengahnya.
  AC = BD (diagonal)
- Memiliki empat sumbu simetri

Luas Persegi = s^2
Keliling persegi = 4s

2). Persegi Panjang



Gambar 4-4

Sifat-sifat :

- Sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang
- Keempat sudutnya siku-siku
  $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$
- Kedua diagonalnya sama panjang .
  AC = BD (diagonal)
- Memiliki dua sumbu simetri

Luas Persegi panjang : $L = \ell \times p$
Keliling persegi panjang: $K = 2(p + \ell)$

Contoh 5

Keliling suatu persegi adalah 56 cm, tentukan luasnya?

Jawab:

$K = 4s$
$56 = 4s$
$s = 56 : 4 = 14$ cm

Luas = s x s
= 14 cm x 14 cm
= 196 cm^2

Contoh 6

Panjang suatu persegi panjang 2 lebihnya dari lebarnya. Jika luas persegi panjang tersebut 48 cm^2. Tentukan kelilingnya?

Jawab:

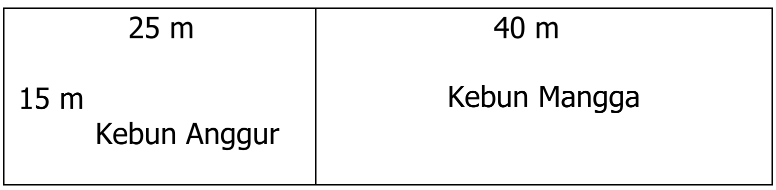
Misalkan : $\ell = x$
$p = x + 2$
$L = p \times \ell$
$48 = (x + 2).x$
$48 = x^2 + 2x$
$0 = x^2 + 2x - 48$
$0 = (x + 8)(x - 6)$
$x = -8$ (tidak memenuhi)
$x = \ell = 6$ cm

$p = 6 + 2 = 8$ cm

Keliling(K) = $2p + 2\ell$
= 16 cm + 12 cm
= 28 cm

Contoh 7

Pak Ahmad memiliki dua kebun yang saling berdampingan dengan denah seperti gambar dibawah ini:



Jika semua kebun akan dipagari bambu dengan biaya Rp2.000,00/m. Tentukan biaya total yang dikeluarkan Pak Ahmad?

Jawab:

Keliling persegi panjang = $2p + 2\ell$

= (2 x 25 + 2 x 15)m + (2 x 40 + 2 x 15) m – 15 m

(dua persegi panjang dengan satu sisi perimpit)

= 175 m

Biaya total yang dikeluarkan Pak Ahmad = 175 x Rp2.000,00 = Rp350.000,00

Contoh 8

Bimo membeli rumah di "IDAMAN ESTATE" dengan ukuran tanahnya 12 m x 8 m dan luas bangunannya 65 m^2. Jika harga tanah tersebut Rp450.000,00/ m^2 dan harga bangunan Rp1.500.000,00 / m^2. Tentukan harga total yang harus di bayar Bimo?

Jawab:

Luas tanah = 12 m x 8 m = 98 m^2

Harga tanah = Rp450.000,00 / m^2 x 98 m^2= Rp44.100.000,00

Harga bangunan = Rp1.500.000,00 / m^2 x 65 m^2 = Rp97.500.000,00

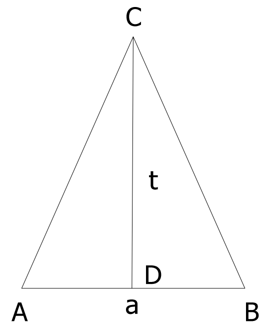
Jadi harga total yang di bayar Bimo adalah = Rp44.100.000,00 + Rp97.500.000,00

= Rp141.600.000,00

3). Segitiga

Macam-macam segitiga:

- Segitiga siku-siku (salah satu sudutnya 90^0)
- Segitiga sama kaki (kedua sisinya sama panjang)
- Segitiga sama sisi (ketiga sisinya sama panjang)
- Segitiga lancip (segitiga yang ketiga sudutnya lancip, $\alpha < 90^0$)
- Segitiga tumpul (segitiga yang salah satu sudutnya sudut tumpul, $\alpha > 90^0$)
-



Gambar 4-5

AB = alas segitiga

CD = tinggi segitiga

AC = BC = sisi miring

Luas segitiga = $\dfrac{a \times t}{2}$

Keliling segitiga = AC + CB + BA

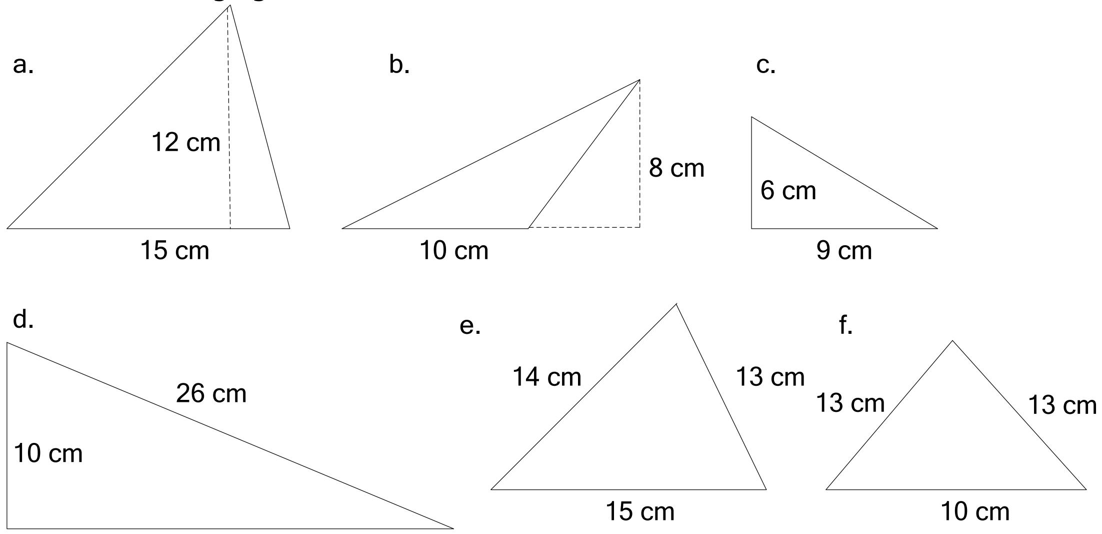
Luas segitiga sembarang jika diketahui panjang ketiga sisinya a, b dan c :

$$L = \sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Dengan s = $\frac{1}{2}$ keliling segitiga = $\frac{1}{2}$ (a + b + c)

Contoh 9

Tentukan luas segitiga di bawah ini:



Jawab:

a. Luas = $\frac{1}{2}$ panjang alas x tinggi

$= \frac{1}{2} 15 \text{ cm x } 12 \text{ cm} = 90 \text{ cm}^2$

b. Luas = $\frac{1}{2}$ panjang alas x tinggi

$= \frac{1}{2} 10 \text{ cm x } 8 \text{ cm} = 40 \text{ cm}^2$

c. Luas = $\frac{1}{2}$ panjang alas x tinggi = $\frac{1}{2}$ 9 cm x 6 cm = 27 cm^2

d. Panjang alas = $\sqrt{26^2 - 10^2}$ (ingat rumus pytagoras)

$= \sqrt{676 - 100} = 24 \text{ cm}$

Luas = $\frac{1}{2}$ panjang alas x tinggi

$= \frac{1}{2} 24 \text{ cm x } 10 \text{ cm} = 120 \text{ cm}^2$

e. Segitiga sembarang dengan a = 15 cm, b = 14 cm dan c = 13 cm

maka s = $\frac{1}{2}$ (a + b + c) = $\frac{1}{2}$(15 + 14 + 13) cm = 21 cm

Luas = $\sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21.\,(21-15)(21-14)(21-13)} \text{ cm}^2$

$= \sqrt{21.\,6.7.8} \text{ cm}^2$

$= \sqrt{3.7.\,2.3.7.2^3}$ cm^2

$= 3.7.2.2$ cm^2 $= 84$ cm^2

f. Segitiga samakaki dengan a = 13 cm, b = 13 cm dan c = 10 cm

maka $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(13 + 13 + 10)$ cm = 18 cm

Luas $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{18.\,(18-10)(18-13)(18-13)}$ cm^2 =

$= \sqrt{18.\,8.5.5}$ cm^2 $= 60$ cm^2

Untuk segitiga sama sisi, dengan menggunakan aturan sinus untuk luas segitiga (lihat bab 1), maka luasnya adalah:

$$\text{luas} = \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$$

Contoh 10

Tentukan luas dari segitiga sama sisi yang memiliki sisi :

a. 10 cm

b. $6\sqrt{3}$ cm

Jawab:

a. luas $= \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$

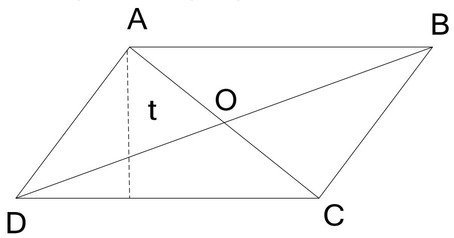
$= \frac{1}{4}.10^2\sqrt{3}$ cm^2 $= 25\sqrt{3}$ cm^2

b. luas $= \frac{1}{4}s^2\sqrt{3}$

$= \frac{1}{4}.\,(6\sqrt{3})^2.\sqrt{3}$ cm^2

$= \frac{1}{4}.108.\,\sqrt{3}$ cm^2 $= 27\sqrt{3}$ cm^2

4). Jajar Genjang



Gambar 4-6

Sifat-sifat :

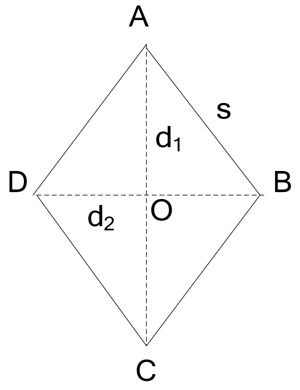
- Sisi-sisi yang berhadapan sejajar dan sama panjang
- Sudut-sudut yang berhadapan sama besar $\angle D = \angle B$ dan $\angle C = \angle A$
- Memiliki dua diagonal yang saling membagi dua sama panjang. AO = OC dan BO = OD

Luas Jajar Genjang: L = alas x tinggi

= DC x t

Keliling: K = 2(AB + BC)

5). Belah Ketupat



Gambar 4-7

Sifat-sifat :

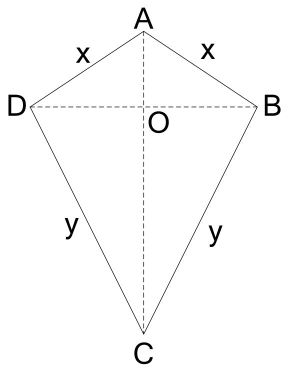
- Keempat sisinya sama panjang
- Sudut-sudut yang berhadapan sama besar
  $\angle D = \angle B$ dan $\angle C = \angle A$
- Memiliki dua diagonal yang saling membagi dua sama panjang.
  AO = OC dan BO = OD
- Kedua diagonal berpotongan saling tegak lurus

Luas Belah Ketupat: $L = \frac{1}{2}\ AC \times BD$

$= \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2$

Keliling: $K = 4 \times s$

6). Layang-layang



Gambar 4-8

Sifat-sifat :

- Sisi-sisi yang berdekatan sama panjang
  AD = AB dan DC = BC
- Kedua diagonalnya berpotongan saling tegak lurus
- DO = OB dan $\angle ADC = \angle ABC$

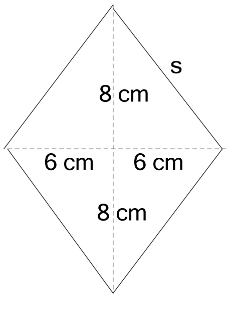
Luas Layang-layang: $L = \frac{1}{2}\ AC \times BD$

Keliling: $K = 2x + 2y$

Contoh 11

Tentukan luas dan kelilingnya dari suatu belah ketupat dengan panjang diagonal masing-masing 12 cm dan 16 cm

Jawab:



$s = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm

Luas $= \frac{1}{2}\ d_1 \times d_2$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 16\ cm^2 = 96\ cm^2$

Keliling $= 4 \times s$

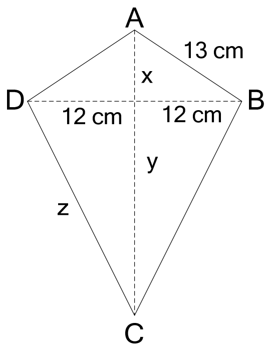
$= 4 \times 10$ cm $= 40$ cm

Contoh 12

Suatu layang-layang memiliki panjang diagonal masing-masing 24 cm dan 21 cm , diagonal yang terbagi sama panjang adalah diagonal 24 cm. Jika panjang salah satu sisinya 13 cm, tentukan luas dan kelilingnya.

Jawab:

Lihat gambar:



$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$ cm

y = 21 cm – 5 cm = 16 cm

$z = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{256 + 144} = 20$ cm

Luas $= \frac{1}{2}$. diagonal 1 x diagonal 2

$= \frac{1}{2} \cdot 24 \times 21 \text{ cm}^2 = 252 \text{ cm}^2$

Keliling = (13 + 13 + 20 + 20) cm = 66 cm

Contoh 13

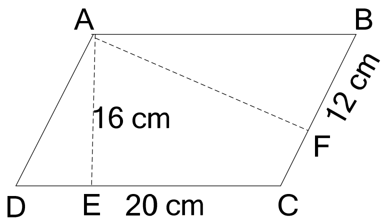
Suatu jajargenjang memiliki panjang alas 25 cm dan tinggi 10 cm, tentukan luasnya.

Jawab:

Luas = panjang alas x tinggi
= 25 cm x 10 cm
= 250 cm^2

Contoh 14

4. Lihat gambar jajaran genjang di bawah ini:



Jika AE $\perp$ DC dan AF $\perp$ BC
AE = 16 cm DC = 20 cm BC 12 cm, tentukan:
a. Luas bangun di samping
b. Panjang AF

Jawab:

a. Luas = panjang alas x tinggi (alasnya dianggap CD)
= 20 cm x 16 cm = 320 cm^2

b. Luas = panjang alas x tinggi (alasnya dianggap BC)
320 cm^2 = 12 cm x AF

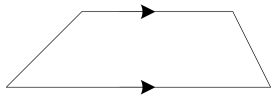
$AF = \frac{320}{12}$

$= 26\frac{2}{3}$ cm

7). Trapesium

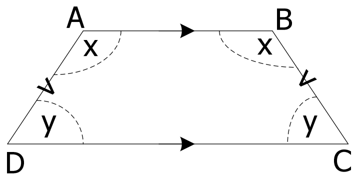
Macam-macam trapezium

a. Trapesium sembarang hanya memiliki sepasang sisi yang saling sejajar



Gambar 4-9

b. Trapesium sama kaki

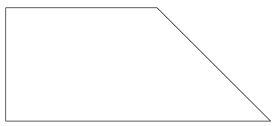


Gambar 4-10

Sifatnya:

- Mempunyai satu pasang sisi sejajar
- Mempunyai satu pasang sisi sama panjang (kaki travesium AD = BC)
- Mempunyai dua pasang sudut sama besar $\angle A = \angle B = x$ dan $\angle D = \angle C = y$

c. Trapesium siku-siku adalah trapesium yang dua sudutnya siku-siku



Luas Trapesium: L = $\frac{1}{2}$(Jumlah sisi-sisi sejajar) x tinggi

Keliling Trapesium: K = Jumlah panjang keempat sisinya

Contoh 15

Tentukan luas trapesium yang memiliki panjang sisi-sisi sejajar masing-masing 12 cm dan 18 cm dan tingginya 10 cm.

Jawab:

Luas Trapesium = $\frac{1}{2}$ (Jumlah sisi-sisi sejajar) x tinggi

$= \frac{1}{2}$ (12 + 18) x 10 cm^2

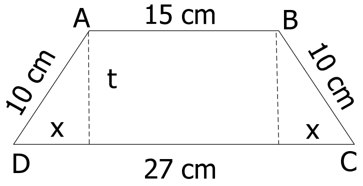
= 15 x 10 cm^2

= 150 cm^2

Contoh 16

Trapesium sama kaki dengan panjang kakinya 10 cm dan panjang sisi-sisi sejajar masing-masing 15 cm dan 27 cm. Tentukanlah luas dan kelilingnya.

Jawab:



Dari gambar,

$2x + 15 = 27 \Leftrightarrow x = 6$ cm

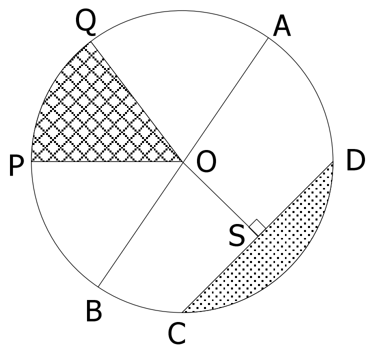
$t = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ cm

$$\text{Luas Trapesium} = \frac{1}{2}\ (\text{Jumlah sisi-sisi sejajar})\ \text{x tinggi}$$
$$= \frac{1}{2}\ (15 + 27)\ \text{x}\ 8\ \text{cm}^2$$
$$= 21 \text{ x } 8 \text{ cm}^2$$
$$= 168 \text{ cm}^2$$

Keliling trapesium = (10 + 15 + 10 + 27) cm = 62 cm

8). Lingkaran

Lihat gambar di bawah ini:



Gambar 4-11

Keterangan:
- O adalah titik pusat lingkaran
- OA = OB adalah jari-jari lingkaran
- AB adalah diameter
- Garis lengkung CD adalah busur lingkaran
- CD adalah tali busur lingkaran
- Arsiran POQ adalah juring lingkaran
- Arsiran CSD adalah tembereng lingkaran
- OS adalah apotema

Luas lingkaran: $L = \pi r^2$
Keliling lingkaran: $K = 2 \pi r$
Panjang busur = $\frac{\alpha}{360} \text{ x } 2 \pi r$
Luas Juring = $\frac{\alpha}{360} \text{ x } \pi r^2$
Keliling juring = panjang busur + 2r
α = besar sudut pusat lingkaran

Contoh 17

Tentukan luas daerah dan keliling lingkaran berikut:

a. jari-jarinya = 10 cm b. diameternya = 56 cm

Jawab:

a. Luas lingkaran $= \pi r^2$
$= 3{,}14 \text{ x } 10^2 \text{ cm}^2$ (r tidak bulat di bagi 7 jadi nilai $\pi = 3{,}14$)
$= 314 \text{ cm}^2$

Keliling lingkaran $= 2\pi r$
$= 2 \text{ x } 3{,}14 \text{ x } 10 \text{ cm} = 62{,}8$ cm

b. Diameter = 56 cm, maka jari-jarinya = 28 cm

Luas lingkaran = πr^2

$= \frac{22}{7} \times 28^2 \text{ cm}^2$ (r bulat di bagi 7 jadi nilai $\pi = \frac{22}{7}$)

$= \frac{22}{7} \times 784 \text{ cm}^2 = 2464 \text{ cm}^2$

Keliling lingkaran = $2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 28 \text{ cm} = 176 \text{ cm}$

Contoh 17

Tentukan luas juring lingkaran dan kelilingnya yang berdiameter 112 cm dan bersudut pusat 120°

Jawab:

Diameter = 112 cm maka r = 56 cm

Luas juring lingkaran $= \frac{\alpha}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times 56^2 \text{ cm}^2$

$= 3.285\frac{1}{3} \text{ cm}^2$

Keliling juring lingkaran = panjang busur + 2r

$= \frac{\alpha}{360} \times 2\pi r + 2r$

$= \frac{120}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 56 + (2 \times 56) \text{ cm}$

$= (117\frac{1}{3} + 112) \text{ cm}$

$= 229\frac{1}{3} \text{ cm}$

Contoh 18

Suatu juring yang bersudut pusat 45° memiliki luas 40 cm^2, tentukan luas lingkarannya.

Jawab:

(ingat ??? Perbandingan sudut pusat dan luas juring pada kelas III SMP)

$$\frac{\text{Luas juring}}{\text{sudut pusat}} = \frac{\text{Luas lingkaran}}{360}$$

$$\frac{40 \text{ cm}^2}{45} = \frac{\text{Luas lingkaran}}{360}$$

$$\text{Luas lingkaran} = \frac{40 \text{ cm}^2 \times 360}{45}$$

$$= 320 \text{ cm}^2$$

Contoh 19

Suatu roda sepeda memiliki diameter 60 cm dan melintasi jalan sebanyak 500 putaran, tentukan jarak yang telah di tempuh sepeda tersebut.

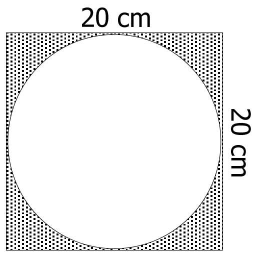
Jawab:

Keliling roda sepeda = π x diameter roda
= 3,14 x 60 cm
= 188,4 cm

Jarak yang telah di tempuh roda sepeda = 188,4 cm x 500
= 94.200 cm
= 942 m

Contoh 20

Tentukan luas daerah yang di arsir pada gambar di bawah ini:

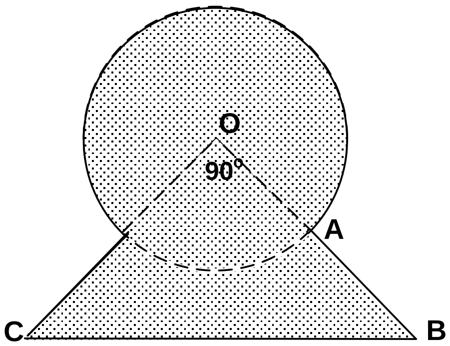


Jawab:

Luas yang diarsir = Luas Persegi – Luas lingkaran
= $(20^2 - 3{,}14 \times 10^2)$ cm^2
= $(400 - 314)$ cm^2 = 84 cm^2

Contoh 21

Tentukan luas daerah dan keliling dari daerah yang diarsir di bawah ini, jika diketahui OA = AB = 14 cm, Δ COB siku-siku sama kaki dan $\pi = \dfrac{22}{7}$



$$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2}$$
$$= \sqrt{28^2 + 28^2} = 28\sqrt{2} \text{ cm}$$

Jawab:

Luas daerah = Luas $\frac{3}{4}$ lingkaran + Luas segitiga siku-siku

$$= \left(\frac{3}{4} \times \pi \times r^2 + \frac{1}{2} \times OB \times OC\right) \text{cm}^2$$

$$= \left(\frac{3}{4} \times \frac{22}{7} \times 14^2 + \frac{1}{2} \times 28 \times 28\right) \text{cm}^2$$

$$= (462 + 392) \text{ cm}^2$$

$$= 884 \text{ cm}^2$$

Keliling $= \text{keliling } \frac{3}{4} \text{ lingkaran} + 2AB + BC$

$= \frac{3}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 14 + 2 \times 14 + 28\sqrt{2}$) cm

$= (94 + 28\sqrt{2})$ cm

c. Rangkuman

1. Persegi : Luas = sisi x sisi
   Keliling = 4 x sisi

2. Persegi Panjang : Luas = panjang x lebar
   Keliling = 2(panjang + lebar)

3. Segitiga : Luas = ½ x alas x tinggi

   Keliling = $s_1 + si_2 + s_3$

   Segitiga sembarang : Luas = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

   dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

   Segitiga sama sisi : Luas = $\frac{1}{4} s^2 \sqrt{3}$

4. Jajaran Genjang : Luas = alas x tinggi
   Keliling = 2 x ($sisi_1$+ $sisi_2$)

5. Belah Ketupat : Luas = $\frac{1}{2}$ (diagonal pertama x diagonal kedua)
   Keliling = 4x sisi

6. Layang-layang : Luas = $\frac{1}{2}$ (diagonal pertama x diagonal kedua)
   Keliling = 2 x ($sisi_1$+ $sisi_2$)

7. Trapesium : Luas = $\frac{1}{2}$ (Jumlah sisi sejajar x tinggi)
   Keliling = $sisi_1 + sisi_2 + sisi_3 + sisi_4$

8. Lingkaran
   Luas lingkaran = πr^2
   Keliling = $2 \pi r$
   Panjang busur = $\frac{\alpha}{360} \times 2 \pi r$
   Luas Juring = $\frac{\alpha}{360} \times \pi r^2$
   Keliling juring = panjang busur + 2r dengan α = besar sudut pusat lingkaran

LATIHAN 2

1. Keliling suatu persegi adalah 104 cm, tentukan luasnya

2. Panjang suatu persegi panjang 4 lebihnya dari lebarnya. Jika luas persegi panjang tersebut 45 cm^2. Tentukan kelilingnya

3. Tentukan luas dan kelilingnya dari suatu belah ketupat dengan panjang diagonal masing-masing 40 cm dan 42 cm.

4. Suatu layang-layang memiliki panjang diagonal masing-masing 23 cm dan 16cm , diagonal yang terbagi sama panjang adalah diagonal 16 cm. Jika panjang salah satu sisinya 17 cm, tentukan luas dan kelilingnya.

5. Tentukanlah luas trapesium yang memiliki panjang sisi-sisi sejajar masing-masing 20 cm dan 15 cm dan tingginya 12 cm.

6. Trapesium sama kaki dengan panjang sisi-sisi sejajar masing-masing 25 cm dan 65 cm dan panjang kakinya 29 cm . Tentukanlah luas dan kelilingnya.

7. Trapesium siku-siku dengan panjang sisi siku-sikunya 15 cm dan panjang sisi-sisi sejajarnya masing-masing 25 cm dan 33 cm, tentukanlah luas dan kelilingnya

8. Tentukan luas daerah dan keliling lingkaran yang berjari-jari :
   a. 20 cm b. 14 cm

9. Tentukanlah luas daerah dan keliling lingkaran yang berdiameter 5,6 dm

10. Sebuah lingkaran berjari-jari 10 cm. Hitunglah keliling untuk seperempat lingkaran tersebut!

11. Tentukan luas juring lingkaran dan kelilingnya yang berdiameter 56 cm dan bersudut pusat 150^o

12. Suatu juring bersudut pusat 30^o memiliki luas 24cm^2, tentukan luas lingkarannya.

13. Suatu juring memiliki panjang busur 31,4 cm. Jika jari-jarinya 50 cm. tentukanlah besar sudut pusat juring tersebut.

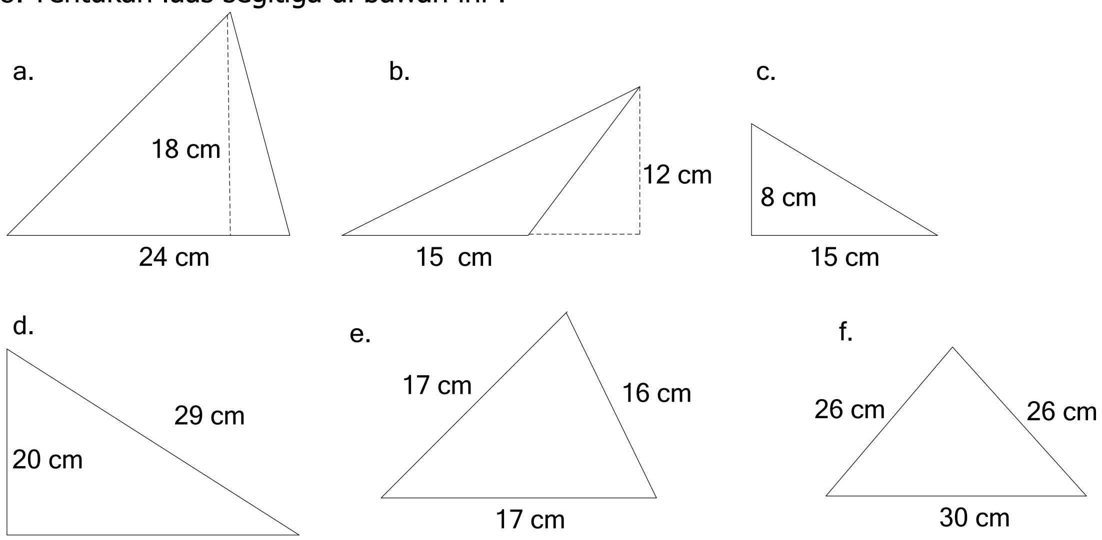
14. Tentukan luas dari segitiga sama sisi yang memiliki sisi :
    a. 50 cm b. $2\sqrt{5}$ cm

15. Sebuah kolam berbentuk persegi panjang memiliki ketentuan ukuran panjang kolam sama dengan dua kali lebarnya. Jika luas kolam 72 m^2,tentukan lebar dan panjang kolam tersebut!

16. Diketahui sebidang tanah berbentuk persegi panjang dengan panjang 80 m dan lebar 25 m. 0,25 bagian tanah tersebut ditanami pohon salak, 0,5 bagian ditanami pohon kelapa, dan sisanya ditanami pohon jagung. Berapakah luas area yang ditanami pohon jagung ?

17. Trapesium sama kaki dengan panjang sisi-sisi sejajar masing-masing 25 cm dan 55 cm dan panjang kakinya 17 cm . Tentukanlah luas dan kelilingnya.

18. Tentukan luas segitiga di bawah ini :



Tentukan luas dan kelilingnya dari suatu belah ketupat dengan panjang diagonal masing-masing 80 cm dan 84 cm.

17. Suatu juring yang bersudut pusat 75^o memiliki luas 30 cm^2, tentukanlah luas lingkarannya

18. Suatu persegi panjang dengan perbandingan panjang dan lebarnya 2 : 3. Jika kelilingnya 40 m, tentukanlah luasnya.

19. Dalam suatu lingkaran yang berdiameter 50 cm terdapat layang-layang dengan titik-titik sudutnya pada keliling lingkaran. Jika salah satu diagonalnya melalui pusat lingkaran dan diagonal lainnya dengan panjang 30 cm, tentukan luas daerah diluar layang-layang dan di dalam lingkaran.

20. Tentukan luas Δ sama kaki dengan panjang kaki 29 cm dan panjang alas 42 cm.

21. Tentukanlah luas daerah tembereng dari suatu juring lingkaran dengan sudut pusat 90^o dengan jari-jari 21 cm.

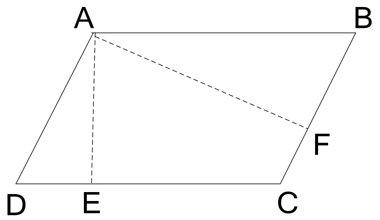
22. Pak Amir mempunyai sebidang tanah berbentuk persegi dengan luas 484 m^2. Jika tanah akan di pagari kawat berduri dengan biaya Rp.15.000,- per meter, tentukanlah biaya total yang diperlukan Pak Amir untuk memagari tanah tersebut.

23. Neni membeli rumah di "TAMAN PALEM" dengan ukuran tanahnya 25 m x 10 m dan luas bangunan 160 m^2. Jika harga tanah tersebut Rp1.500.000/ m^2 dan harga bangunan Rp2.500.000 / m^2. Tentukan harga total yang harus di bayar Neni?

24. Suatu roda sepeda memiliki diameter 112 cm dan melintasi jalan sebanyak 250 putaran, tentukan jarak yang telah di tempuh sepeda tersebut.

25. Sebuah papan dengan ukuran panjang 180 cm dan lebar 160 cm akan dipotong dengan ukuran panjang 140 cm dan lebar 110 cm. Berapa luas papan yang tersisa?

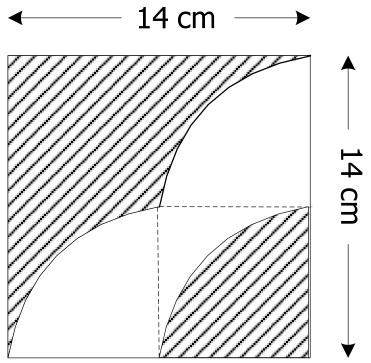
26. Lihat gambar jajaran genjang di bawah ini:



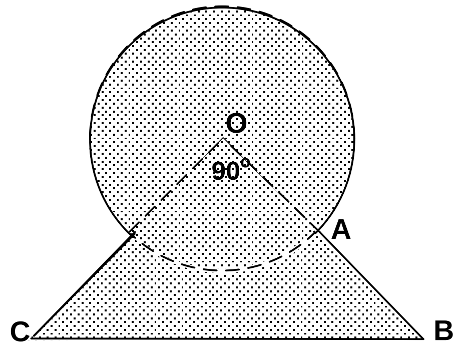
Jika AE $\perp$ DC dan AF $\perp$ BC
AE = 18 cm DC = 24 cm BC 15 cm, tentukan:
a. Luas bangun di samping
b. Panjang AF

27. Tentukan luas daerah dan keliling dari daerah yang diarsir di bawah ini:

a.



b.



Diketahui OA = AB = 20 cm dan Δ COB siku-siku sama kaki. Jika π = 3,14

B.3 Transformasi Bangun Datar

a. Tujuan

Setelah mempelajari uraian kompetensi dasar ini, anda dapat:

- Menentukan koordinat bayangan dari translasi
- Menentukan koordinat bayangan dari jenis-jenis refleksi
- Menentukan koordinat bayangan dari jenis-jenis rotasi
- Menentukan koordinat bayangan dari jenis-jenis dilatasi
- Menentukan matriks yang bersesuaian dari jenis-jenis transformasi
- Menentukan koordinat bayangan dari komposisi transformasi

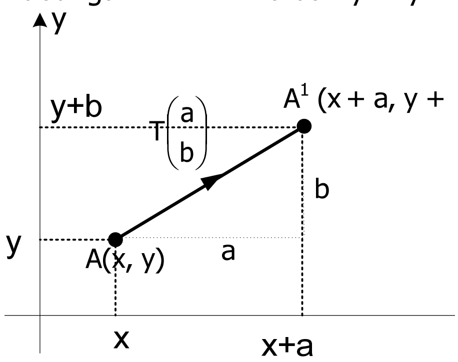
b. Uraian Materi

Dalam pelajaran matematika SLTP, telah dipelajari beberapa jenis transformasi, diantaranya adalah pergeseran (translasi), pencerminan (refleksi), perputaran (rotasi) dan perkalian (dilatasi). Dalam pembahasan Transformasi geometri kali ini, dibahas transformasi geometri yang dinyatakan dalam bentuk matriks.

1). Translasi (Pergeseran)

Pergeseran atau translasi adalah suatu transformasi yang memindahkan tiap titik pada bidang dengan jarak dan arah tertentu. Jarak dan arah tertentu dapat diwakili oleh ruas garis berarah atau suatu pasangan bilangan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Jika translasi T = $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan titik P(x, y) ke titik P′ (x′, y′), maka berlaku hubungan: x′ = x + a dan y′ = y + b.



Gambar 4-12

Hubungan dapat dituliskan dalam bentuk:

$$P(x,\ y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'\ (x + a,\ \ y + b)$$

Contoh 22

Tentukan hasil translasi dari titik A(-1, 4) dan B(-5, 1), jika ditranslasikan oleh T= $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$!

Jawab:

$$A(x,\ y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'\ (x + a,\ \ y + b)$$

$$A(-1,\ 4) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}} A'\ (-1 + 3,\ \ 4 - 2) = A'\ (2,\ 2)$$

$$B(x,\ y) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} B'\ (x + a,\ \ y + b)$$

$$B(-5,\ 1) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}} B'\ (-5 + 3,\ \ 1 - 2) = B'\ (-2,\ -1)$$

Contoh 23

Translasi T=$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$memetakan titik P(-1, 3) ketitik P′(4, -2).

a. Tentukan a dan b
b. Tentukan hasil translasi titik-titik K(-2, 3) dan L(0, -5) akibat translasi T di atas.

Jawab:

a. $P(-1, 3) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} P'(-1 + a,\ 3 + b) = P'(4, -2)$

$-1 + a = 4 \Rightarrow a = 5$

$3 + b = -2 \Rightarrow b = -5$

b. $K(-2, 3) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}} K'(-2 + 5,\ 3 - 5) = K'(3, -2)$

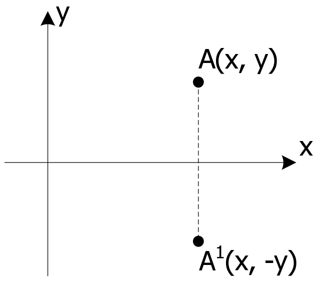
$L(0, -5) \xrightarrow{T\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}} L'(0 + 5,\ -5 - 5) = L'(5, -10)$

2). Refleksi (Pencerminan)

Pencerminan atau refleksi adalah suatu trasformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan cermin.

a). Pencerminan terhadap sumbu x

Titik A(x, y) dicerminkan terhadap sumbu x, bayangan yang diperoleh adalah $A'(x', y') = (x, -y)$ seperti terlihat pada **gambar 4-13** di bawah ini:



Gambar 4-13

Matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap sumbu x adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x' &= x = 1x + 0y \\ y' &= -y = 0x - 1y \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dari persamaan matriks di atas, diperoleh matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap sumbu x adalah: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Contoh 24

Tentukan bayangan dari segitiga ABC dengan A(3, -1), B(-4, -1) dan C(5, 4) setelah dicerminkan terhadap sumbu x !

Jawab:

Dengan menggunakan perkalian matriks, diperoleh

$$\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix}$$

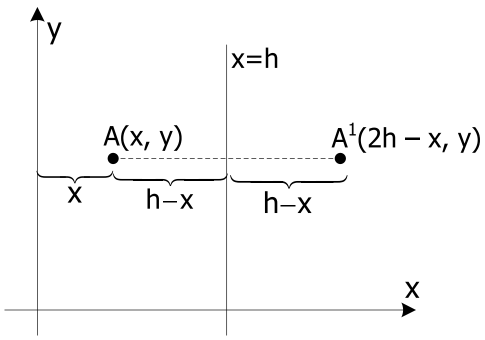
$$\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

jadi A'(3, 1), B'(-4, 1) dan C'(5, 4)

b). Pencerminan terhadap garis x = h

Titik A(x, y) dicerminkan terhadap garis x = h, bayangan yang diperoleh adalah A' (2h – x , y) seperti terlihat pada **gambar 4-14** di bawah ini:



Gambar 4-14

Koordinat A' dari gambar di samping adalah:
A' (x + h – x + h – x , y)
A' (2h – x, y)

Contoh 25
Tentukan bayangan titik A(2, -5) setelah dicerminkan terhadap garis x = -4 !

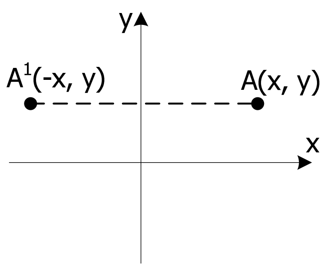
Jawab:

$A(x, y) \xrightarrow{x=h} A'(2h - x, y)$

$A(2, -5) \xrightarrow{x=-4} A'(2.-4 - 2, -5) = A'(-10, -5)$

c). Pencerminan terhadap sumbu y

Titik A (x, y) dicerminkan terhadap sumbu y, bayangan yang diperoleh adalah A'(x' , y') = (-x, y) seperti terlihat pada **gambar 4-15** di bawah ini:



Gambar 4-15

Matriks yang bersesuaian dari pencerminan terhadap sumbu y adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x' &= -x = -1x + 0y \\ y' &= \ \ y = \ \ 0x + 1y \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dari persamaan matriks di atas, diperoleh matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap sumbu y adalah: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Contoh 26
Setelah dicerminkan oleh sumbu y diperoleh bayangan P'(-1, 4) dan Q'(2, -4). Tentukan koordinat P dan Q !

Jawab:
Dengan menggunakan perkalian matriks, diperoleh

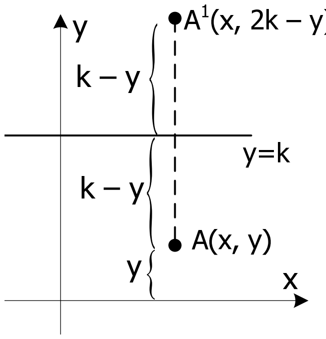
$$\begin{pmatrix} x_P' & x_Q' \\ y_P' & y_Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P & x_Q \\ y_P & y_Q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P & x_Q \\ y_P & y_Q \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_P & -x_Q \\ y_P & y_Q \end{pmatrix}$, diperoleh: $x_p = 1$, $y_p = 4$, $x_Q = -2$ dan $y_Q = -4$

Sehingga titik-titik tersebut adalah P(1, 4) dan Q(-2, -4)

d). Pencerminan terhadap garis y = k



Gambar 4-16

Titik A(x,y) dicerminkan terhadap garis y = k, bayangan yang diperoleh adalah A′ (x, 2k – y) seperti terlihat pada **gambar 4-16** di samping ini.
Koordinat A′ dari gambar di di samping adalah:
A′ (x, y + k – y + k – y) = A′ (x, 2k – y)
Matriks yang bersesuaian dari pencerminan terhadap y = k tidak ada

Contoh 27
Bayangan titik A setelah dicerminkan terhadap sumbu y = -3 adalah titik A′(-3, 5). Tentukan koordinat A !

Jawab:

$A(x, y) \xrightarrow{y=k} A'(x, 2k - y)$

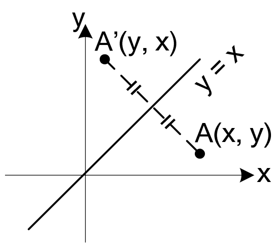
$A(x, y) \xrightarrow{y=-3} A'(x, -6 - y) = A'(-3, 5)$, sehingga diperoleh persamaan:

x = -3 dan -6 – y = 5
y = -11,

Sehingga koordinat A(-3, -11)

e). Pencerminan terhadap garis y = x

Titik A(x, y) dicerminkan terhadap sumbu y = x, bayangan yang diperoleh adalah A′(x′, y′) = (y, x) seperti terlihat pada **gambar 4-17** di bawah ini:



Gambar 4-17

Matriks yang bersesuaian dari pencerminan terhadap garis y = x adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x' &= y = 0x + 1y \\ y' &= x = 1x + 0y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dari persamaan matriks di atas, diperoleh matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap garis y = x adalah: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Contoh 28

Tentukan bayangan dari segitiga ABC dengan A(2, 0), B(-3, 1) dan C(0, 4) setelah dicerminkan oleh garis y = x

Jawab:

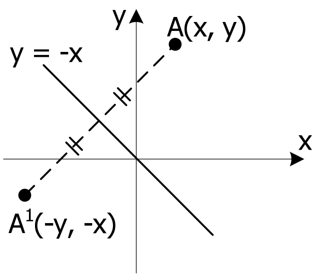
$$\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_A' & x_B' & x_C' \\ y_A' & y_B' & y_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$ jadi A′(0, 2), B′(1, -3) dan C′(4, 0)

f). Pencerminan terhadap garis y = -x

Titik A(x, y) dicerminkan terhadap sumbu y = -x, bayangan yang diperoleh adalah A′(x′ , y′) = (-y, -x) seperti terlihat pada **gambar 4-18** di bawah ini:



Gambar 4-18

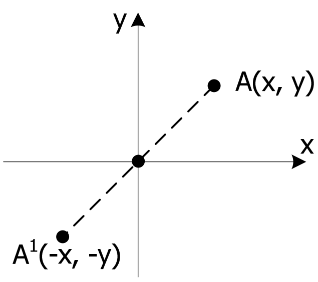
Matriks yang bersesuaian dari pencerminan terhadap garis y = -x adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x' &= -y = 0x - 1y \\ y' &= -x = -1x + 0y \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dari persamaan matriks di atas, diperoleh matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap garis y = -x adalah: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

g). Pencerminan terhadap titik pangkal

Titik A(x, y) dicerminkan terhadap titik pangkal O(0, 0), bayangan yang diperoleh adalah A′ (x′ , y′) = (-x, -y) seperti terlihat pada **gambar 4-19** di bawah ini:



Gambar 4-19

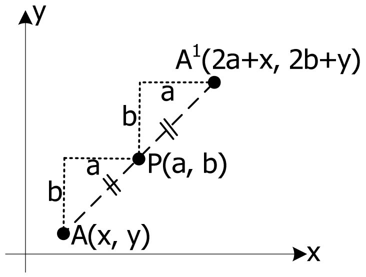
Matriks yang bersesuaian dari pencerminan terhadap titik pangkal O(0, 0) adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x' &= -x = -1x + 0y \\ y' &= -y = \ 0x - 1y \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Dari persamaan matriks di atas, diperoleh matriks yang bersesuaian dengan pencerminan terhadap titik pangkal O(0, 0) adalah: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

h). Pencerminan terhadap titik P(a, b)

Titik A(x, y) dicerminkan terhadap titik P (a, b), bayangan yang diperoleh adalah A′(x′, y′) = (2a + x, 2b + y) seperti terlihat pada **gambar 4-20** di bawah ini:



Gambar 4-20

Matriks yang bersesuaian terhadap pencerminan terhadap titik P(a, b) tidak ada

Contoh 29

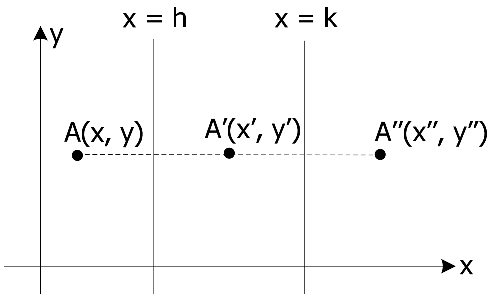
Tentukan bayangan dari titik K(2, -4) jika dicerminkan terhadap titik L(-3, 1) !

Jawab:

$K(2, -4) \xrightarrow{\text{cermin } L(a,b)} K'(2a + x, 2b + y)$

$K(2, -4) \xrightarrow{\text{cermin } L(-3,1)} K'(-6 + 2, 2 + (-4)) = K'(-4, -2)$

i). Pencerminan terhadap garis x = h dilanjutkan terhadap garis x = k



Gambar 4-21

Perhatikan **Gambar 4-21** di samping, dengan menggunakan rumus refleksi pada x = h diperoleh A′(2h – x, y). Dengan menggunakan prinsip yang sama jika A′(2h – x, y) di refleksikan terhadap x = k diperoleh:

A″(2k – (2h – x), y) = A″(2(k – h) + x, y)

Refleksi x = h dilanjutkan x = k ditulis dalam bentuk komposisi: (x = k) o (x = h)

Jadi $A(x, y) \xrightarrow{(x=k)\ o\ (x=h)} A''(\ 2(k - h) + x, y)$

Catatan:

Refleksi pada x = h dilanjutkan x = k tidak sama dengan refleksi pada x = k dilanjutkan x = h atau *(x = k) o (x = h) ≠ (x = h) o (x = k) (tidak komutatif)*

Contoh 30

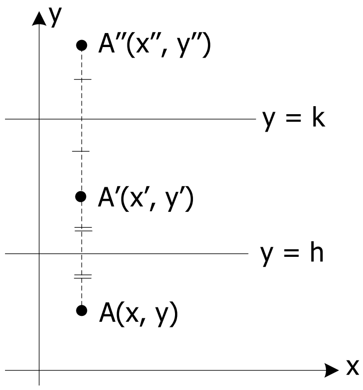
Tentukan bayangan titik A(-2, 5) jika direfleksikan pada x = -3 dilanjutkan pada x = 4

Jawab:

$A(x, y) \xrightarrow{(x=k)\ o\ (x=h)} A''(\ 2(k-h)+x,\ y)$

$A(-2, 5) \xrightarrow{(x=4)\ o\ (x=-3)} A''(\ 2(4-(-3))+(-2),\ 5) = A''(12, 5)$

j). Refleksi terhadap garis y = h dilanjutkan terhadap garis y = k



Gambar 4-22

Perhatikan **Gambar 4-22** di samping, dengan menggunakan rumus refleksi pada y = h diperoleh A′(x,2h–y). Dengan menggunakan prinsip yang sama jika A′(x, 2h – y) di refleksikan terhadap y = k diperoleh:

$A''(\ x,\ 2k-(2h-y)) = A''(\ x,\ 2(k-h)+y)$

Jika refleksi y=h dilanjutkan y=k ditulis: (y=k) o (y=h), maka *(y=k) o (y=h) ≠ (y=h) o (y=k) (tidak komutatif)*

Dari uraian di atas diperoleh:

$A(x, y) \xrightarrow{(y=k)\ o\ (y=h)} A''(\ x,\ 2(k-h)+y)$

Contoh 31

P(a, b) direfleksikan pada y = -3 dilanjutkan pada y = 4 diperoleh P″(-1, 3). Tentukan a dan b !

Jawab:

$P(x, y) \xrightarrow{(y=k)\ o\ (y=h)} P''(\ x,\ 2(k-h)+y)$

$P(x, y) \xrightarrow{(y=4)\ o\ (y=-3)} P''(-1, 3) = P''(\ x,\ 2(4-(-3))+y)$
$= P''(\ x,\ 14+y)$

Diperoleh x = -1 dan y = -11 sehingga P(-1, -11)

Contoh 32

P(2, 3) direfleksikan oleh y = 2 dilanjutkan y = k diperoleh P″(2, 17) Tentukan k

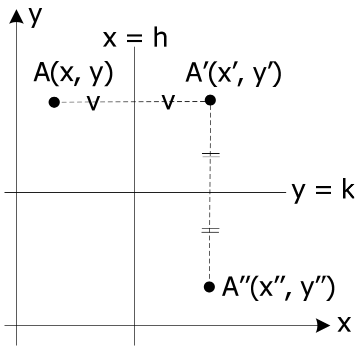
Jawab:

$P(x, y) \xrightarrow{(y=k)\ o\ (y=h)} P''(\ x,\ 2(k-h)+y)$

$P(2, 3) \xrightarrow{(y=k)\ o\ (y=2)} P''(2, 17) = P''(\ 2,\ 2(k-2)+3)$
$= P''(\ 2,\ 2k-4+3)$

sehingga diperoleh persamaan: 17 = 2k - 4 + 3
4k = 9

k). Refleksi terhadap garis x = h dilanjutkan terhadap garis y = k



Gambar 4-23

Perhatikan **Gambar 4-23** di samping, dengan menggunakan rumus refleksi pada x = h diperoleh A'(2h – x, y). Dengan menggunakan prinsip yang sama jika A'(2h – x , y) di refleksikan terhadap y = k diperoleh: A"(2h – x, 2k – y)

Refleksi x=h dilanjutkan y=k ditulis: (y=k) o (x=h),

(y=k) o (x=h) = (x=h) o (y=k) (bersifat komutatif)

Dari uraian di atas diperoleh:

$$A(x, y) \xrightarrow{(y=k)\ o\ (x=h)} A''(2h - x, 2k - y)$$

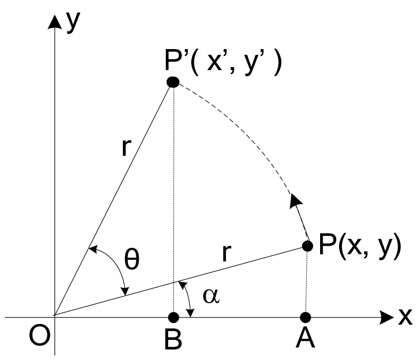
3). Perputaran (Rotasi)

Perputaran atau rotasi pada bidang datar ditentukan oleh:

- Titik pusat rotasi
- Besar sudut rotasi
- Arah sudut rotasi

Arah rotasi dikatakan positif jika berlawanan dengan arah jarum jam dan arah rotasi dikatakan negatif jika searah dengan jarum jam.

a). Rotasi dengan Pusat O(0, 0)



Gambar 4-24

Perhatikan **gambar 4-24** di samping,
Oleh karena P(x, y) diputar sebesar θ berlawanan arah jarum jam ke titik P'(x', y'), maka POP' merupakan juring lingkaran. Dengan demikian OP = OP' = r

Pada segitiga POA, $x = r\cos\alpha$ dan $y = r\sin\alpha$

Pada segitiga P'OB,

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\theta + \alpha) \\ &= r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ &= x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' &= r\sin(\theta + \alpha) \\ &= r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \\ &= x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned}$$

Maka diperoleh:

$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$

$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$ jika dibentuk dalam matriks:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, sehingga matriks dengan yang bersesuaian rotasi sebesar θ^0 pada pusat O, yaitu: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Contoh 33

Tentukan matriks yang bersesuaian dari rotasi sebesar 60^o searah jarum jam dengan pusat O(0, 0)

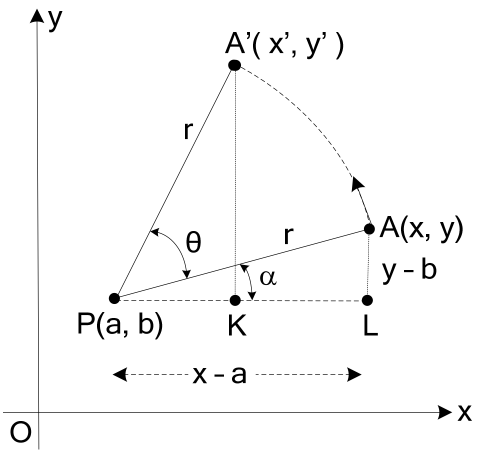
Jawab:

Rotasi sebesar 60^o searah jarum jam berarti $\theta = -60^o$

matriks yang bersesuaian dari rotasi sebesar -60^o dengan pusat O adalah:

$$\begin{pmatrix} \cos(-60^o) & -\sin(-60^o) \\ \sin(-60^o) & \cos(-60^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b). Rotasi dengan pusat P(a, b)



Gambar 4-25

Perhatikan **gambar 4-25** di samping,

Pada segitiga ALP, $x - a = r \cos\alpha$ dan

$y - b = r \sin\alpha$

Pada segitiga A'KP,

$$\begin{aligned} PK = x' - a &= r\cos(\theta + \alpha) \\ &= r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ &= (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} KA' = y' - b &= r\sin(\theta + \alpha) \\ &= r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \\ &= (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta \end{aligned}$$

Dengan demikian maka diperoleh:

$$\begin{aligned} x' - a &= (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta \\ y' - b &= (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta \end{aligned}$$

apabila dibuat dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Tidak ada matriks tunggal yang bersesuaian dari rotasi sebesar θ dengan pusat P(a, b)

Contoh 34

Tentukan bayangan dari titik A(2, -3) apabila dirotasikan oleh sudut sebesar 90^o berlawanan dengan arah jarum jam dengan pusat P(1, -6) !

Jawab:

Rotasi sebesar 90^o berlawanan arah jarum jam berarti $\theta = 90^o$

$x' - a = (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta$

$x' - 1 = (2 - 1)\cos 90^o - (-3 - (-6))\sin 90^o$

$x' - 1 = 0 - 3$

$x' = -2$

$y' - b = (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta$

$y' - (-6) = (2 - 1)\sin 90^o + (-3 - (-6))\cos 90^o$

$y' + 6 = 1 + 0 \Rightarrow y' = -5$,

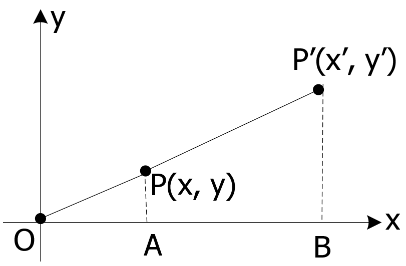
jadi koordinat bayangan A'(-2, -5)

4). Perkalian (Dilatasi)

Perkalian atau dilatasi adalah suatu transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil) suatu bangun, tetapi tidak mengubah bentuk bangun.

Suatu dilatasi ditentukan oleh:
- Pusat dilatasi
- Faktor dilatasi atau faktor skala

a). Dilatasi dengan pusat O(0, 0)



Gambar 4-26

Misalkan P'(x', y') adalah bayangan dari titik P(x, y) oleh dilatasi dengan faktor skala k dan pusat O seperti **Gambar 4-26** di samping ini.

Δ OAP $\approx \Delta$ OBP' maka:

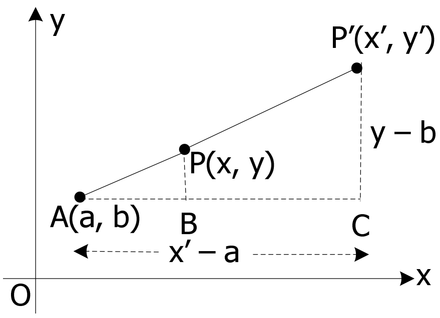
OB = k OA $\Rightarrow x' = kx$

BP' = k AP $\Rightarrow y' = ky$ sehingga jika disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{matrix} x' = kx + 0y \\ y' = 0x + ky \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

, dari persamaan matriks disamping, maka matriks yang bersesuaian dari dilatasi dengan faktor skala k dan pusat O, adalah $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

b). Dilatasi dengan Pusat P(a, b)



Misalkan P'(x', y') adalah bayangan dari titik P(x, y) oleh dilatasi dengan faktor skala k dan pusat A(a, b) seperti **Gambar 4-27** di samping ini.

Δ ABP $\approx \Delta$ ACP' maka:

AC = k AB $\Rightarrow x' - a = k(x - a)$

CP' = k BP $\Rightarrow y' - b = k(y - b)$

Gambar 4-27

Contoh 35

Tentukan bayangan titik A(-2, 4) setelah didilatasikan dengan faktor skala -3 dan pusatnya P(3, -1)

Jawab:

$x' - a = k(x - a)$
$x' - 3 = -3(-2 - 3)$
$x' - 3 = 15 \Rightarrow x' = 18$

$y' - b = k(y - b)$
$y' - (-1) = -3(4 - (-1))$
$y' + 1 = -15$
$y' = -16$, Jadi bayangan A'(18, -16)

Contoh 36

Titik A(-1, 5) dan B(4, -2) setelah dilakukan dilatasikan dengan faktor skala k dan pusat P(a, b), menjadi A'(-5, 14) dan B'(5, 0). Tentukan k, a dan b

Jawab:

Untuk A (-1, 5) ke A'(-5, 14)

$x' - a = k(x - a)$
$-5 - a = k(-1 - a)$
$-5 = -k - ka + a$ . . . 1)

$y' - b = k(y - b)$
$14 - b = k(5 - b)$
$14 = 5k - kb + b$ . . . 2)

Untuk B(4, -2) ke B'(5, 0)

$x' - a = k(x - a)$
$5 - a = k(4 - a)$
$5 = 4k - ka + a$ . . . 3)

$y' - b = k(y - b)$
$0 - b = k(-2 - b)$
$0 = -2k - kb + b$ . . . 4)

Dari persamaan 1) dan 3) diperoleh $-5 + k = 5 - 4k \Rightarrow k = 2$
Dari persamaan 1) diperoleh: $-5 = -k - ka + a$ (dapat juga dari persamaan 3)
$-5 = -2 - 2a + a \Rightarrow a = 3$
Dari persamaan 2) diperoleh: $14 = 5k - kb + b$ (dapat juga dari persamaan 4)
$14 = 10 - 2b + b \Rightarrow b = -4$
Jadi dilatasi di atas dengan faktor skala k = 2 dan pusat P(3, -4)

5). Komposisi Dua Translasi Berturutan

Menentukan translasi tunggal yang mewakili komposisi dua translasi yang berturutan sama dengan menentukan resultan dua buah vektor. Jika T_1 translasi pertama dengan vektor kolom $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ kemudian dilanjutkan dengan translasi kedua T_2 dengan vektor kolom $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$, maka translasi tunggal yang mewakili komposisi di atas adalah:

$$T = T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

Catatan:

- Translasi T_1 dilanjutkan translasi T_2 sama dengan translasi T_2 dilanjutkan translasi T_1, yaitu $(T_1 \text{ o } T_2) = (T_2 \text{ o } T_1)$. Jadi komposisi dua translasi bersifat *komutatif*
- Bayangan peta dari A(x, y) oleh tranlasi T_1 dilanjutkan translasi T_2 dilambangkan dengan: $(T_2 \text{ o } T_1)A(x, y)$

Contoh 37

Translasi T_1 dan T_2 masing-masing memiliki vektor kolom $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

a. Tentukan translasi tunggal yang mewakili komposisi translasi di atas
b. Tentukan $(T_2 \text{ o } T_1)A(-5, 1)$
c. Tentukan $(T_1 \text{ o } T_2)B(3, 0)$
d. Tentukan C jika $(T_2 \text{ o } T_1)C(x, y) = C''(-4, 10)$

Jawab:

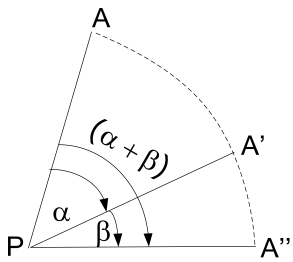
a. Translasi tunggal $T = T_1 + T_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+(-5) \\ -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

b. $(T_2 \text{ o } T_1)A(-5, 1) = A''(-5 + 2 + (-5),\ 4 + (-3) + 1) = A''(-8, 2)$

c. $(T_1 \text{ o } T_2)B(3, 0) = B''(2 + (-5) + 3,\ -3 + 4 + 0) = B''(0, 1)$

d. $(T_2 \text{ o } T_1)C(x, y) = C''(-4, 10)$
   $C''(-5 + 2 + x,\ 4 + (-3) + y) = C''(-4, 10)$
   $C''(-3 + x,\ 1 + y) = C''(-4, 10)$
   $-3 + x = -4 \Rightarrow x = -1$
   $1 + y = 10 \Rightarrow y = 9$. Jadi koordinat C(-1, 9)

6). Komposisi terhadap Dua Rotasi Berturutan yang Sepusat



Gambar 4-28

Perhatikan **gambar 4-28** di samping, A' adalah bayangan titik A oleh rotasi sejauh α searah jarum jam dengan pusat P dan A'' adalah bayangan titik A' oleh rotasi sejauh β searah jarum jam dengan pusat P juga. Tampak bahwa pemetaan dari A ke A'' adalah rotasi sejauh $(\alpha + \beta)$ searah jarum jam dengan pusat P. Dengan demikian kita dapat mengambil kesimpulan:

Dua rotasi berturutan yang sepusat sama dengan sebuah rotasi sejauh jumlah masing-masing rotasi semula terhadap pusat yang sama.

Contoh 38

A(-2, 6) dirotasikan sejauh 65^o searah jarum jam dengan pusat O dilanjutkan dengan rotasi 70^o searah jarum jam dengan pusat O juga. Tentukan bayangan titik A !

Jawab:

α = -65° (searah jarum jam) dan β = -70° (searah jarum jam)
$\alpha + \beta = -65^\circ + (-70^\circ) = -135^\circ$

Matriks dari komposisi rotasi di atas: T = $\begin{pmatrix} \cos(-135^\circ) & -\sin(-135^\circ) \\ \sin(-135^\circ) & \cos(-135^\circ) \end{pmatrix}$

Menentukan bayangan A sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-135^\circ) & -\sin(-135^\circ) \\ \sin(-135^\circ) & \cos(-135^\circ) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5\sqrt{2} & 0{,}5\sqrt{2} \\ -0{,}5\sqrt{2} & -0{,}5\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+3\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Contoh 39

Tentukan matriks tunggal yang bersesuaian dari rotasi sejauh 132° berlawanan arah jarum jam dengan pusat O dilanjutkan rotasi sejauh 12° searah jarum jam dengan pusat O juga

Jawab:

α = 132° (berlawanan arah jarum jam) dan β = -12° (searah jarum jam)
$\alpha + \beta = 132^\circ + (-12^\circ) = 120^\circ$

Matriks dari komposisi rotasi di atas: T = $\begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c. Rangkuman

1. Matriks yang Bersesuaian dari Jenis-jenis Transformasi

No	Jenis transformasi	Pemetaan	Matriks transformasi
1	Translasi	(x, y) $\rightarrow$ (x + a, y + b)	$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
2	Refleksi		
	a. Terhadap sumbu x	(x, y) $\rightarrow$ (x , -y)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	b. Terhadap garis x = h	(x, y) $\rightarrow$ (2h – x , y)	Tidak ada
	c. Terhadap sumbu y	(x, y) $\rightarrow$ (-x , y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
	d. Terhadap garis y = k	(x, y) $\rightarrow$ (x , 2k – y)	Tidak ada
	e. Terhadap garis y = x	(x, y) $\rightarrow$ (y , x)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	f. Terhadap garis y = -x	(x, y) $\rightarrow$ (-y , -x)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

	g. Terhadap titik pangkal O	(x, y) $\to$ (-x , -y)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
	h. Terhadap titik A(a, b)	(x, y) $\to$ (2a + x , 2b + y)	Tidak ada
3	Rotasi a. Pusat (0,0) sebesar θ	(x, y) $\to$ (x cos θ – y sin θ, x sin θ + y cos θ)	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
	b. Pusat A(a, b) sebesar θ	(x, y) $\to$ (x', y') x' = {(x – a) cos θ – (y – b) sin θ + a, y' = {(x – a) sin θ + (y – b) cos θ + b}	Tidak ada
4	Dilatasi a. Pusat (0,0) faktor skala k	(x, y) $\to$ (kx , ky)	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
	b. Pusat A(a, b) faktor skala k	(x, y) $\to$ (k(x – a) + a, k(y – b) + b)	Tidak ada

2. Dua rotasi berturutan yang sepusat sama dengan sebuah rotasi sejauh jumlah masing-masing rotasi semula terhadap pusat yang sama.

LATIHAN 3

1. Tentukan bayangan titik-titik berikut ini, jika mendapat translasi T di bawah ini.

   a. A(2,-3), T = $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   b. B(-4,8), T = $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   c. K(-1, 0), T = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   d. L(-1,-1), T = $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Segitiga KLM dengan K (-5, 1), L (-1, 2), dan M (-3, 6) ditranslasikan oleh T= $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   Tentukan bayangan segitiga tersebut !

3. Tentukan bayangan titik-titik di bawah ini:

   a. A(2, -5) dicerminkan terhadap sumbu x
   b. Segitiga ABC dengan A(-1,1), B(4,-1), C(-4,3) dicerminkan pada sumbu y
   c. Jajargenjang A(0, 0), B(4, 1), C(5, 3) dan D(1, 2) dicerminkan garis x = -2
   d. Δ PQR dengan P(-4, 6), Q(-2, -5), dan R(8, 5) dicerminkan pada y = 3
   e. Segitiga KLM dengan K(1, 3), L(3, -4), dan M(-2, 1) dicerminkan oleh titik O
   f. Ruas garis AB dicerminkan pada garis y = x apabila A(-1, 5) dan B(-1, 3)
   g. Layang-layang ABCD dicerminkan oleh garis y = -x apabila A(3, -1), B(3, -3), C(-1, -5), dan D(1, -1)
   h. Δ DEF dengan D(-2, 0), E(3, -1) dan F(3, 1) apabila dicerminkan oleh P(-2,4)
   i. Δ DEF dengan D(2, -1), E(6, -2) dan F(3, 8) apabila diputar 270^{o} searah jarum jam dengan pusat O(0, 0)

j. Jajargenjang ABCD dengan A(0, 0), B(4, 1), C(5, 3) dan D(1, 2) apabila diputar 180^o dengan pusat P(2, -5)
k. Segitiga PQR dengan P(-4, 6), Q(-2, -5), dan R(8, 5) apabila didilatasikan dengan faktor skala -4 dan pusat O(0, 0)
l. Layang-layang ABCD didilatasikan dengan faktor skala 3 dan pusat dilatasi P(-3, 2) apabila A(3, -1), B(3, -3), C(-1, -5), dan D(1, -1)

4. Tentukan bayangan titik-titik berikut ini apabila diputar terhadap O(0, 0) sebesar sudut θ yang diberikan
   a. (4, 2) dan $\theta = 60^\circ$
   b. (-5, -5) dan $\theta = 135^\circ$
   c. (0, 3) dan $\theta = 150^\circ$
   d. (1, 1) dan $\theta = 315^\circ$
   e. (-3, 6) dan $\theta = -240^\circ$
   f. (4, 1) dan $\theta = -210^\circ$

5. Garis lurus g yang melalui A(-4, 1) dan B(2, -2) dipetakan ke bayangannya A'B' oleh rotasi pada O(0, 0) dengan sudut putar $\frac{1}{2}$ putaran. Garis g' melalui A'B' kemudian dipetakan kebayangannya A"B" oleh suatu rotasi pada pusat P(1, -1), dengan sudut putar $\frac{1}{4}$ putaran searah jarum jam
   a. Tentukan koordinat A', B', A" dan B"
   b. Tentukan persamaan garis g' dan g".

6. Segitiga ABC dengan A(-1, 4), B(-5, 0) dan C(4, -2) dicerminkan pada garis y = -x kemudian dilanjutkan oleh dilatasi dengan faktor skala 4 dengan pusat O. Tentukan bayangan segitiga ABC tersebut !

7. Segi-4 PQRS dengan P(1, 5), Q(7, 7), R(5, 1) dan S(-2, -2) dicerminkan pada garis y = x kemudian dilanjutkan oleh rotasi 270^o searah jarum jam dengan pusat O. Tentukan bayangan segitiga ABC tersebut !

8. Translasi T_1 dan T_2 masing-masing memiliki vektor kolom $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
   a. Tentukan translasi tunggal yang mewakili komposisi translasi di atas.
   b. Tentukan $(T_1 \circ T_2)$A(5, -2)
   c. Tentukan $(T_1 \circ T_2)$B(-4, 1)
   d. Tentukan $(T_1 \circ T_2 \circ T_1)$C(2, -3)
   e. Tentukan D jika $(T_2 \circ T_1 \circ T_2)$D(x, y) = D"(-1, 7)

9. Segitiga ABC direfleksikan oleh x = 5 dilanjutkan oleh x = -1 diperoleh A"(0, -3), B"(2, 3) dan C"(-1, 5). Tentukan koordinat ABC tersebut !

10. Tentukan bayangan titik-titik di bawah ini:
   a. Segitiga ABC dengan A (-1, 1), B (4, -1) dan C (-4, 3) dicerminkan pada sumbu y dilanjutkan pencerminan pada garis y = -x
   b. Jajargenjang ABCD dengan A(0, 0), B(4, 1), C(5, 3) dan D(1, 2) dicerminkan pada garis x = -2 dilanjutkan pada garis x = 5
   c. Δ PQR dengan P(-4, 6), Q(-2, -5), dan R(8, 5) dicerminkan pada garis y = 3 dilanjutkan pada garis y = -5

d. Δ KLM dengan K(1, 3), L(3, -4), dan M(-2, 1) dicerminkan pada garis y = -4 dilanjutkan pada garis x = 6
e. Ruas garis AB dengan A(-1, 5) dan B(-1, 3) dicerminkan pada garis x = 5 dilanjutkan pada garis y = -2
f. Layang-layang ABCD dirotasikan sejauh $+25^o$ dilanjutkan rotasi sejauh $+35^o$ dengan pusat O jika A(3, -1), B(3, -3), C(-1, -5), dan D(1, -1)
g. Δ DEF dengan D(-2, 0), E(3, -1) dan F(3, 1) apabila dirotasikan sejauh 134^o dilanjutkan rotasi -14^o dengan pusat O

Uji Kemampuan

C.1 Pilihan ganda

1. Luas segitiga yang memiliki sisi-sisi 5 cm, 12 cm dan 13 cm adalah . . . .
   a. 65 cm^2 c. 32,5 cm^2 e. 15 cm^2
   b. 60 cm^2 d. 30 cm^2

2. Keliling lingkaran yang memiliki luas 154 cm^2 adalah . . . .
   a. 11 cm c. 44 cm e. 88 cm
   b. 22 cm d. 66 cm

3. Belah ketupat panjang diagonalnya masing-masing 12 cm dan 20 cm , maka luasnya adalah . . . .
   a. 240cm^2 c. 90 cm^2 e. 60 cm^2
   b. 120cm^2 d. 80 cm^2

4. Luas segitiga sama sisi yang panjang sisinya 10 cm adalah. . . .
   a. $25\sqrt{2}$ cm^2 c. 50 cm^2 e. 100 cm^2
   b. $25\sqrt{3}$ cm^2 d. $50\sqrt{3}$ cm^2

5. Suatu roda berdiameter 56 cm menggelinding sebanyak 600 kali putaran disuatu jalan, maka jarak yang telah ditempuh roda tersebut adalah . . . .
   a. 1.056 cm c. 1.056 m e. 105.600 m
   b. 106.500 cm d. 10.560 m

6. Suatu belah ketupat panjang diagonalnya masing-masing 20 cm dan 48 cm, maka kelilingnya adalah. . . .
   a. 480 cm c. 140 cm e. 26 cm
   b. 104 cm d. 52 cm

7. Besar suatu sudut $\frac{3}{5}\pi$ radian setara dengan . . . .
   a. 120^o c. 108^o e. $34,2^o$
   b. 110^o d. 88^o

8. Besar suatu sudut 75^o setara dengan . . . .

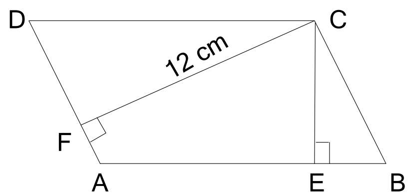
a. $\frac{12}{7}\pi$ rad c. $\frac{9}{15}\pi$ rad e. $\frac{5}{12}\pi$ rad
b. $\frac{12}{5}\pi$ rad d. $\frac{7}{12}\pi$ rad

9. Besar suatu sudut $34{,}25^o$ setara dengan . . . .
a. $34^o\,12'\,18''$ c. $34^o\,30'$ e. $34^o\,30'\,30''$
b. $34^o\,15'$ d. $34^o\,15'\,30''$

10. Suatu persegi panjang memiliki panjang 3 cm lebih dari lebarnya. Jika luasnya 40 cm^2 maka kelilingnya adalah. . . .
a. 13 cm c. 22 cm e. 40 cm
b. 20 cm d. 26 cm

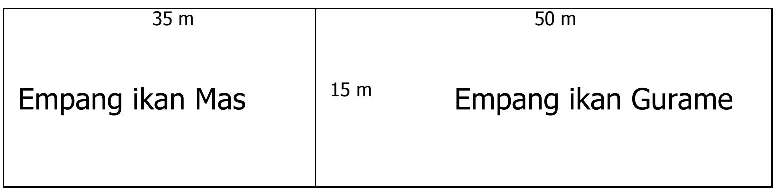
11. Luas juring lingkaran yang sudut pusatnya 45^o dan berdiameter 200 cm adalah….
a. 39,25 cm^2 c. 3.259 cm^2 e. 3.925 cm^2
b. 78,5 cm^2 d. 3.295 cm^2

12. Perahatikan gambar di samping !
Jajaran genjang ABCD dengan panjang AB = 12 cm, CF = 12 cm dan CE : CF = 2 : 3. Keliling jajaran genjang ABCD adalah . . . .
a. 30 cm
b. 40 cm
c. 96 cm
d. 144 cm
e. 156 cm



13. Panjang suatu persegi panjang 6 lebihnya dari lebarnya. Jika luas persegi panjang tersebut 27 cm^2. maka kelilingnya adalah . . . .
a. 12 cm c. 20 cm e. 27 cm
b. 18 cm d. 24 cm

14. Pak Ali memiliki dua Empang yang saling berdampingan dengan denah seperti gambar dibawah ini:



Jika semua Empang akan dipagari bambu dengan biaya Rp4.500/m. maka biaya total yang dikeluarkan Pak Ali adalah . . . .
a. Rp967.500 c. Rp1.035.000 e. Rp1.530.000
b. Rp976.500 d. Rp1.350.000

15. Keliling dari suatu belah ketupat dengan panjang diagonal masing-masing 16 cm dan 30cm adalah. . . .

a. 17 cm c. 51 cm e. 86 cm
b. 34 cm d. 68 cm

16. Suatu layang-layang panjang diagonalnya masing-masing 48 cm dan 42 cm , diagonal yang terbagi sama panjang adalah diagonal 48 cm. Jika panjang salah satu sisinya 26cm, maka kelilingnya adalah . . . .
a. 60 cm c. 120 cm e. 132 cm
b. 66 cm d. 123 cm

17. Luas trapesium yang memiliki panjang sisi-sisi sejajar masing-masing 25 cm dan 20 cm dan tingginya 8 cm adalah . . . .
a. 120 cm^2 c. 180 cm^2 e. 360 cm^2
b. 160 cm^2 d. 240 cm^2

18. Trapesium sama kaki dengan panjang sisi-sisi sejajar masing-masing 25 cm dan 65 cm dan panjang kakinya 29 cm . maka luasnya adalah . . . .
a. 820 cm^2 c. 940 cm^2 e. 954 cm^2
b. 845 cm^2 d. 945 cm^2

19. Suatu lingkaran memiliki luas 12,56 dm^2. Jika nilai π = 3,14, maka diameternya adalah . . . .
a. 10 cm c. 40 cm e. 400 cm
b. 20 cm d. 200 cm

20. Luas juring lingkaran berdiameter 112 cm dan bersudut pusat 90^o adalah . . . .
a. 9856 cm^2 c. 4264 cm^2 e. 2132 cm^2
b. 8956 cm^2 d. 2464 cm^2

21. Suatu juring sudut pusatnya 60^o dan luas 40 cm^2, maka luas lingkarannya . . . .
a. 420 cm^2 c. 160 cm^2 e. 80 cm^2
b. 240 cm^2 d. 120 cm^2

22. Suatu juring memiliki panjang busur 61,6 cm. Jika jari-jarinya 14 cm. Jika π = $^{22}/_7$ maka besar sudut pusat juring tersebut adalah . . . .
a. 260^o c. 252^o e. 200^o
b. 255^o d. 240^o

23. Suatu roda sepeda memiliki jari-jari 49 cm dan melintasi jalan sebanyak 400 putaran, maka jarak yang telah di tempuh sepeda tersebut adalah . . . .
a. 132.200 cm c. 1.132 m e. 123.200 m
b. 12.320 cm d. 1.232 m

24. Luas segitiga yang memiliki panjang sisi masing-masing 28 cm, 26 cm dan 30 cm adalah . . . .
a. 84 cm^2 c. 186 cm^2 e. 672 cm^2
b. 168 cm^2 d. 336 cm^2

25. Besar suatu sudut $\frac{3}{8}\pi$ radian setara dengan . . . .

a. 76,5^o c. 66,5^o e. 57,5^o
b. 67,5^o d. 63 ^{o}

26. Bayangan titik A(-2, 5) jika direfleksikan pada x = -3 dilanjutkan pada x = 4 adalah . . . .
    a. (-2, 30) c. (-5, 12) e. (-2, -30)
    b. (-12, 5) d. (12, 5)

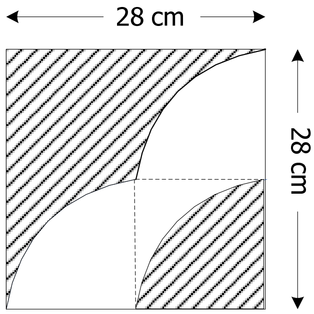
27. Besarnya sudut pusat lingkaran yang dibatasi oleh busur lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jarinya disebut . . . .
    a. 1 derajat c. 1 radian e. 50 derajat
    b. π radian d. 2 radian

28. Ukuran sudut : 1,5 radian setara dengan . . . .
    a. 57,3^o c. 85,95^o e. 270^o
    b. 58,95^o d. 180^o

29. Bayangan titik P(5, 4) jika didilatasikan dengan faktor skala -4 dan pusat(-2, 3) adalah . . .
    a. (-30, -1) c. (-26, -1) e. (-14, -1)
    b. (-30, 7) d. (-14, -7)

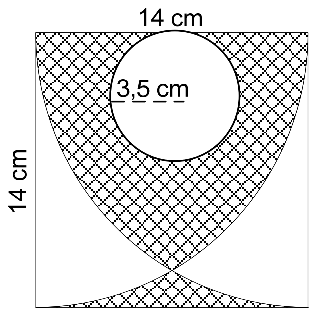
30. Titik P direfleksikan pada y = -3 dilanjutkan pada y = 4 diperoleh P'(-1, 3). Koordinat P adalah . . . .
    a. (-12, -1) c. (11, -1) e. (-1 , -11)
    b. (1, 11) d. (-1, 11)

31. Luas daerah yang diarsir di bawah ini adalah . . . .



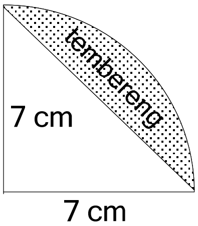
a. 434 cm^2
b. 443 cm^2
c. 558 cm^2
d. 585 cm^2
e. 784 cm^2

32. Keliling daerah yang diarsir di bawah ini adalah . . . .



a. 50 cm
b. 66 cm
c. 72 cm
d. 94 cm
e. 102 cm

33. Lihat bambar di bawah ini :



Jika sudut pusat juring 90^o, maka luas tembereng yang di arsir adalah. . . .

a. 14 cm^2 c. 38,5 cm^2 e. 154 cm^2
b. 18 cm^2 d. 77 cm^2

34. Pada pemetaan A(x, y) $\rightarrow$ A' (-y , -x), matriks transformasi yang bersesuaian dengan pemetaan tersebut adalah . . . .

a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

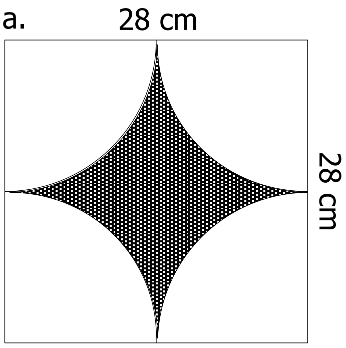
b. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

35. Suatu transformasi T dinyatakan oleh matriks $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, maka T adalah . . . .
   a. Pencerminan terhadap sumbu x
   b. Pencerminan terhadap sumbu y
   c. Pencerminan terhadap ga
   d. Perputaran 90^o searah jarum jam dengan pusat O(0, 0)
   e. Perputaran 90^o berlawanan arah jaru

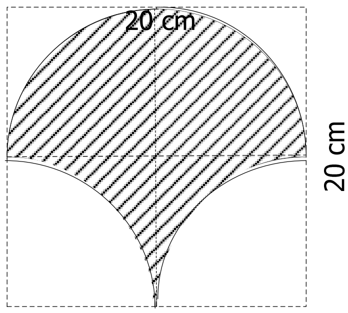
B. Essay

1. Tentukan luas dan keliling daerah yang di

a.



b.



2. Tentukan luas dan keliling juring yang berdiameter 28 cm dan bersudut pusat:
   a. 225^o b. ¾ π radian e. $^1/_6$ putaran

3. Tentukan luas trapesium jika diketahui sebagai berikut:
   a. sisi alas dan atas masing-masing 30 cm dan 40 cm dan tinggi 1 dm
   b. Trapesium siku-siku dengan panjang sisi siku-siku 15 cm dan sisi-sisi sejajarnya 1,5 dm dan 25 cm

4. Tentukan luas dan keliling suatu bangun datar jika diketahui sebagai berikut:
   a. Layang-layang dengan panjang sisi-sisinya 10 cm dan 17 cm dan panjang diagonal yang terbelah menjadi dua bagian sama panjan
   b. Belah ketupat dengan panjang sisi dan salah satu diaginalnya 20 dan 32 cm

5. Suatu rumah memiliki ukuran tanahnya 20 m x 15 m. Jika ¾ nya adalah luas bangunan dan harga tanah Rp.600.000 per m2 dan harga bangunan Rp.900.000 per m2. Tentukan harga rumah tersebut jika dijual.

6. P(2, 3) direfleksikan oleh y = 2 dilanjutkan y = k diperoleh p"(2, 17) tentukan k

KUNCI JAWABAN BAB 1
LOGIKA MATEMATIKA

Uji Kemampuan

1	A	11	A	21	D
2	A	12	D	22	A
3	B	13	A	23	B
4	C	14	A	24	A
5	C	15	E	25	B
6	D	16	C		
7	D	17	A		
8	C	18	B		
9	C	19	B		
10	A	20	D		

KUNCI JAWABAN BAB 2
TRIGONOMETRI

Latihan 1

2. a. 15^o g. 85^o
   c. $67{,}5^o$ i. 33^o
   e. 54^o

4. b. $\frac{2}{45}\pi$ rad f. $\frac{11}{18}\pi$ rad
   d. $\frac{13}{36}\pi$ rad h. $\frac{17}{15}\pi$ rad

5. a. $\frac{1}{3}$ putaran / detik c. $\frac{2}{3}\pi$ rad / detik
   b. 40π rad / menit d. 120^o/detik

8. c. Negatif e. negatif i. negatif
   d. Negatif h. Positif k. Positif

9. a. $\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{6}$ e. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   b. 1 h. $2-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

11. a. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$ d. 3

b. -1 e. $-\frac{1}{3}$

13. 26,5 m

Latihan 2

1. a. Sin 75^o g. Sec 10^o m. $-\sin 53^o$
   c. $-\cos 65^o$ i. $-\text{cosec } 10^o$
   e. $-\tan 50^o$ k. Cotan 55^o

3. a. -1
   c. -1
   e. cosec α

5. a. 0,5 c. 0 e. 2
   b. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ d. -2 f. $-\frac{1}{6}\sqrt{6}$

7. a. $-\tan a$ c. $\sin^2 a$

10. a. -a
    b. a
    c. a

Latihan 3

3. a. $(1\ ,\ \sqrt{3}\ )$ c. $(-5\sqrt{2}\ ,\ 5\sqrt{2}\ )$
   b. $(-4\sqrt{3}\ ,\ -4\ )$ e. $(3\sqrt{3}\ ,-3\ )$

4. a. $(\sqrt{2}\ ,\ 225^o\ )$
   c. $(4,\ 300^o\ )$
   e. $(2,\ 150^o\ )$

6. a. 1.200 km
   b. $600\sqrt{3}$ km
   c. 600 km

Latihan 5

2. a. $4\sqrt{3}$ d. $5\sqrt{3}$
   c. $\sqrt{43}$ f. $2\sqrt{5}$

3. a. Cos A = $\frac{43}{160}$ d. Cos A = $\frac{19}{35}$

5. 21,25 km

7. 786,38 km

9. $3\sqrt{21}$ km

Uji Kemampuan

1	A	11	D	21	B
2	A	12	D	22	B
3	A	13	B	23	A
4	D	14	D	24	D
5	A	15	B	25	E
6	B	16	C		
7	C	17	E		
8	C	18	A		
9	B	19	E		
10	E	20	E		

KUNCI JAWABAN BAB 3
BARISAN DAN DERET

Latihan 1

1. a. 43, 57, 73
   c. 3.072, 12.288, 49.152
   e. 52, 67, 84

3. a. $U_n = 4n - 1$
   c. $U_n = 3.2^{n-1}$
   e. $U_n = 5^{n-1}$

6. a. 3.850 b. 784 f. 456,67 h. 2.416

Latihan 2

1. a. $U_n = 6n - 3$, $U_{100} = 597$
   c. $U_n = 38 - 3n$, $U_{10} = -262$
   e. $U_n = 24 - 4n$, $U_{10} = -376$

3. a. Beda = 4, suku pertam = 3, $U_{75} = 299$
   b. Beda = -4, suku pertam = 46, $U_{75} = -250$

5. 7, 11 dan 15

7. Rp3.125.000,00

9. a. 11.175
   c. 9.490
   e. 2.594

11. a. 1,9 meter
    b. 176,8 meter

13. Rp2.425.000,00

15. a. Rp2.245.000,00
    b. Rp23.775.000,00

17. a. $\sum_{m=1}^{8} m^2$
    c. $\sum_{m=1}^{50} (4m-1)$
    e. $\sum_{m=1}^{30} (157-7m)$
    f. $\sum_{m=1}^{30} (6m-5)$

Latihan 3

1. a. $U_n = 2^{2n-2}$, $U_{10} = 2^{18}$
   c. $U_n = 3^{n+1}$, $U_{10} = 3^{11}$
   e. $U_n = 2^{11-n}$, $U_{10} = 2$

3. a. $U_8 = 2.187$
   b. $U_9 = 10^{-5}$
   c. $U_{10} = 16$

5. 5, 15 dan 45

7. 262,4 meter

9. Rp17.909.078,97

11. $5\frac{115}{243}$

13. 27

15. 270.000 unit

Uji Kemampuan

A. Soal Pilihan Ganda

1	A	11	A	21	E
2	E	12	B	22	D
3	B	13	C	23	B
4	E	14	B	24	E
5	B	15	E	25	D
6	D	16	C		
7	B	17	E		
8	D	18	C		
9	C	19	E		
10	C	20	B		

B. Soal Essay

1. a. 5.985 c. 14.016 e. 96

3. 2, 6 dan 18

5. 10 + 8 + 6,4 + 5,12 + . . .

Glosarium

Negasi	:	Ingkaran	2
Konjungsi	:	Kalimat majemuk yang dihubungkan dengan kata ”dan/ tetapi”	2
Disjungsi	:	Kalimat majemuk yang dihubungkan dengan kata ”atau”	3
Implikasi	:	Kalimat majemuk yang dihubungkan dengan kata ”jika …maka…”	6
Biimplikasi	:	Kalimat majemuk yang dihubungkan dengan kata ”jika dan hanya jika”	12
Tautologi	:	Tabel kebenaran pernyataan majemuk yang bernilai benar semua	12
Kontradiksi	:	Tabel kebenaran pernyataan majemuk yang bernilai salah semua	14
Fungsi linear	:	Fungsi dengan bentuk $f(x) = ax + b$	
Fungsi kusdrat	:	Fungsi dengan bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$	
Range	:	Daerah hasil	
Domain	:	Daerah asal	
Kodomain	:	Daerah kawan	

Indeks

B

D

F

G

I

K

L

M

N

P

R

S

T

DAFTAR PUSTAKA

Alders, C.J, 1987, *Ilmu Aljabar*, Jakarta, Pradnya Paramita.

Ayres, Frank.Jr, 1972, *Calculus 2 edition,Schum Outline Series*, Mc. Graw Hill London, Book Company.

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, 1976, *Matematika 8*, Jakarta.

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, 1976, *Matematika 11*, Jakarta.

Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, 2003, *Kurikulum SMA dan MA*, Jakarta.

Holiger, Siegbert, *Matematika Teknik untuk Kejuruan Logam*, Jakarta , Katalis.

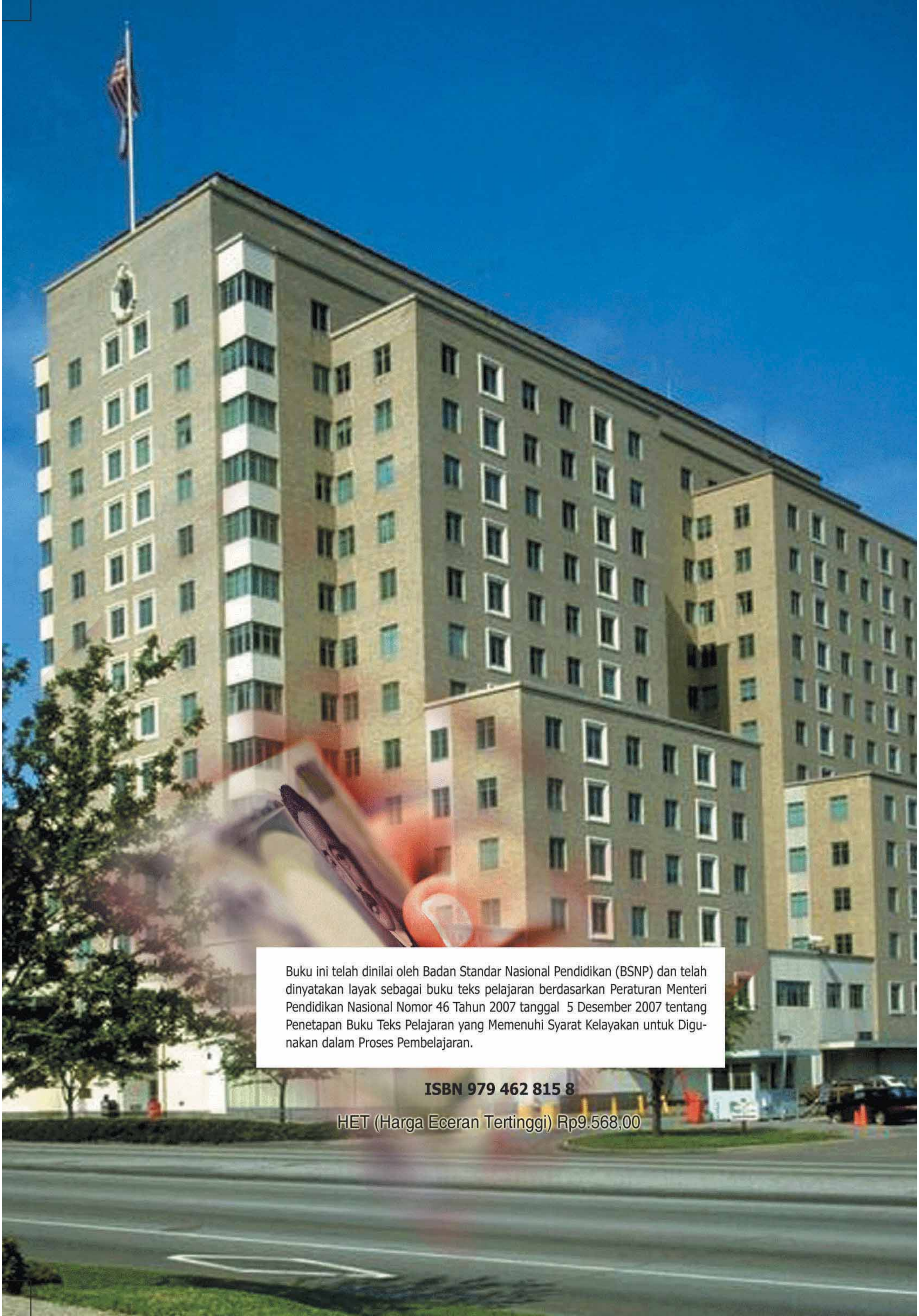
Ilman, M. Oetjoep, Gunawan dkk, 1968, *Aljabar dan Ilmu Ukur Analitik*, Jakarta, Widjaya.

Purcell, Edwin J. Varberg Dale, 1999, *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jakarta, Erlangga. Edisi ke 5 : alih bahasa oleh : Susila, I Nyoman, Bana Karta Sasmita, Rawuh.

Sadler, A.J, 1999, *Introductory Calculus Second Edition*, Australia, Sadler Family Trust.

Sadler, A.J, 1999, *Geometry and Trigonometry*, Australia, Sadler Family Trust.

Spiegel, Murray R, 1993, *Matematika Dasar*, Jakarta, Erlangga.



Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 46 Tahun 2007 tanggal 5 Desember 2007 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

ISBN 979 462 815 8

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp9.568,00