BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

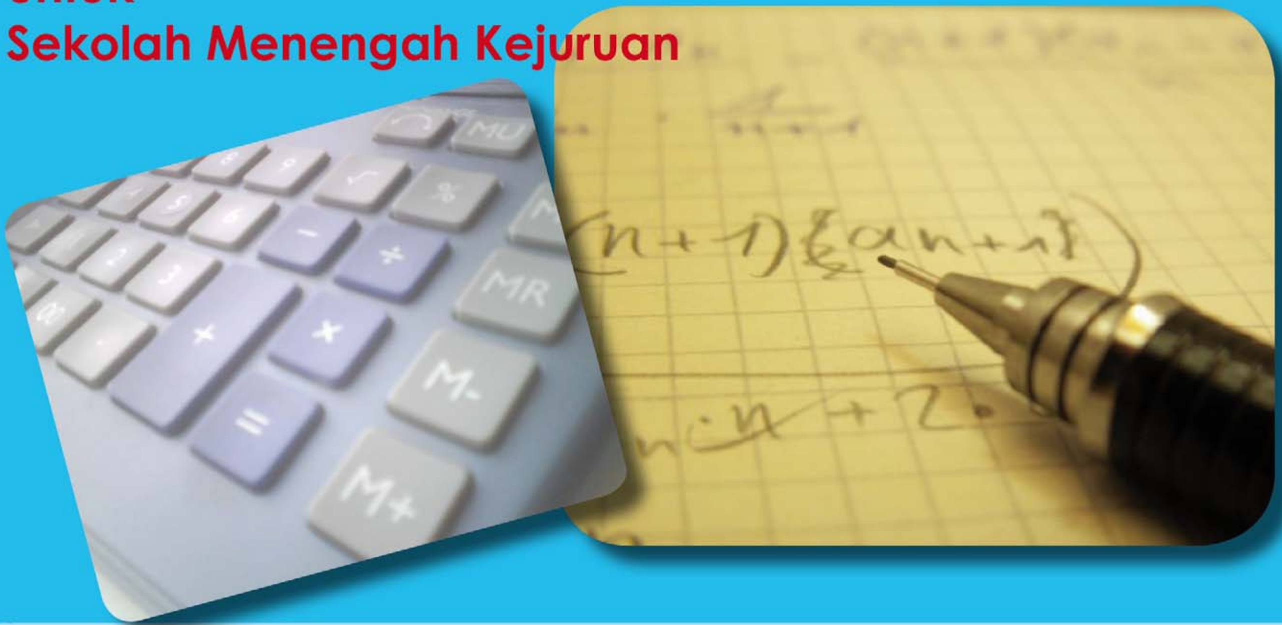
JILID 3

Bandung Arry S., dkk.

Matematika SMK Bisnis dan Manajemen

untuk

Sekolah Menengah Kejuruan



Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan

Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah

Departemen Pendidikan Nasional

Bandung Arry S., dkk.

TEKNIK OTOMASI INDUSTRI JILID 3

untuk SMK

Bandung Arry Sanjoyo dkk

MATEMATIKA BISNIS DAN MANAJEMEN

SMK

JILID 3

Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan
Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah
Departemen Pendidikan Nasional

MATEMATIKA BISNIS DAN MANAJEMEN

Untuk SMK

JILID 3

Penulis : Bandung Arry Sanjoyo
Sri Suprapti
Nur Asyiah
Dian Winda S

Editor : Erna Apriliani

Ukuran Buku : 17,6 x 25 cm

SAN m
SANJOYO, Bandung Arry
Matematika Bisnis dan Manajemen untuk SMK Jilid 3 /oleh Bandung Arry Sanjoyo, Sri Suprapti, Nur Asyiah, Dian Winda S ---- Jakarta : Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan, Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah, Departemen Pendidikan Nasional, 2008.
xii, 162 hlm
ISBN : 978-602-8320-73-3
ISBN : 978-602-8320-76-4

Diterbitkan oleh
Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan
Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2008

KATA SAMBUTAN

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Kejuruan Direktorat Jenderal Manajemen Pendidikan Dasar dan Menengah Departemen Pendidikan Nasional, telah melaksanakan kegiatan penulisan buku kejuruan sebagai bentuk dari kegiatan pembelian hak cipta buku teks pelajaran kejuruan bagi siswa SMK. Karena buku-buku pelajaran kejuruan sangat sulit di dapatkan di pasaran.

Buku teks pelajaran ini telah melalui proses penilaian oleh Badan Standar Nasional Pendidikan sebagai buku teks pelajaran untuk SMK dan telah dinyatakan memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 45 Tahun 2008 tanggal 15 Agustus 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada seluruh penulis yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para pendidik dan peserta didik SMK.

Buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*download*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Dengan ditayangkan *soft copy* ini diharapkan akan lebih memudahkan bagi masyarakat khsusnya para pendidik dan peserta didik SMK di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada d luar negeri untuk mengakses dan memanfaatkannya sebagai sumber belajar.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para peserta didik kami ucapkan selamat belajar dan semoga dapat memanfaatkan buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, 17 Agustus 2008
Direktur Pembinaan SMK

KATA PENGANTAR

Matematika merupakan suatu alat untuk berkomunikasi di bidang ilmu pengetahuan dan teknologi. Dengan matematika kita dapat mengungkapkan gejala – gejala alam, sosial, dan teknik dengan suatu ungkapan rumusan matematika yang tidak memuat makna ganda. Bahkan dengan berbantuan matematika kita dapat menyelesaikan permasalahan sosial, ekonomi, manajemen, dan teknik dengan penyelesaian yang akurat dan optimal. Fakta menunjukkan bahwa beberapa pemenang nobel untuk bidang ekonomi atau teknik berasal dari matematikawan.

Oleh karena itu, mempelajari dan menguasai matematika dari usia sekolah dasar maupun lanjut merupakan suatu kebutuhan. Buku ini disusun dengan memperhatikan konsep berfikir matematis dan selalu mengaitkannya dalam kehidupan sehari-hari, khususnya pada permasalahan ekonomi, bisnis, dan manajemen. Pada setiap konsep kecil yang dituangkan dalam suatu sub bab selalu dikaitkan dengan permasalahan sehari – hari. Juga pada setiap bab diawali dengan kalimat motivasi, pembuka dan perangsang bagi pembaca untuk mengerti dari awal, kira-kira akan dipakai seperti apa dan dimana.

Belajar matematika tidak cukup hanya dengan mengerti konsep saja. Harus disertai dengan banyak latihan olah pikir serupa dengan contoh – contoh yang diberikan. Untuk itu, pada setiap akhir sub bab diberikan banyak soal – soal sebagai latihan dalam menguasai konsep dan miningkatkan ketrampilan olah pikir dan penyelesaian permasalahan.

Susunan materi di buku ini berpedoman pada silabus dan GBPP yang telah disusun oleh Depdiknas untuk matematika tingkat SMK bidang Bisnis dan Perkantoran. Sehingga rujukan yang dipakai banyak menggunakan buku matematika untuk SMK dan SMA/MA. Namun demikian juga memperhatikan beberapa buku matematika untuk perguruan tinggi maupun buku aplikasi matematika. Dengan harapan bahwa konsep dan aplikasi matematika tidak terabaikan, juga tingkatan penyampaian materi sangat memperhatikan usia sekolah SMK.

Banyak kata motivasi dan kalimat definitif diambil dari buku rujukan yang dipakai. Untuk suatu topik gagasan, sering diambil dari gabungan beberapa buku yang kemudian diungkapkan kedalam suatu kalimat yang sekiranya akan mudah dimengerti oleh siswa SMK.

Penulis sangat menyadari bahwa buku ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran untuk perbaikan sangat diharapkan oleh penulis.

Penulis.

DAFTAR ISI

JILID 2

JILID 3

Bab

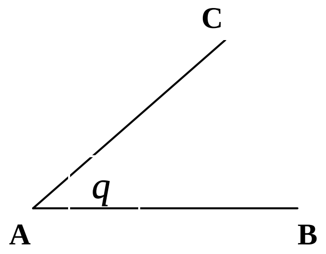
8

GEOMETRI BIDANG

Pada bab ini akan dibahas bentuk-bentuk bidang dalam ruang dimensi dua, keliling serta luasan dari bidang tersebut, bentuk ini banyak kaitannya dengan kegiatan ekonomi (bisnis dan manajemen) terutama menyangkut luasan dari bidang. Selain itu dikenalkan dua besaran sudut yaitu *derajat* dan *radian* serta hubungan antara kedua satuan ukuran ini.

8.1 Sudut

Misalkan kita menggambar dua garis lurus **AB** dan **AC** yang berpotongan di titik **A** (lihat gambar 8.1), kedua garis ini membentuk sudut dengan titik sudut **A** dan dinamakan sudut **A** dilambangkan dengan: $\angle \mathbf{BAC}$ atau dapat juga ditulis sebagai $\angle \mathbf{CAB}$. Garis **AB** dan **AC** dinamakan kaki sudut dari sudut B**AC**. Untuk mengukur besarnya $\angle \mathbf{BAC}$ digunakan aturan berlawanan dengan arah jarum jam yang putar kanan, berarti sudut bernilai positip jika arah putar sudut kiri dan bernilai negative jika arah putar sudut ke kanan, besar sudut dinyatakan dalam derajat. Jadi besar $\angle$**BAC** dinyatakan dengan q^{0}.

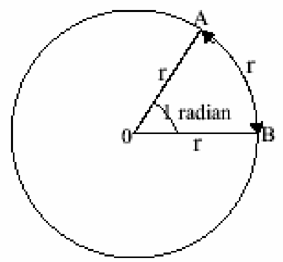


Gambar 8.1.1 Garis AB dan garis AC membentuk $\angle$**BAC**

Ada beberapa nama sudut berdasarkan besar sudut yang dibentuk, pada Gambar 8.1.1 $\angle$**BAC** dinamakan *sudut lancip* karena besar sudut A kurang dari 90^0, jika besar sudut adalah 90^0 maka dinamakan *sudut siku-siku* dan jika besar sudut lebih dari 90^0 dinamakan *sudut tumpul.*

HUBUNGAN SATUAN PANJANG DENGAN DERAJAT

Dua macam satuan yang biasa digunakan untuk menentukan ukuran sudut yaitu radian dan derajad. Pada bagian ini akan dibahas pengertian radian dan hubungan antara derajat dengan radian. Buatlah sebuah lingkaran dengan pusat **O** dan jari-jari ***r*** seperti Gambar 8.1.2.



Gambar 8.1.2 Besar $\angle$ ***AOB = 1 radian***

Misal **AB** sebuah busur pada lingkaran yang panjangnya sama dengan jari-jari lingkaran ***r***. Besar sudut pusat **AOB** yang menghadap busur **AB** sebagai ***satu radian***. Karena keliling lingkaran sama dengan 2π ***r*** (nilai $\pi \approx 3{,}14$), ini berarti bahwa besar sudut pusat adalah: 2π radian. Besar sudut lingkaran dengan satu putaran adalah 360^0 sehingga $1^0 = \frac{1}{360^0}$. Satuan yang lebih kecil dari derajat adalah menit dan detik, $1^0 = 60'$ dan $1' = 60''$. Jadi:

$$2\pi \ radian = 360^0 \text{ atau } 1\pi \ radian = 180^0$$

persamaan tersebut adalah persamaan dasar antara radian dan derajat, oleh karena itu:

$$1\,radian = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 17' 45''$$

$$1^0 = \frac{\pi}{180} radian = 0{,}01745\, radian$$

CONTOH 8.1.1

Berapa besar sudut dalam radian jika diketahui besar sudut dalan derajat adalah 45^0 ?

Jawab.

Karena $1^0 = \frac{\pi}{180} radian = 0{,}01745\, radian$,

Maka $45^0 = 45\frac{\pi}{180} radian = \frac{\pi}{4} radian \approx 0{,}78525\, radian$

CONTOH 8.1.2

Berapa derajat jika besar sudut: 1,25 *radian* ?

Jawab

Karena $1\ radian = \dfrac{180^0}{p} \approx 57^0 17'45''$,

Maka $1{,}25\ radian = 1{,}25 \times \dfrac{180^0}{p} \approx 71^0 37'11''$

CONTOH 8.1.3

Nyatakan besar sudut: $\dfrac{2}{3}p$ dalam derajat !

Jawab

Karena $1p\ \ radian = 180^0$,

maka $\dfrac{2}{3}p = \dfrac{2}{3} \times 180^0 = 120^0$

CONTOH 8.1.4

Nyatakan besar sudut 540^0 dalam bentuk p *radian*

Jawab

Karena $1p\ \ radian = 180^0$,

Maka $540^0 = \dfrac{540^0}{180^0} \times p\ \ radian = 3p\ \ radian$

Latihan Soal 8 -1

1. Konversikan besaran sudut dalam derajat ke dalam *radian*

    a. 32^0 45’ c. 48^0 15’ 30”

    b. 128^0 21’ 35” d. 450^0 45’ 45”

2. Konversikan besaran sudut dalam *radian* ke dalam derajat

    a. 6,28 *radian* c. 9 *radian*

    b. 0,314 *radian* d. 11 *radian*

3. Ubahlah ke dalam satuan p *radian*

    a. 720^0 c. 315^0

    b. 450^0 d. 405^0

4. Ubahlah ke dalam satuan derajat

    a. $\frac{5}{6}p$ c. $\frac{11}{4}p$

    b. $\frac{3}{4}p$ d. $\frac{7}{3}p$

5. Ubahlah ke dalam satuan p *radian*

    a. -90^0 b. -60^o

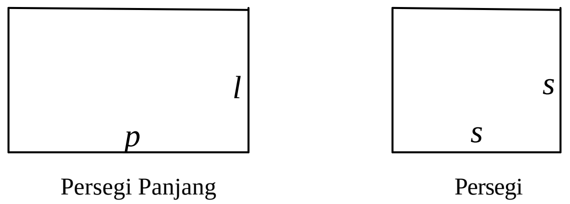
    c. -30^0 d. -180^0

8.2 KELILING BIDANG DATAR

Keliling suatu bangun datar yang tertutup merupakan jumlah panjang sisi-sisinya, dapat juga dikatakan bahwa keliling suatu bangun datar adalah jarak yang ditempuh bila suatu bangun dikitari sampai kembali ke tempat semula.

PERSEGI DAN PERSEGI PANJANG

Bangun datar yang berbentuk persegi panjang adalah bangun datar segi empat dengan sudut siku disetiap sudutnya, dimana mempunyai ukuran panjang dan lebar. Sedangkan persegi adalah keadaan khusus dari persegi panjang yaitu ukuran panjang dan lebar adalah sama. Seperti terlihat pada Gambar 8.8.2.4.



Gambar 8.8.2.4 Persegi dan Persegi Panjang

Keliling dari persegi panjang adalah jarak yang ditempuh jika mengitari sisi-sisinya dan kembali pada titik awal. Untuk persegi panjang, kelilingnya (K) adalah dua kali panjang (p) ditambah dua kali lebar (l) dan dinyatakan dengan:

$$K = 2p + 2l = 2(p + l)$$

Untuk persegi, karena panjang sisi-sisiya sama (s) maka keliling persegi dinyatakan dengan: $K = 2s + 2s = 4s$

CONTOH 8.8.2.4

Hitung keliling persegi panjang dengan panjang 20 satuan dan lebar 15 satuan !

Jawab

Keliling persegi panjang tersebut adalah:

$$K = 2(p + l) = 2(20 + 15) = 70 \ satuan$$

CONTOH 8.2.2

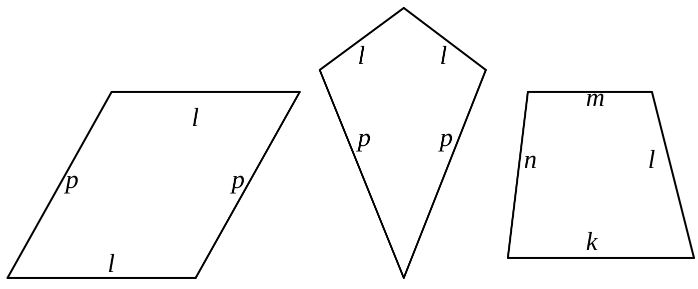
Hitung keliling persegi dengan panjang sisi-sisinya 20 satuan !

Jawab

Keliling persegi tersebut adalah: $K = 4s = 4 \times 20 = 80 \ satuan$

JAJARAN GENJANG, LAYANG – LAYANG DAN TRAPESIUM

Bentuk-bentuk segi empat yang lain adalah: Jajaran genjang, Layang-layang dan Trapesium. Jajaran genjang mempunyai dua pasang sisi yang saling sejajar, layang-layang dua pasang sisinya sama panjang sedangkan trapesium hanya memiliki sepasang sisi yang sejajar. Bentuk bangun datar ini diperlihatkan pada Gambar 8.2.2



Jajaran Genjang Layang - Layang Trapesium

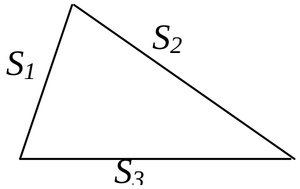
Gambar 8.2.2 Bangun datar Jajaran Genjang, Layang-Layang dan Trapesium

Keliling dari bangun segi empat ini dengan menghitung jarak yang ditempuh, jika mengitari bangun segi empat ini dan kembali ke titik asal. Dengan demikian keliling untuk masing masing banun segi empat ini adalah :

- □ Jajaran genjang: $K = 2(p + l)$
- □ Layang-layang : $K = 2(p + l)$
- □ Trapesium : $K = k + l + m + n$

SEGITIGA

Perhatikan Gambar 8.2.3, terlihat pada gambar bahwa persegi panjang yang ditarik sebuah garis yang melalui salah satu diagonalnya maka akan terbentuk bidang datar yang berbentuk segitiga.



Gambar 8.2.3 Segitiga

Keliling segitiga dinyatakan dengan menjumlahkan ketiga sisinya:

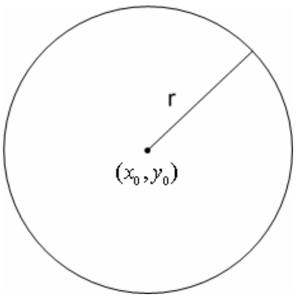
$$K = S_1 + S_2 + S_3$$

Terdapat 3 jenis segitiga yaitu:

- □ Segitiga siku-siku: salah satu sudutnya siku-siku
- □ Segitiga sama kaki: mempunyai dua sisi yang sama panjang
- □ Segitiga sama sisi: ketiga sisinya sama panjang

LINGKARAN

Bentuk-bentuk benda yang berupa lingkaran sering anda jumpai dalam kehidupan sehari-hari. Perhatikan bentuk roda kendaraan, jam tangan yang bulat, medali, uang logam merupakan contoh benda-benda yang berbentuk lingkaran. Bentuk Lingkaran diperoleh dengan menentukan tempat kedudukan atau himpunan semua titik-titik yang berjarak tetap terhadap sebuah titik (Gambar 8.2.4). Titik tetap (x_o, y_o) tersebut dikatakan *Pusat lingkaran* dan jarak r tersebut dikatakan *jari-jari* lingkaran.



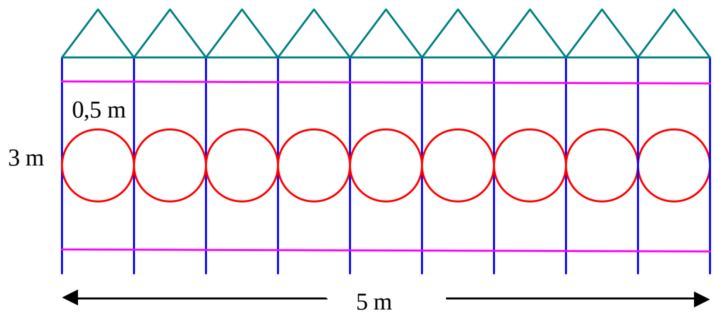
Gambar 8.2.4

Keliling sebuah lingkaran sama dengan dua kali p dikalikan dengan jari-jarinya, atau ditulis:

$$K = 2p\, r$$

Latihan Soal 8-2

1. Tentukan keliling dari bangun datar dibawah ini:
   a. Persegi Panjang dengan panjang = 6 cm, lebar = 3 cm
   b. Persegi dengan sisi = 4 cm
   c. Jajajaran genjang panjang = 12 cm, lebar = 8 cm
   d. Lingkaran dengan jari-jari = 5 cm
2. Sebuah jendela berbentuk persegi panjang dengan panjang = 2,4 m dan lebar 1,8 m. Diatas jendela diberi lengkungan setengah lingkaran.
   b. Tentukan keliling jendela
   c. Jika harga bahan Rp. 42.500,-/m dan ongkos pembuatan jendela Rp. 55.000,-. Tentukan harga jendela tersebut.
3. Sebuah pagar berbentuk seperti gambar dibawah ini, bagian atas pagar diberi hiasan segi tiga sama sisi.



   Jika harga bahan Rp. 35.000,-/m, ongkos pembuatan Rp. 225.000,- tentukan harga pagar.
4. Sebuah taman berbentuk persegi panjang dengan panjang 15 m dan lebar 10 m, keliling taman diberi pagar seperti pada soal 3. Berapa beaya yang dibutukhan untuk memberi pagar taman tersebut.

8.3 Luas

Luas daerah suatu bangun datar, yang selanjutnya disebut luas adalah ukuran yang menunjukkan besarmya permukaan untuk menutup bangun datar tersebut. Luas suatu bangun datar dinyatakan dengan L, yang mana rumus-rumus luas bangun datar yang sudah pernah kita pelajari kita ulas kembali.

PERSEGI DAN PERSEGI PANJANG

Bangun datar yang berbentuk persegi panjang adalah bangun datar segi empat dengan sudut siku disetiap sudutnya, dimana mempunyai ukuran panjang dan lebar. Sedangkan persegi adalah keadaan khusus dari persegi panjang yaitu ukuran panjang dan lebar adalah sama. Seperti terlihat pada Gambar 8.1.2. Luas dari persegi panjang adalah banyaknya besaran turunan yang dapat menutupi permukaan persegi panjang. Kalau panjang dari persegi panjang adalah p *satuan* dan lebar dari persegi panjang adalah l *satuan*, maka luas persegi panjang tersebut adalah:

$$L = p \times l$$

Sedangkan luas dari persegi adalah sisi (s) dikalikan dengan sisi (s) dan dinyatakan dengan:

$$L = s \times s = s^2$$

CONTOH 8.3.1

Tentukan luas dari persegi panjang dengan panjang 8 cm & lebar 4 cm

Jawab

$$L = p \times l = 8\,cm \times 4\,cm = 32\ cm^2$$

CONTOH 8.3.2

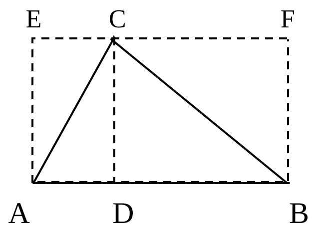
Tentukan luas dari persegi dengan panjang sisi $4\ m$

Jawab

$$L = s \times s = 4m \times 4m = 16\ m^2$$

SEGITIGA

Perhatikan Gambar 8.3.1. Terlihat pada gambar bahwa Luas segi tiga ABC sama dengan ½ luas persegi panjang ADCF ditambah ½ luas persegi panjang DBFC maka luas segi tiga ABC sama dengan ½ luas persegi panjang ADCE dan DBFC. Sehingga luas segitiga dapat dirumuskan sebagai berikut :



$$L = \frac{1}{2} \cdot (AB) \cdot (CD)$$

Gambar 8.3.1

Jika panjang alas (AB) segi tiga ABC adalah *a* dan Panjang dari garis tinggi CD adalah *t*, maka luas segitiga ABC dapat ditulis:

$$L = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t$$

CONTOH 8.3.3

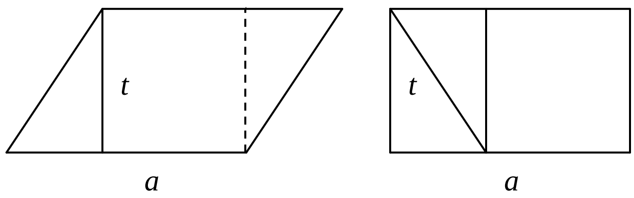
Tentukan luas segitiga yang panjang alasnya 8 *cm* dan tinggi 4 *cm*

Jawab

$$L = {}^1\!/_2 \cdot a \cdot t = {}^1\!/_2 \cdot 8cm \cdot 4cm = 16\ cm^2$$

JAJARAN GENJANG

Untuk mendapatkan luas jajaran genjang perhatikan Gambar 8.3.2. Buat garis tinggi dari sepasang sisi yang sejajar, potong bentuk segitiga sebelah kanan kemudian tempelkan ke segitiga sebelah kiri, bentuk bangun menjadi persegi panjang. Misalkan panjang alas jajaran genjang diketahui a dan tingginya t



Gambar 8.3.2 Jajaran genjang dan Persegi panjang yang dibentuk dari potongan Segitiga Jajaran genjang

Jadi luas jajajaran genjang dinyatakan dengan:

$$L = a \cdot t$$

CONTOH 8.3.4

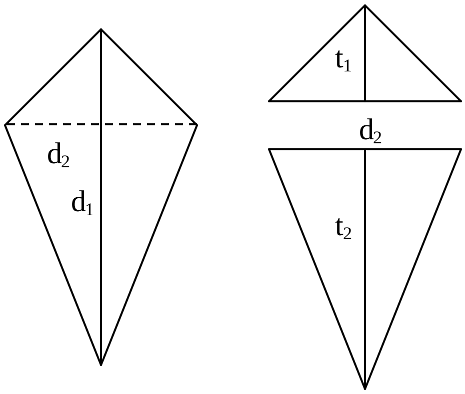
Tentukan luas jajaran genjang yang panjang alas 8 cm dan tinggi 4 cm

Jawab

$$L = a \cdot t = 8cm \cdot 4cm = 32\ cm^2$$

LAYANG – LAYANG

Luas layang-layang dicari dengan membuat garis diagonal-diagonalnya kemudian memotong salah satu diagonalnya. Dari potongan ini terdapat dua segitiga yang panjang alas sama dengan diagonal dan tinggi dari kedua segitiga sama dengan panjang diagonal yang lain seperti terlihat pada Gambar 8.3.3.



Gambar 8.3.3 Layang-layang dipotong menjadi dua segitiga

Luas segitiga potongan atas adalah : $L_{\Delta atas} = \frac{1}{2} \cdot d_2 \cdot t_1$

Luas segitiga potongan bawah adalah : $L_{\Delta bawah} = \frac{1}{2} \cdot d_2 \cdot t_2$

Luas layang-layang:

$$\begin{aligned} L_{\Delta atas} + L_{\Delta bawah} &= \left(\tfrac{1}{2} \cdot d_2 \cdot t_1\right) + \left(\tfrac{1}{2} \cdot d_2 \cdot t_2\right) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot d_2 \cdot (t_1 + t_2) \end{aligned}$$

Sedangkan $d_1 = t_1 + t_2$

Jadi luas layang-layang: $L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

CONTOH 8.3.5

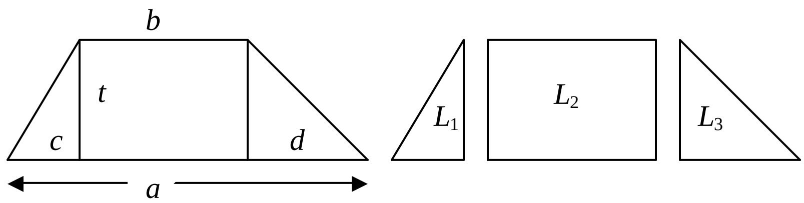
Tentukan luas layang-layang yang panjang diagonalnya 10 *cm* dan tinggi 6 *cm*

Jawab

$$L = {}^{1}\!/_{2} \cdot d_1 \cdot d_2 = {}^{1}\!/_{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30\,cm^2$$

TRAPESIUM

Perhatikan Gambar 8.3.4. Penghitungan luas trapesium dengan membuat dua garis tinggi dari alas trapesium, bidang dipotong mengikuti garis tinggi, dengan demikian ada dua bidang datar berbentuk segitiga dan satu berbentuk persegi panjang.



Gambar 8.3.4 Trapesium dan Tiga Potongan

Luas trapesium adalah jumlahan dari $L_1 + L_2 + L_1$

$$L_1 = \frac{1}{2} \cdot c \cdot t$$

$$L_2 = b \cdot t$$

$$L_3 = \frac{1}{2} \cdot d \cdot t$$

$$L_{trap} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot t + (b \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot d \cdot t$$

$$= \quad t \cdot \left(\frac{1}{2}c + b + \frac{1}{2}d \right)$$

$$= \; t \cdot \left(c + b + d - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d \right), \text{ panjang } a = c + b + d$$

$$= t \cdot \left(a - \frac{1}{2}(c + d) \right), \text{ panjang } c + d = a - b$$

$$L_{trap} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (a + b)$$

CONTOH 8.3.6

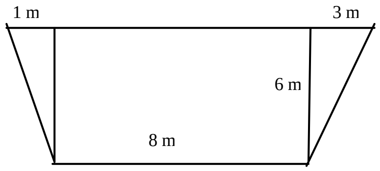
Tentukan luas trapesium dengan tinggi 4 *cm*, alas 6 *cm* dan 5 *cm*.

Jawab

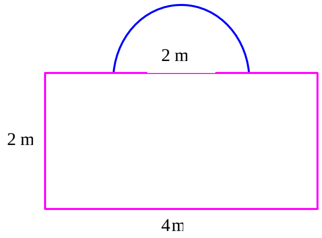
$$L_{trap} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot (a + b) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (6 + 5) = 22\, cm^2$$

Latihan Soal 8-3

1. Tentukan luas dari bangun datar dibawah ini:
   a. Persegi dengan sisi 3 cm
   b. Persegi panjang dengan panjang 5 cm, lebar 2 cm
   c. Segi tiga dengan alas 8 cm dan tinggi 7 cm
   d. Lingkaran dengan jari-jari 6 cm
2. Tentukan luas tanah pada gambar dibawah ini



3. Paving dengan ukuran 4 x 8 cm digunakan untuk menutup halaman sekolah yang berukuran 8 x 10 m
   a. Berapa banyak paving yang dibutuhkan
   b. Jika harga paving Rp. 2.500,-/buah berapa harga paving seluruhnya.
   c. Ongkos pemasangan paving Rp. 25.000,-/m^2 Berapa beaya yang dibutuhkan
   d. Agar lebih bagus digunakan paving merah sebanyak 12 m^2 dengan harga Rp. 2750,-/buah, berapa harga paving seluruhnya
4. Sebuah teras dari cor berbentuk persegi panjang dan diatasnya diberi setengah lingkaran seperti gambar dibawah, dengan ketebalan 5 cm tiap meter persegi membutuhkan semen 6 kg, harga semen yang berisi 50 kg Rp. 48.000,-
   a. Berapa luas teras
   b. Berapa kg semen yang dibutuhkan
   c. Berapa biaya untuk membeli semen



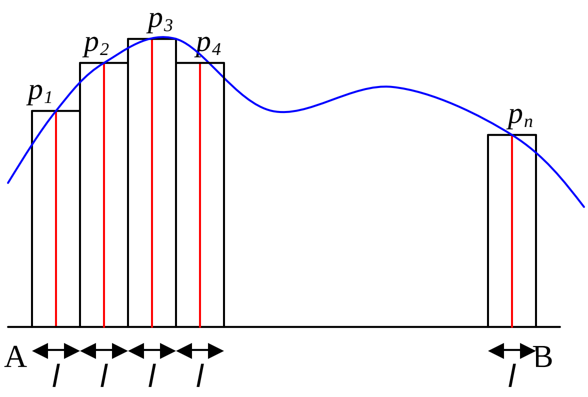
8.4 Luas Bidang Datar Dibawah Garis Lengkung

Prinsip untuk mendapatkan luas bidang datar dibawah garis lengkung dengan membagi bidang tersebut menjadi potongan-potongan yang berbentuk persegi panjang atau trapesium, hasil yang didapat merupakan pendekatan luas dari bidang datar tersebut. Terdapat dua cara untuk mendapatkan pendekatan luas bidang datar yaitu:

- Aturan titik tengah
- Aturan trapesoida

ATURAN TITIK TENGAH

Perhatikan Gambar 8.4.1 Luas bidang datar dibawah garis lengkung dari titik A sampai dengan titik B dibagi menjadi ***n*** potongan yang berbentuk persegi panjang dengan lebar yang sama.



Gambar 8.4.1 Luas dibawah garis lengkung dari titik A sampai titik B dipotong sebanyak n persegi panjang

Luas potongan persegi panjang adalah panjang kali lebar, dengan demikian luas bidang datar adalah jumlah dari potongan-potongan luas persegi panjang dan ditulis:

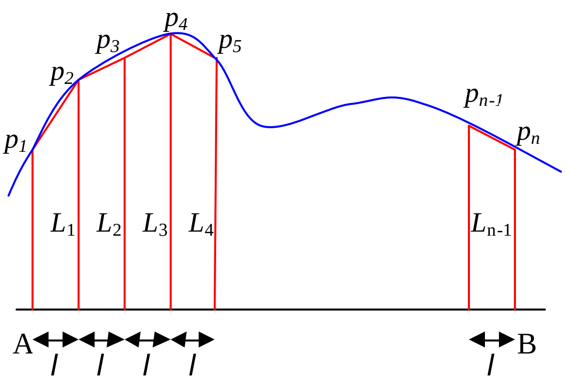
$$L \approx L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n$$
$$\approx (p_1 \times l) + (p_2 \times l) + (p_3 \times l) + \ldots + (p_n \times l)$$
$$\approx \sum_{i}^{n} p_i \times l$$

ATURAN TRAPESOIDA

Pendekatan luas dengan aturan trapesoida, potongan dibawah garis lengkung berbentuk trapesium seperti terlihat pada Gambar 8.4.2.

Lebar potongan merupakan tinggi trapesium, sehingga luas satu potong trapesium adalah:

$$L_1 = \frac{1}{2} \times l \times (p_1 + p_2)$$



Gambar 8.4.2 Luas dibawah garis lengkung dari titik A sampai titik B dipotong sebanyak (n-1) Trapesium

Luas seluruh dataran dibawah garis lengkung adalah:

$$L \approx L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_{n-1}$$
$$\approx \left[\frac{1}{2} \times l \times (p_1 + p_2)\right] + \left[\frac{1}{2} \times l \times (p_2 + p_3)\right] + \ldots +$$
$$\left[\frac{1}{2} \times l \times (p_n + p_{n-1})\right]$$

$$L \approx \frac{1}{2} \times l \times \left(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + \ldots + 2p_{n-1} + p_n\right)$$

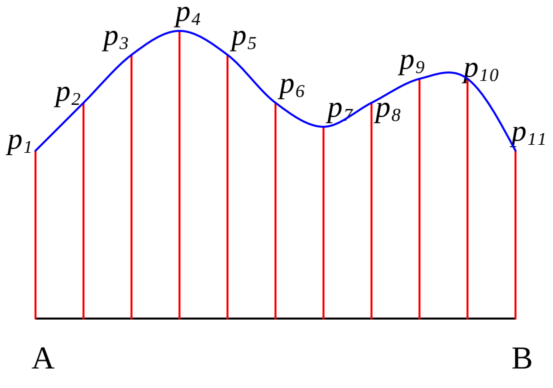
$$L \approx \frac{1}{2} \times l \times \left[\left(p_1 + p_n\right) + 2\left(p_2 + p_3 + \ldots + p_{n-1}\right)\right]$$

Perhatikan rumusan luas aturan trapesoida panjang awal ditambah akhir, panjang ditengah dijumlahkan kemudian dikalikan dengan dua.

CONTOH 8.4.1

Tentukan pendekatan luas pada gambar dibawah dengan menggunakan aturan titik tengah dan trapesoida untuk ***n*** = 10, panjang AB = 20 *cm* dan ukuran panjang (dalam cm)

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}
7,6	8,2	9,8	10	9,6	8,4	8	8,2	8,8	8,6	7,4



Jawab.

n = 10, panjang AB = 20 *cm*, lebar potongan: $l = \dfrac{20\,cm}{10} = 2\,cm$

□ <u>Aturan Titik Tengah</u>

Lebih dahulu menentukan panjang rata-rata setiap potongan luasan untuk potongan ke satu panjang rata-rata adalah:

$$\overline{p_1} = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{7,6 + 8,2}{2} = 7,9\,cm$$

Dengan cara yang sama didapat rata-rata panjang semua potongan sebagai berikut:

$\overline{p_1}$	$\overline{p_2}$	$\overline{p_3}$	$\overline{p_4}$	$\overline{p_5}$	$\overline{p_6}$	$\overline{p_7}$	$\overline{p_8}$	$\overline{p_9}$	$\overline{p_{10}}$
7,9	9	9,9	9,8	9	8,2	8,1	8,5	8,7	8

Jadi pendekatan luas bidang datar adalah:

$$L \approx 2\times(7,9 + 9 + 9,9 + 9,8 + 9 + 8,2 + 8,1 + 8,5 + 8,7 + 8)$$
$$\approx 2\times 87 = 174\,cm^2$$

□ <u>Aturan Trapesoida</u>

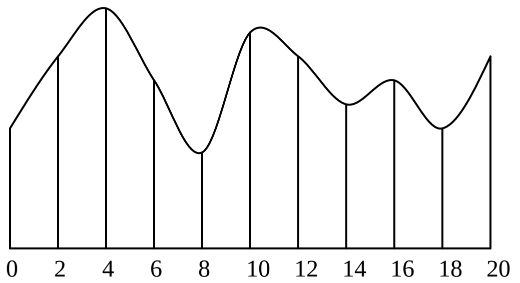
Penghitungan pendekatan luas dengan aturan trapesoida adalah sebagai berikut:

$$L \approx \frac{1}{2}\times 2\times(7,6 + 7,4 + 2\times(8,2 + 9,8 + 10 + 9,6 + 8,4 + 8 + 8,2 + 8,8 + 8,6))$$
$$\approx 1\times 174,2 = 174,2\ cm^2$$

Hasil pendekatan luas sedikit berbeda hal ini disebabkan pendekatan luas dengan aturan titik tengah potongan bidang datar berbentuk persegi panjang, sedangkan bentuk potongan mendekati bentuk trapesium. Jadi pendekatan luas yang paling baik adalah aturan trapesium.

Latihan Soal 8-4

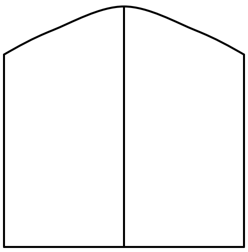
1. Tentukan luas daerah gambar dibawah ini, yang mempunyai data pengukuran seperti pada tabel yang diberikan:



l_i	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
P_i	5	6	7	5,5	4,5	6,5	6	5,3	5,5	5,2	6

2. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \dfrac{1}{x}$, $1 \le x \le 5$ dan sumbu x, ambil n = 10. Tentukan luas daerah dengan mengunakan
   a. Aturan titik tengah
   b. Aturan trapesoida

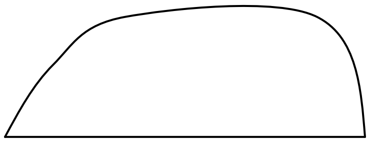
3. Gambar dibawah ini adalah sebuah jendela dengan data pengukuran, dipasang kaca dengan harga kaca Rp. 21.000,-/m^2. Tentukan harga kaca yang dibutuhkan dengan menggunakan
   a. Aturan titik tengah
   b. Aturan trapesoida



Data pengukuran (cm):

t	90	92	95	97	100	101	100	97	95	92	90
h	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70

4. Gambar dibawah ini adalah sebuah jendela mobil dengan data pengukuran, dipasang kaca dengan harga kaca Rp. 43.000,-/m^2. Tentukan harga kaca yang dibutuhkan dengan menggunakan
   a. Aturan titik tengah
   b. Aturan trapesoida



Data pengukuran (cm):

t	0	19	24	27	30	34	37	40	38	35	0
h	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60

5. Hitung luas daerah dibawah kurva $y=x^2$ yang dibatasi oleh garis $x=0$, $x=1$ dan sumbu X dengan pendekatan trapezium jika n=10.(Sertai gambar)

8.5 Transformasi Geometri

Transformasi geometri adalah pemindahan obyek bidang datar dari tempat asal ketempat yang lain. Terdapat empat bentuk transformasi geometri yaitu:

- □ Translasi (pergeseran)
- □ Rotasi (putaran)
- □ Refleksi (pencerminan)
- □ Dilatasi (Perbesaran atau perkecilan)

TRANSLASI

Translasi atau pergeseran adalah bentuk transformasi untuk memindah-kan suatu obyek pada bidang datar dengan jarak dan arah tertentu. Panjang jarak dan arah pada translasi dinyatakan oleh vektor $\overline{AB}$ atau pasangan berurutan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Suatu translasi dari R^2 (ruang dimensi dua) ke R^2 didefinisikan oleh pemetaan:

$$T : R^2 \to R^2$$

Titik $P(x, y)$ ditranslasikan oleh $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

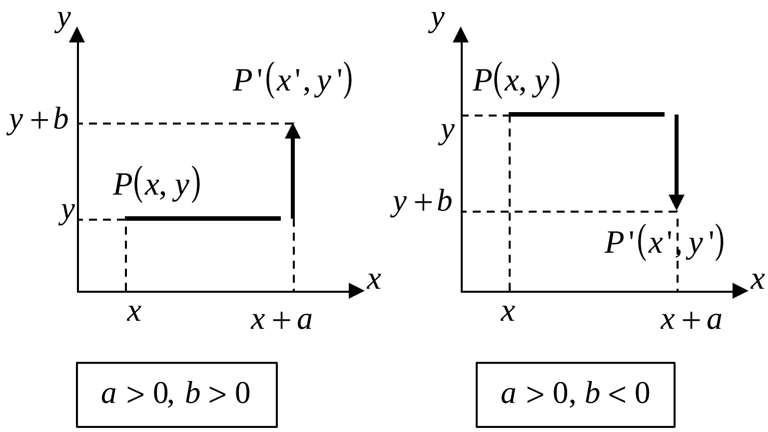
artinya titik $P(x, y)$ dipetakan ke titik $P'(x', y')$ sehingga berlaku hubungan:

$$x' = x + a$$
$$y' = y + b$$

Hubungan ini mengandung pengertian:

1. Jika $a > 0$ maka arah pergeseran kekanan dan jika $a < 0$ arah pergeseran kekiri.
2. Jika $b > 0$ maka arah pergeseran keatas dan jika $b < 0$ arah pergeseran kebawah.

Secara geometri diperlihatkan pada Gambar 8.5.1



Gambar 8.5.1 Translasi Titik $P(x, y)$ ke $P'(x', y')$

CONTOH 8.5.1

Tentukan bayangan titik $P(2,-5)$ dan $Q(-3,1)$ oleh translasi $T\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

Jawab

Untuk titik P: $P(2,-5) \to P'(2+2,-5+3) = P'(4,-2)$

Untuk titik Q: $Q(-3,1) \to Q'(-3+2,1+3) = P'(-1,4)$

CONTOH 8.5.2

Tentukan hasil translasi dari persamaan parabola $y = x^2$ oleh translasi $T\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, Gambarkan grafik sebelum dan sesudah translasi.

Jawab.

Persamaan translasi adalah:

$$x' = x - 1 \rightarrow x = x' + 1$$

$$y' = y + 3 \rightarrow y = y' - 3$$

Substitusikan persamaan translasi ke persamaan parabola didapat:

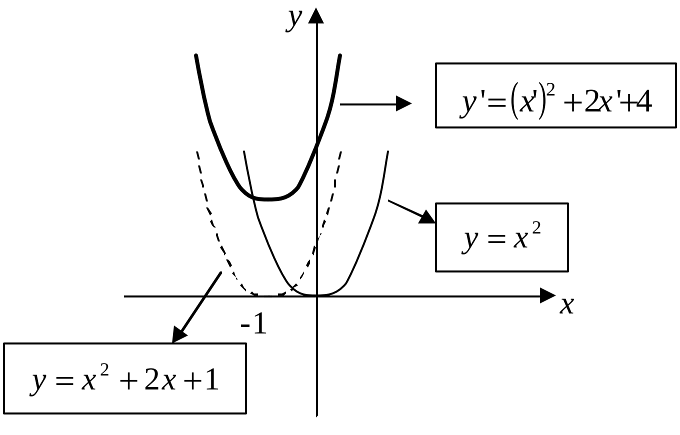
$$y = x^2$$

$$\leftrightarrow y' - 3 = (x' + 1)^2$$

$$\leftrightarrow y' = (x')^2 + 2x' + 1 + 3$$

$$\leftrightarrow y' = (x')^2 + 2x' + 4$$

Grafik parabola asal dan hasil translasi diperlihatkan pada gambar 8.5.2



Gambar 8.5.2 Grafik Parabola dan hasil Translasi

Pertama kita gambarkan grafik $y = x^2$, grafik ini digeser ke-kiri sejauh satu satuan (gambar garis putus-putus), kemudian dilanjutkan digeser ke-atas sejauh tiga satuan (gambar garis tebal).

CONTOH 8.5.3

Bayangan titik $(a-2b, a+b)$ oleh translasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah titik $(8,1)$

Tentukan bayangan titik $(2b, a+1)$ oleh translasi yang sama.

Jawab.

Bentuk translasi sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} a-2b \\ a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$a - 2b + a = 8 \rightarrow 2a - 2b = 8 \text{ …….. …….. } (1)$$

$$a + b + b = 1 \rightarrow a + 2b = 1 \text{ …………….. } (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) didapat $a = 3$ dan $b = -1$,

Oleh krena itu titik $(2b, a+1)$ = $(-2, 4)$.

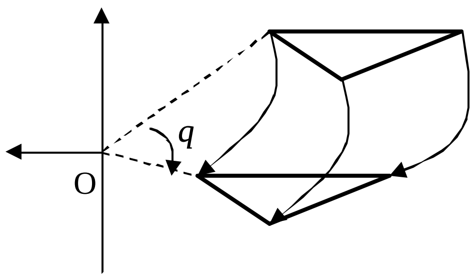
Bayangan titik $(-2, 4)$ oleh translasi $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ adalah:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik $(-2, 4)$ oleh tranlasi $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ adalah $(1,3)$

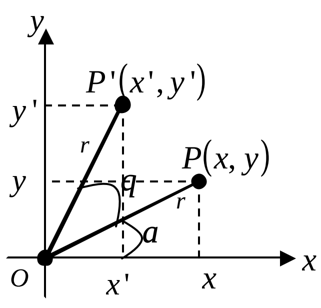
ROTASI

Rotasi adalah bentuk transformasi geometri untuk memindahkan obyek dengan cara pemutaran. Untuk melakukan rotasi diperlukan titik pusat, besar sudut dan arah sudut rotasi. Arah putaran sudut positif berlawanan dengan jarum jam, sebaliknya untuk arah sudut yang negatif putaran searah dengan jarum jam. Gambar 8.5.3 memperlihatkan bangun segitiga dirotasikan dengan pusat titik $O(0,0)$, sudut putar sebesar q searah jarum jam.



Gambar 8.5.3 Segitiga dirotasi pusat O sebesar q searah jarum jam

Misalkan titik $P(x, y)$ diputar dengan titik pusat $O(0,0)$ dengan sudut putar sebesar q berlawanan arah jarum jam, untuk mendapatkan titik hasil rotasi yaitu titik $P'(x', y')$ perhatikan Gambar 8.5.4.



Gambar 8.5.4 Rotasi titik $P(x, y)$ ke $P'(x', y')$

$OP = OP' = r$, $\angle XOP = a$, $\angle POP' = q$

$x = r\cos a$, $y = r\sin\ a$

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(a + q) \\ &= r(\cos a\ \cos q - \sin a\ \sin q) \\ &= r\ \cos a\ \cos q - r\sin a\ \sin q \\ &= x\cos q - y\sin q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= r\sin(a + q) \\ &= r(\sin\ a\ \cos q + \cos a\ \sin q) \\ &= r\sin\ a\ \cos q + r\cos a\ \sin q \\ &= y\cos q + x\sin q \\ &= x\sin q + y\cos q \end{aligned}$$

Jadi,

$$x' = x\cos q - y\sin q$$

$$y' = x\sin q + y\cos q$$

Dalam bentuk matriks persamaan diatas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bentuk matriks $\begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix}$ disebut matriks rotasi $R[O,q]$.

CONTOH 8.5.4

Diberikan titik-titik $A(2,4)$, $B(-3,5)$ dan $C(0,-3)$ diputar dengan sudut seperempat putaran berlawanan arah jarum jam, pusat sumbu sumbu putar O. Tentukan bayangannya !.

Jawab.

Persamaan rotasi dengan $\angle q = 90^0$ dengan pusat sumbu O adalah:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^0 & -\sin 90^0 \\ \sin 90^0 & \cos 90^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi,

$A'(-4,2)$, $B'(-5,-3)$ dan $C'(3,0)$

Sekarang kita bahas jika titik pusat putar bukan $O(0,0)$, misal $P(a,b)$. Penyelesaian masalah ini sama dengan mentranslasikan $O(0,0)$ ke titik $P(a,b)$, sehingga didapat persamaan:

$$x' - a = (x-a)\cos q - (y-b)\sin q$$

$$y' - b = (x-a)\sin q + (y-b)\cos q$$

atau dalam bentuk matriks:

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos q & -\sin q \\ \sin q & \cos q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

CONTOH 8.5.5

Tentukan bayangan dari persamaan parabola $y = x^2$ diputar dengan sudut putar sebesar 90^0 berlawanan arah jarum jam, titik pusat $(2,0)$

Jawab.

Pusat rotasi $(2,0)$, besar sudut putar 90^0 berlawanan arah jarum jam, persamaan rotasi:

$$x'-2 = (x-2)\cos 90^0 - (y-0)\sin 90^0$$
$$y'-0 = (x-2)\sin 90^0 + (y-0)\cos 90^0$$

$$\leftrightarrow \quad x' = 2 + (x-2)0 - (y)1$$
$$y' = 0 + (x-2)1 + (y)0$$

$$\leftrightarrow \quad x' = 2 - y$$
$$y' = x - 2$$

$$\leftrightarrow \quad y = 2 - x'$$
$$x = y' + 2$$

Substitusikan ke persamaan parabola $y = x^2$ didapat persamaan bayangan:

$$(2 - x') = (y'+2)^2$$

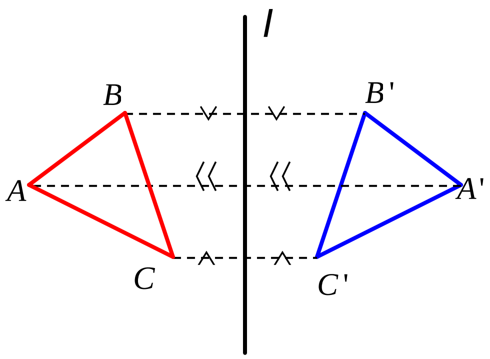
atau

$$x' = -(y')^2 - 4y' - 2$$

Jadi bayangan dari persamaan parabola $y = x^2$ yang diputar dengan sudut putar sebesar 90^0 berlawanan arah jarum jam, titik pusat $(2,0)$ adalah $x = -y^2 - 4y - 2$.

REFLEKSI (PENCERMINAN)

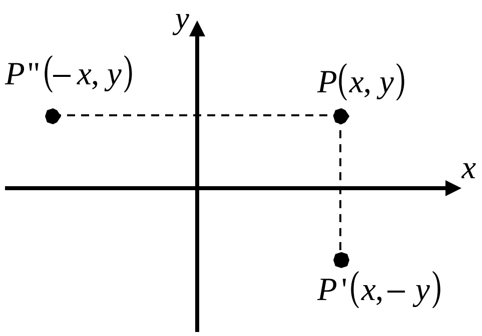
Refleksi (pencerminan) adalah bentuk transformasi geometri yang memindahkan obyek menjadi bayangan seperti di depan cermin. Misal suatu segitiga dicerminkan terhadap garis l, hasil dari pencerminan diperlihatkan pada Gambar 8.5.5.



Gambar 8.5.5 Segitiga ABC dicerminkan terhadap l

Pencerminan titik terhadap sumbu cermin, jarak titik asal ke sumbu cermin sama dengan jarak titik bayangan ke sumbu cermin.

Pada koordinat Kartesius, titik $P(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x dan sumbu y hasil dari pencerminan diperlihatkan pada Gambar 8.5.6.



Gambar 8.5.6 Pencerminan $P(x, y)$ ***terhadap sumbu koordinat***

Titik $P(x, y)$ dicerminkan terhadap sumbu x menghasikan $P'(x,-y)$, bentuk persamaan hasil pencerminan ini adalah:

$$x' = x \leftrightarrow x' = 1x + 0y$$

$$y' = -y \leftrightarrow y' = 0x - 1y$$

Dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriks $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ disebut matriks pencerminan terhadap sumbu x.

Dengan cara yang sama dapat dicari bentuk-bentuk matriks pencerminan pada sumbu-sumbu cermin yang lain, untuk memudahkan mempelajari pencerminan bentuk-bentuk matriks pencerminan ditulis dalam tabel 8.5.1

Tabel 8.5.1
Matriks Transformasi Pencerminan

Transformasi	Bentuk Matriks	Pemetaan
Pencerminan terhadap sumbu x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$
Pencerminan terhadap sumbu y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$
Pencerminan terhadap Pusat sumbu $O(0,0)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
Pencerminan terhadap garis $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$
Pencerminan terhadap garis $y = -x$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$(x, y) \rightarrow (-y, -x)$

Selanjutnya, pengembangan pencerminan dengan mengganti sumbu cerminnya. Hasil pencerminan terhadap beberapa sumbu cermin adalah sebagai berikut:

- □ Sumbu cermin garis $x = h$

  $P(x, y)$ hasil pencerminan (bayangan) adalah: $P'(2h - x, y)$
- □ Sumbu cermin garis $y = k$

  $P(x, y)$ hasil pencerminan (bayangan) adalah: $P'(x, 2k - y)$
- □ Sumbu cermin garis $y = mx$, bentuk matriks pencerminan:

$$M_{y=mx} = \frac{1}{m^2+1}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}$$

CONTOH 8.5.6

Diberikan titik-titik $A(2,4)$, $B(-3,5)$ dan $C(0,-3)$.

Tentukan bayangannya jika jika dicerminkan terhadap garis $y = x$

Jawab.

Matriks pencerminan terhadap garis $y = x$ adalah: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Persamaan matriks untuk titik-titik $A(2,4)$, $B(-3,5)$ dan $C(0,-3)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi hasil pencerminan didapat: $A'(4,2)$, $B(5,-3)$ dan $C(-3,0)$

CONTOH 8.5.7

Tentukan bayangan titik $(-3,7)$ jika dicerminkan terhadap garis $2x-y+3=0$

Jawab.

Ubah persamaan garis $2x-y+3=0$ menjadi $y=2x+3$.

Garis $y=2x+3$ diperoleh dari garis $y=2x$ ditranslasi oleh $T\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

Bayangan $(-3,7)$ dapat dicari dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Translasikan titik $(-3,7)$ dengan $T\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ diperoleh: $(-3,4)$
2. Tentukan matriks pencerminan garis $y=2x$

$$M_{y=2x}=\frac{1}{2^2+1}\begin{pmatrix}1-2^2 & 2.2\\ 2.2 & 2^2-1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

3. Cerminkan titik $(-3,4)$ terhadap garis $y=2x$ dengan menggunakan matriks pada 2. diperoleh:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\rightarrow (x,y)=(5,0)$$

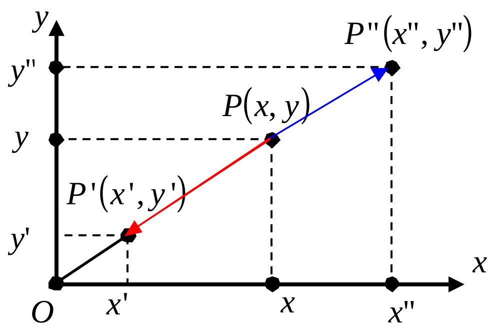
4. Translasikan titik $(5,0)$ dengan $T\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$ diperoleh $(5,3)$

Jadi hasil refleksi $(-3,7)$ terhadap garis $2x-y+3=0$ adalah: $(5,3)$

DILATASI

Dilatasi adalah bentuk transformasi geometri yang memperbesar atau memperkecil obyek tanpa mengubah bentuk obyek tersebut. Untuk melakukan dilatasi diperlukan pusat dilatasi dan faktor pengali atau skala. Jika skala > 1 maka bentuk obyek diperbesar, sebaliknya jika skal < 1 maka obyek diperkecil.

Perhatikan Gambar 8.5.7, suatu titik $P(x, y)$ dilakukan dilatasi dengan pusat $O(0,0)$ dengan skala ***a*.**



Gambar 8.5.7 Dilatasi titik $P(x, y)$

$a < 1$ ***menghasikan*** $P'(x', y')$, $a > 1$ ***menghasikan*** $P''(x'', y'')$

Persamaan dilatasi dengan pusat $O(0,0)$ dan k skala dinyatakan dalam bentuk:

$$x' = k\,x$$

$$y' = k\,y$$

Persamaan matriksnya adalah:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matriks $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ disebut matriks dilatasi $D[O,k]$

Untuk dilatasi dengan pusat $P(a,b)$ dengan skala k dan ditulis $D[P,k]$ bentuk persamaannya adalah:

$$x' = a + k(x - a)$$

$$y' = b + k(y - b)$$

Persamaan dalam bentuk matriks adalah:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

CONTOH 8.5.8

Tentukan bayangan titik $(6,8)$ oleh dilatasi:

a. $D[O,2]$

b. $D\left[O,\frac{1}{2}\right]$

Jawab

a. Titik $(6,8)$ dilatasi $D[O,2]$, gunakan persaman matriks dilatasi didapat:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil dilatasi $(12,16)$

b. Titik $(6,8)$ dilatasi $D\left[O,\frac{1}{2}\right]$, gunakan persaman matriks dilatasi didapat:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jadi, hasil dilatasi $(3,4)$

CONTOH 8.5.9

Tentukan bayangan dari persegi $ABCD$ dengan titik sudut $A(2,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-2)$ dan $D(2,-2)$ jika dilakukan dilatasi dengan pusat titik C dengan skala 2

Jawab.

Bentuk dilatasi adalah: $D[C,2]$

Persamaan matriks dilatasi untuk titik-titik: $A(2,2)$, $B(-2,2)$, $C(-2,-2)$ dan $D(2,-2)$ adalah:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2 & -2+2 & -2+2 & 2+2 \\ 2+2 & 2+2 & -2+2 & -2+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 & 6 \\ 6 & 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Titik-titik hasil dilatasi: $A'(6,6)$, $B'(-2,6)$, $C'(-2,-2)$ dan $D'(6,-2)$.

Latihan Soal 8-5

1. Diberikan koordinat titik segi tiga (0,0), (2,0) dan (2,3). Tentukan koordinat titik segi tiga jika dikenakan transformasi:
   a. Translasi: $T = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
   b. Translasi: $T = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
   c. Rotasi titik pusat O dengan $q = 60^0$
   d. Rotasi titik pusat O dengan $q = 240^0$
   e. Refleksi (pencerminan) terhadap titik O, sumbu x dan sumbu y
   f. Refleksi (pencerminan) terhadap garis $y = x$, y = -x dan $x = 2$
   g. Dilatasi dengan titik pusat O dan faktor skala: 3 dan 1/2
2. Titik A(2,-4) dengan translasi $T = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ menjadi A'(-1,2) tentukan m dan n
3. Diberikan persamaan parabola $y = x^2 + 1$, tentukan persamaan yang sesuai dan sket grafik jika ditransformasikan dengan:
   a. Translasi: $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   b. Rotasi titik pusat O dengan $q = 90^0$
   c. Rotasi titik pusat $P(0,1)$ dengan $q = 180^0$
   d. Refleksi (pencerminan) terhadap titik O, sumbu x dan sumbu y
4. Tentukan matriks refleksi terhadap garis $x = h$ dan $y = k$

8.6 KOMPOSISI TRANSFORMASI

Kita dapat melakukan beberapa transformasi, misal pertama suatu obyek ditranslasi dengan T_1 kemudian dilanjutkan translasi yang kedua dengan T_2 yang dinyatakan dengan $(T_2 \circ T_1)(x, y)$, bentuk ini dinamakan komposisi dua translasi. Bentuk komposisi transformasi yang lain dengan menggabungkan bentuk-bentuk transformasi yang telah dipelajari pada subbab 8.5.

KOMPOSISI TRANSLASI

Misal diberikan translasi $T_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $T_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, komposisi dua translasi T_1 dan T_2 dinyatakan:

$$(T_2 \circ T_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$(T_1 \circ T_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a \\ d+b \end{pmatrix}$$

Karena jumlah bilangan bersifat komutatif, maka:

$$(T_2 \circ T_1) = (T_1 \circ T_2)$$

<u>Catatan</u>

- $(T_2 \circ T_1)$ artinya obyek ditranslasi oleh T_1 dilanjutkan dengan T_2
- $(T_1 \circ T_2)$ artinya obyek ditranslasi oleh T_2 dilanjutkan dengan T_1

Walaupun memberi hasil yang sama tetapi penekanan pada urutan pengerjaan translasi.

KOMPOSISI ROTASI

Misalkan titik $P(x, y)$ dilakukan rotasi oleh $R_1[O,q_1]$ kemudian dilanjutkan dengan $R_1[O,q_2]$, komposisi rotasi dari R_1 dilanjutkan dengan R_2 dinyatakan:

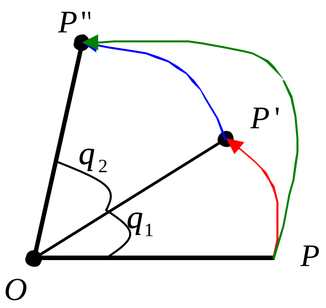
$$(R_2 \circ R_1)(x, y) = \begin{pmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos q_1 \cos q_2 - \sin q_1 \sin q_2 & -\cos q_1 \sin q_2 - \sin q_1 \cos q_2 \\ \sin q_1 \cos q_2 + \cos q_1 \sin q_2 & -\sin q_1 \sin q_2 + \cos q_1 \cos q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(q_1 + q_2) & -\sin(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) & \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi, merotasikan suatu obyek menggunakan komposisi rotasi berarti merotasikan obyek tersebut dengan jumlah sudut masing-masing rotasi.

Secara geometri diperlihatkan pada gambar 8.6.1



Gambar 8.6.1 Komposisi Rotasi

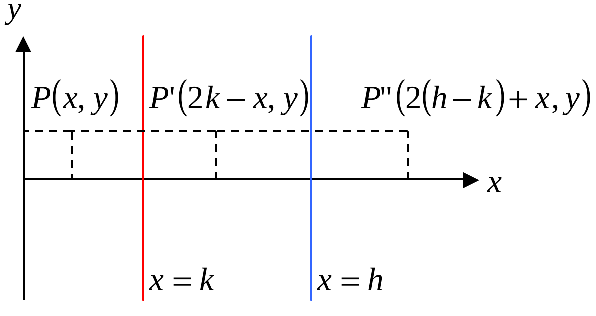
Titik P dirotasikan pusat O besar sudut q_1 didapat P' dilanjutkan rotasi pusat O besar sudut q_2 didapat P'' atau dapat dilakukan dengan pusat O dengan besar sudut rotasi $q_1 + q_2$.

KOMPOSISI REFLEKSI (PENCERMINAN)

Misalkan titik $P(x, y)$ dilakukan refleksi terhadap garis $x = k$ kemudian dilanjutkan dengan $x = h$, komposisi refleksi dari M_1 dilanjutkan dengan M_2 dinyatakan:

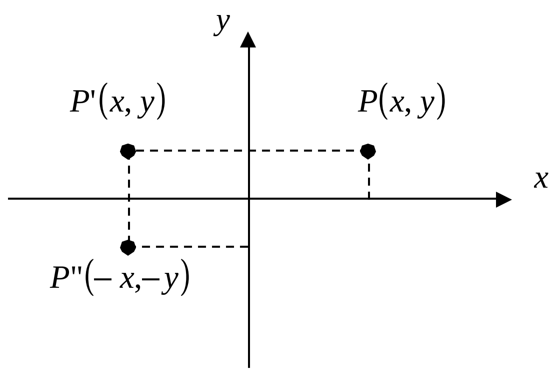
$$
\begin{aligned}
(M_2 \circ M_1)\ (x, y) &= M_2\left([M_1](x, y)\right) \\
&= M_2\,(2k - x, y) \\
&= (2h - (2k - x), y) \\
&= (2(h - k) + x, y)
\end{aligned}
$$

Secara geometri hasil dari komposisi $(M_2 \circ M_1)\ (x, y)$ terhadap garis $x = k$ dilanjutkan dengan $x = h$ diperlihatkan pada gambar 8.6.2.



Gambar 8.6.2 Komposisi Refleksi terhadap dua garis sejajar

Bagaimana jika titik $P(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu koordinat, untuk itu perhatikan gambar 8.6.3 dibawah ini. Titik $P(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu y menghasilkan $P'(x, y)$ dilanjutkan terhadap sumbu x menghasilkan $P''(x, y)$. Bagaimana jika $P(x, y)$ direfleksikan terhadap sumbu x dilanjutkan sumbu y, dicoba sendiri sebagai latihan.



Gambar 8.6.3 Refleksi terhadap sumbu y dilanjutkan sumbu x

KOMPOSISI LEBIH DARI DUA TRANSFORMASI

Setelah kita mengerti komposisi dua transformasi, untuk mempelajari komposisi lebih dari dua transformasi sangatlah mudah. Hal penting untuk diingat adalah operasi transformasi mana yang lebih dahulu dikerjakan dan bentuk serta operasi dari matrik transformasi. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh dibawah ini.

CONTOH 8.6.1

Titik $P(2,3)$ ditranslasikan terhadap $T=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, dilanjutkan rotasi dengan titik pusat O dengan $q=90^0$, selanjutnya direfleksikan terhadap sumbu x.

Jawab

Urutan dan hasil transformasi adalah:

$$\left[M_{sumbu\ x}\circ R_{[O,90^0]}\circ T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right](2,3)=$$

$$=\left[M_{sumbu\ x}\circ R_{[O,90^0]}\right]\circ T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}(2,3)$$

$$=\left[M_{sumbu\ x}\circ R_{[O,90^0]}\right]\left[\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left[M_{sumbu\ x}\right]\circ R_{[O,90^0]}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$$

$$=\left[M_{sumbu\ x}\right]\circ\left[\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}\right]$$

$$=\left[M_{sumbu\ x}\right]\circ\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-5\\-1\end{pmatrix}$$

Jadi titik $P(2,3)$ hasil dari tiga transformasi berurutan: $(-5,-1)$

Latihan Soal 8-6

1. Carilah nilai p dan q dalam masing-masing persamaan berikut ini

   a. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} p \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

2. Carilah peta dari titik dan transformasi yang ditentukan dibawah ini

   a. Titik (2, - 4) oleh pencerminan berturutan terhadap garis $x = 3$ kemudian terhadap garis $x = 7$

   b. Titik (-3, 2) oleh pencerminan berturutan terhadap garis $y = -1$ kemudian terhadap garis $y = 5$

   c. Jika (5, 1) $\rightarrow$ (1, 1) oleh pencerminan berturutan terhadap $x = 4$, kemudian $x = h$, carilah h

3. Misalkan refleksi terhadap sumbu x adalah X dan refleksi terhdapa garis $y = x$ adalah M

   a. Berilah transformasi tunggal yang ekuivalen dengan $M \circ X$, dan tulislah peta dari $P(a, b)$

   b. Tulislah matriks A dan yang berkaitan dengan X dan M, dan periksa apakah BA merupakan matriks yang berkaitan dengan $M \circ X$

   c. Periksa apakah $AB = BA$

4. Carilah matriks yang berkaitan dengan pencerminan terhadap sumbu y dilanjutkan dengan setengah putaran terhadap pusat. Periksa hasilnya secara geometri.

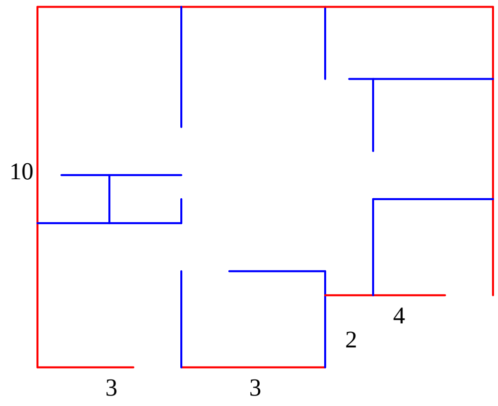
5. Perlihatkan bahwa matriks $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ memberikan transformasi yang sama dengan dilatasi $[O, 5]$ dilanjutkan dengan rotasi sebesar suatu sudut lancip q terhadap pusat, dimana $\tan q = \frac{3}{4}$. Apakah transformasi-transformasi dalam komposisi tersebut bersifat komutatif ?.

8.7 PENERAPAN GEOMETRI DIMENSI DUA

Penerapan dalam kehidupan sehari-hari perlu diperhatikan kondisi yang ada di Lapangan, penghitungan yang eksak harus dibulatkan keatas. Contoh pada pemasangan keramik untuk lantai rumah kurang 3 buah, kita tidak bisa membeli keramik hanya 3 buah tetapi harus satu dos, demikian juga dalam perhitungan yang lain.

CONTOH 8.7.1

Perhatikan denah rumah dibawah ini ukuran dalam m, lantai rumah akan dipasang keramik yang berukuran 30 x 30 cm. Satu dos berisi 10 buah keramik, harga satu dos keramik Rp. 42.000,-. Ongkos pemasangan Rp. 25.000,- per m^2 . Tentukan Beaya yang dibutuhkan !.



Jawab

Luas lantai adalah: $(10\times10)m^2 - (2\times4)m^2 = 92\,m^2$

1 dos keramik luasnya adalah: $(30\times30)\,cm^2 \times10 = 9000\ cm^2$

Kebutuhan keramik: $\dfrac{92\,m^2}{0{,}9\,m^2} = 102{,}222$ dos, dibulatkan 103 dos.

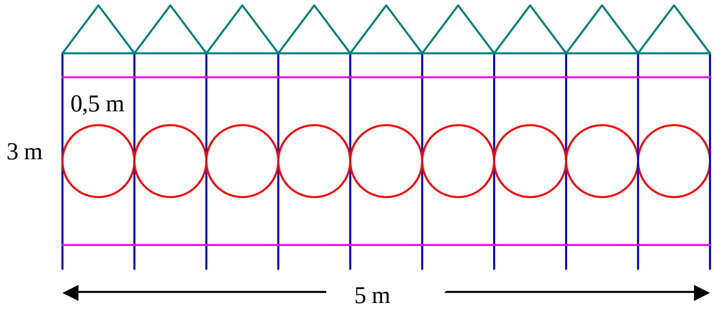
Beaya yang dibutuhkan:

1. Pembelian keramik: 103 x Rp. 42.000,- = Rp. 4.326.000,-
2. Ongkos Pemasangan: 92 x Rp. 25.000,- = Rp. 2.300.000,-

Total beaya yang dibutuhkan = Rp. 6.626.000,-

Contoh 8.7.2

Sebuah taman yang berukuran 15 m x 10 m diberi pagar yang berbentuk seperti gambar dibawah ini. Bahan pagar dibuat dari besi dengan harga Rp. 27.000,-/m. Tentukan harga bahan yang dibutuhkan.



Panjang besi

- Vertikal (warna biru) = 3 m x 10 = 30 m
- Horisontal (warna merah muda) = 5 m x 2 = 10 m
- Segitiga = 3 x 0,5 m x 9 = 13,5 m
- Lingkaran = 9 x 2 x 3,14 x 0,5 m = 28, 26 m

Jumlah = 81,76 m

Ukuran pagar taman = 15 m x 10 m

Bahan yang dibutuhkan untuk panjang taman: 3 x 81,76 m = 245,28 m

Bahan yang dibutuhkan untuk lebar taman : 2 x 81,76 m = 163,52 m

Total bahan yang dibutuhkan = 408,8 m

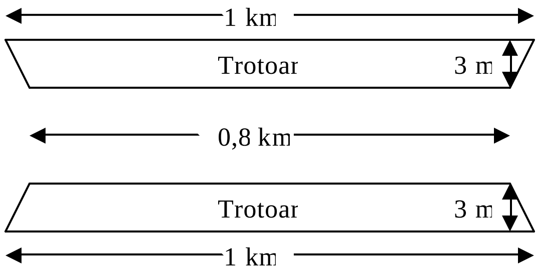
Harga bahan Rp. 27.000,-

Harga bahan seluruhnya adalah:

Rp. 27.000,- x 408,8 m = Rp. 11.037.600,-

Latihan Soal 8-7

1. Tepi-tepi jalan pada gambar dibawah ini dibangun trotoar terbuat dari paving berukuran 10 cm x 4 cm, harga paving Rp. 60.000,-/m^2, ongkos pemasangan Rp. 24.000,-/m^2. Tentukan total beaya yang dibutuhkan



2. Anggaran yang tersedia untuk pembangunan jaringan pipa air sebesar Rp. 50.000.000,-, pipa yang digunakan berukuran 1 dim dengan panjang 6 m, harga satu lonjor pipa Rp. 42.000,-, harga sambungan pipa Rp. 5.000,-/buah. Ongkos pemasangan pipa setiap 10 lonjor Rp. 45.000,-. Berapa m panjang pipa air yang terpasang.
3. Dinding sebuah hotel dengan luas 15.600 m^2 dilakukan pengecatan, 1 galon cat berisi 5 kg cukup digunakan untuk mengecat 15 m^2 . Berapa galon cat yang dibutuhkan.
4. Lantai sebuah lobi hotel berukuran 10 m x 8 m akan dipasang keramik berukuran 40 cm x 40 cm, 1 dos keramik berisi 6 keramik, berapa dos keramik yang dibutuhkan.

Bab

9

PELUANG

Hitung peluang mula-mula dikenal pada abad ke-17 yang bermula dari permainan sebuah dadu yang dilempar. Peluang (kemungkinan) dari permukaan dadu yang tampak ketika dilempar, diamati dan dihitung, perhitungan inilah yang disebut ilmu hitung peluang yang kemudian sangat barmanfaat bagi ilmu yang lain,misalnya pada matematika melahirkan ilmu statistic.

9.1 PENGERTIAN DASAR

Ruang Sampel adalah himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan, biasanya dilambangkan dengan S. Kejadian adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel. Kejadian dapat terdiri dari satu titik sampel yang disebut kejadian sederhana, sedangkan kejadian majemuk adalah gabungan beberapa kejadian sederhana. Ruang nol adalah himpunan bagian ruang sampel yang tidak mengandung satupun anggota. Titik sampel adalah setiap elemen dari ruang sampel.

CONTOH 9.1.1

Pada percobaan pelemparan sebuah dadu, kemungkinan hasil percobaannya adalah:

Jika ditinjau dari angka yang muncul maka ruang sampelnya adalah

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Jika ditinjau dari keadaan angkanya maka ruang sampelnya adalah

S = {genap, gasal}

CONTOH 9.1.2

Pada percobaan pengambilan sebuah kartu bridge, kemungkinan hasil percobaannya adalah

Jika ditinjau dari jenis kartu maka ruang sampelnya adalah

S = {?, ?, ?,?**}**

Jika ditinjau dari warna kartu maka ruang sampelnya adalah

S = {Merah, Hitam}

Irisan Dua kejadian $(A \cap B)$ adalah kejadian yang mengandung semua unsur persekutuan kejadian A dan B. Kejadian saling terpisah (saling asing) adalah dua kejadian yang tidak memiliki unsur persekutuan, $A \cap B = f$. Gabungan dua kejadian $(A \cup B)$ adalah kejadian yang mencakup semua unsur atau anggota A atau B atau keduanya. Komplemen suatu kejadian (A') adalah himpunan semua anggota S yang bukan anggota A.

CONTOH 9.1.3

Percobaan pelemparan 2 buah mata dadu, kemungkinan hasil percobaannya adalah

S = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)
(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Jika A adalah kejadian munculnya dadu dengan jumlah mata dadu sama dengan 1 maka

A = { }, kejadian mustahil

Jika B adalah kejadian munculnya dadu dengan jumlah mata dadu sama dengan 7 maka

B = {(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(5,1)}

Jika C adalah kejadian munculnya dadu dengan jumlah mata dadu sama dengan 11 maka

C = {(5,6),(6,5)}

Jika D adalah kejadian munculnya mata dadu pertama adalah 5 maka

D = {(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)}

Irisan kejadian A dan B adalah

$A \cap B = \{ \ \}$

Irisan kejadian B dan C adalah

$B \cap C = \{ \ \}$

Irisan kejadian C dan D adalah

$C \cap D = \{(5,6)\}$

Gabungan kejadian A dan B adalah

$A \cup B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(5,1)\}$ = B

Gabungan kejadian B dan C adalah

$$B \cup C = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(5,1),(5,6),(6,5)\}$$

Gabungan kejadian C dan D adalah

$$C \cup D = \{(5,6),(6,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\}$$

9.2 KAIDAH PENCACAHAN

Untuk menentukan jumlah titik sampel yang ada dalam ruang sampel diperlukan prinsip dasar menghitung, diantaranya kaidah penggandaan, permutasi dan kombinasi. Ada dua aturan dasar untuk menghitung jumlah anggota dari suatu himpunan,

1. Aturan penjumlahan, yaitu jika ada n_1 benda yang berbeda dihimpunan pertama dan n_2 benda dihimpunan kedua dan kedua himpunan saling asing (tidak beririsan), maka total anggota dikedua himpunan adalah n_1+n_2.
2. Aturan perkalian, akan dijelaskan dalam dalil 1 dan dalil 2.

CONTOH 9.2.1 :

Ekskul Basket" SMK mempunyai anggota 65 orang siswa dan "Ekskul Karate" mempunyai anggota 45 orang siswa, jika tidak ada siswa yang merangkap kedua ekskul, maka jumlah anggota kedua ekskul adalah 65 + 45 = 110.

9.2.1 FAKTORIAL

Hasil kali dari bilangan-bilangan bulat positif dari 1 sampai dengan n, yaitu

$$1.2.3.4 \ldots (n-2).(n-1).n$$

sering digunakan dalam matematika yang diberi notasi n! (dibaca n faktorial).

$$n! = n.(n-1).(n-2)\ldots. 3.2.1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

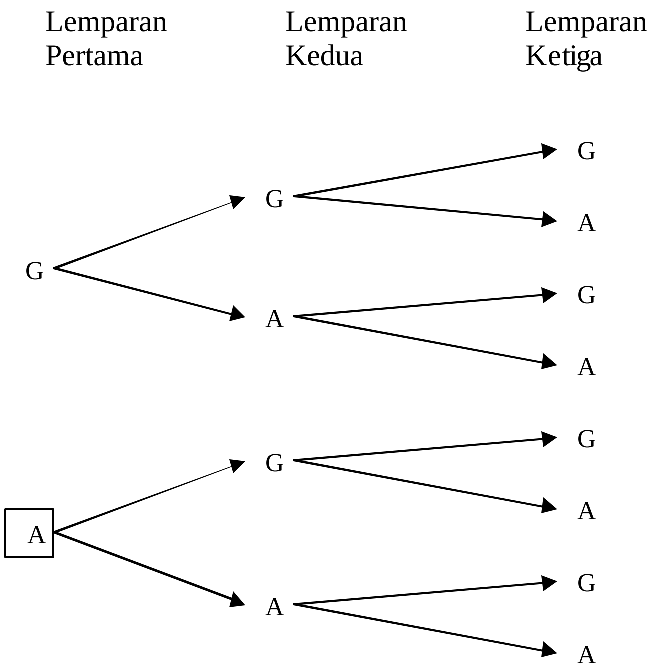
CONTOH 9.2.2

$$4! = 4.3.2.1 = 24$$

$$6! = 6.5! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

9.2.2 PRINSIP DASAR MENGHITUNG DENGAN DIAGRAM POHON

Dalam percobaan sederhana, sebuah diagram pohon dapat digunakan dalam perhitungan ruang sampel. Misalnya pada percobaan pelemparan sebuah uang 3 kali. Himpunan hasil yang mungkin dapat diperoleh oleh seluruh garis yang ditunjukkan dalam diagram pohon berikut,



Karena dalam setiap percobaan ada 2 kemungkinan hasil suatu percobaan dari 3 kali percobaan, maka dalam ruang sample ada sebanyak $2^3 = 8$ buah titik sampel. Jadi S = {GGG, GGA, GAG, GAA, AGG, AGA, AAG, AAA}.

CONTOH 9.2.4

Jika dari kota A menuju kota B ada 3 jalan yaitu (p,q,r) sedangkan dari kota B ke kota C ada 2 jalan yaitu (a,b) maka dari kota A ke kota C dapat melalui 3 x 2 = 6 jalan yang berbeda, yaitu

S = {(p,a),(p,b),(q,a),(q,b),(r,a),(r,b)}

DALIL 1 KAIDAH PENGGANDAAN

Bila suatu operasi dapat dilakukan dalam n_1 cara dan bila untuk setiap cara tersebut operasi kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara maka kedua operasi itu secara bersama-sama dapat dilakukan dalam $n_1 . n_2$ cara.

CONTOH 9.2.3

Bila sepasang dadu dilemparkan sekali, berapa banyak titik sampel dalam ruang sampelnya ?

Penyelesaian :

Jika sepasang dadu dilemparkan satu kali maka dadu pertama akan muncul 6 cara sedangkan dadu kedua .akan muncul 6 cara juga

Dengan demikian, sepasang dadu tersebut dapat terjadi dalam (6)(6) = 36 cara.

DALIL 2 KAIDAH PENGGANDAAN UMUM

Bila suatu operasi dapat dilakukan dalam n_1 cara bila untuk setiap cara tersebut operasi kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara, bila untuk setiap pasangan dua cara yang pertama dapat dilakukan dalam n_3 cara pada operasi ke tiga, demikian seterusnya, maka k operasi dalam urutan tersebut dapat dilakukan dalam n_1 n_2 $n_3 \ldots n_k$ cara.

CONTOH 9.2.5

Berapa macam menu makan siang yang terdiri atas sayur, lauk dan buah yang dapat dipilih dari 4 macam sayur, 3 macam lauk dan 5 macam buah ?

Penyelesaian :

Banyak macam menu makan siang ada sebanyak (4)(3)(5) = 60 macam.

CONTOH 9.2.6

Diketahui empat angka 1,2,5,8, tentukan banyak semua bilangan yang dapat dibuat dari angka tersebut yang terdiri dari

a. 2 angka

b. 2 angka tetapi tidak boleh ada yang sama.

Penyelesaian :

a. Untuk mempermudah sediakan dua kotak yang akan diisi jumlah kemungkinan tiap tahap, yaitu letak angka puluhan dan angka satuan

$$\boxed{4} \quad \boxed{4} \quad = \quad 16$$

Kotak pertama adalah posisi angka puluhan, dimana ada 4 kemungkinan, kotak kedua posisi angka satuan juga ada 4 kemungkinan, jadi jumlah kemungkinannya adalah 4 x 4 = 16.

b. Dengan cara yang sama dengan penyelesaian soal a, tetapi karena tidak boleh sama angkanya maka kalau angka puluhan sudah muncul kemungkinan angka satuannya berkurang satu dan jumlah kemungkinannya adalah 4 x 3 = 12.

9. 2.3 PERMUTASI

DEFINISI 9.2.1

Permutasi adalah suatu susunan yang dibentuk oleh keseluruhan atau sebagian dari sekumpulan benda. Susunan pada permutasi memperhatikan urutannya.

DALIL 3 **.** Banyaknya permutasi n benda yang berbeda ada n!

CONTOH 9.2.7

Jika ada 3 huruf a, b dan c, ada berapa cara dapat dibuat susunan ketiga huruf tadi secara berbeda.

Penyelesaian :

Susunan yang dapat dibuat ada sebanyak 3! = 6, yaitu abc, acb, bac, bca, cab dan cba.

Permutasi Sebagian adalah bila diantara unsur yang berlainan akan diberikan urutan untuk r unsur (r = n) yang berlainan dinyatakan dalam dalil 4.

DALIL 4 :**.** Banyaknya permutasi akibat pengambilan r benda dari n benda yang berbeda

$$nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

CONTOH 9.2.8

Dua kupon diambil dari 5 kupon untuk menentukan hadiah pertama dan kedua. Hitung banyak titik sampel dalam ruang sampelnya.

Penyelesaian :

Jika 1,2,3,4,5 menyatakan no. kupon, (1,2) adalah hadiah pertama untuk kupon no. 1 dan hadiah kedua untuk kupon no. 2, maka kemungkinan yang mendapat hadiah adalah sebagai berikut :

1,2	2,1	3,1	4,1	5,1
1,3	2,3	3,2	4,2	5,2
1,4	2,4	3,4	4,3	5,3
1,5	2,5	3,5	4,5	5,4

Banyak titik sampel adalah

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = (4)(5) = 20$$

CONTOH 9.2.9

Empat orang masuk kedalam bus dan terdapat 10 tempat duduk. Tentukan banyak semua kemungkinan posisi empat orang tersebut akan duduk.

Penyelesaian ;

Masalah ini adalah merupakan permutasi empat tempat duduk terisi dari 10 tempat duduk kosong yang tersedia, yaitu sebanyak

$$
\begin{aligned}
{}_{10}P_4 &= \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} \\
&= \frac{1.2.3.4 \ldots 10}{1.2.3.4.5.6} \\
&= (7)(8)(9)(10) \\
&= 5040
\end{aligned}
$$

CONTOH 9.2.10

Petugas ruang baca sekolah bermaksud untuk mengatur rak buku sehingga buku bahasa yang sama akan berjajar berdekatan. Jika tempat yang tersedia untuk 12 buku untuk 5 buku berbeda dalam bahasa Inggris, 4 buku berbeda dalam bahasa Arab dan 3 buku berbeda dalam bahasa Jepang, tentukan banyak kemungkinan susunan buku tersebut.

Penyelesaian :

Pertama kali dapat ditentukan bahwa terdapat 3 unsur bahasa, yaitu Inggris, Arab dan jepang. Kemudian, jika susunan bahasa telah ditentukan, masing-masing buku dengan bahasa sama akan berpermutasi antara mereka sendiri. Karena permutasi antar bahasa dan permutasi antar buku saling bebas, maka jumlah permutasi diperoleh dengan mengalikan semuanya. Permutasi bahasa ada 3!, permutasi bahasa Inggris 5!, bahasa Arab 4! Dan bahasa Jepang 3! Maka jumlah semua kemungkinannya adalah :

3! 5! 4! 3! = 103.680 susunan

DALIL 5 :. Banyaknya permutasi n benda yang berbeda yang disusun dalam suatu lingkaran adalah $(n-1)!$

CONTOH 9.2.11

Jika kita mempunyai 4 permata dan ingin dibuat gelang, ada berapa cara kita dapat menempatkan permata tadi dalam gelang yang berbeda.

Penyelesaian

Banyak cara menempatkan permata adalah

$$(4-1)! = 3! = 6$$

DALIL 6 : PERMUTASI UNTUK UNSUR YANG SAMA

Banyaknya permutasi yang berbeda dari n benda yang n_1 diantaranya berjenis pertama, n_2 berjenis kedua, ... n_k berjenis k adalah

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,.....\,n_k!}$$

CONTOH 9.2.15 :

Berapa banyak susunan yang berbeda bila ingin membuat serangkaian lampu hias untuk pohon natal dari 3 lampu merah, 4 lampu kuning dan 2 lampu biru.

Penyelesaian :

Banyaknya lampu merah ada 3 $\Rightarrow$ n (M)= 3

Banyaknya lampu kuning ada 4 $\Rightarrow$ n (K)= 4

Banyaknya lampu biru ada 2 $\Rightarrow$ n (B)= 2

Banyaknya semua lampu ada 9 $\Rightarrow$ n (L) = 2

Jadi Banyak susunan yang berbeda ada

$$\frac{n(L)!}{n(M)!\,n(K)!\,n(B)!} = \frac{9!}{3!\,4!\,2!} = 1260$$

DALIL 7**:** Banyaknya cara menyekat sekumpulan n benda ke dalam r sel, dengan n_1 unsur dalam sel pertama, n_2 unsur dalam sel kedua, dan demikian seterusnya, adalah

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots..\ \ n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots..\ \ n_r!}$$

sedangkan $n_1 + n_2 + \ldots.. + n_r = n$

CONTOH 9.2.12

Berapa banyak cara 7 orang dapat menginap dalam 1 kamar tripel dan 2 kamar dobel?

Penyelesaian : Banyak kemungkinan sekatan ada

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

9.2.4 KOMBINASI

Didalam permutasi urutan dari suatu susunan diperhatikan, misal susunan abc dan bac dipandang berbeda. Didalam kombinasi dua susunan tersebut dipandang sama. Misalkan Anggota Tim Olimpiade Matematika SMK " Harapan " terdiri dari Rudi, Herman dan Okta sama artinya jika kita menyebutkan Anggota Tim Olimpiade Matematika SMK " Harapan " terdiri dari Herman, Okta dan Rudi.Susunan Rudi, Herman dan Okta dengan susunan Herman , Okta dan Rudi dipandang sama.

Suatu kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang berlainan adalah suatu pilihan dari r unsur tanpa memperhatikan urutannya (r = n), dinyatakan dalam dalil 8.

DALIL 8 . Banyaknya kombinasi r benda dari n benda yang berbeda adalah

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

CONTOH 9.2.13

Club Catur " Harapan " akan mengirimkan 2 orang pemain catur dari 10 pemain caturnya dalam suatu turnamen catur nasional. Berapa banyak kemungkinan susunan 2 orang pemain catur yang dikirim tersebut

Penyelesaian :

Masalah pemilihan 2 pemain catur termasuk dalam masalah kombinasi, karena tanpa memperhatikan urutan anggotanya, sehingga untuk soal ini adalah kombinasi 2 dari 10 orang, yaitu

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8!}{1 \,.\, 2 \,.\, 8!} = 45$$

CONTOH 9.2.14

Diketahui klub Tenis yang terdiri 15 putra dan 10 putri

a. tentukan banyak kemungkinan pengiriman delegasi yang terdiri dari 5 orang

b. tentukan banyaknya kemungkinan pengiriman delegasi terdiri dari 3 putra dan 2 putri

Penyelesaian :

a. Masalah pemilihan delegasi termasuk dalam masalah kombinasi, karena tanpa memperhatikan urutan anggotanya, sehingga untuk soal ini adalah kombinasi 5 dari 25 orang, yaitu

$$\binom{25}{5} = \frac{25!}{5!\,20!}$$

$$= \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$$

$$= 53130$$

a. Dalam hal ada dua pemilihan putra dan putri, untuk pemilihan putra adalah masalah kombinasi 3 unsur dari 15, yaitu

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3!\,12!}$$

$$= \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= 455$$

Sedangkan untuk pemilihan putri adalah kombinasi 2 unsur dari 10 unsur, yaitu

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!}$$

$$= \frac{9 \,.\, 10}{1 \,.\, 2}$$

$$= 45$$

Karena keduanya tidak berhubungan, maka kombinasi total adalah merupakan hasil kali antara keduanya, yaitu

(455)(45) = 20.475

SOAL LATIHAN 9-2

Selesaikan soal-soal latihan dibawah ini.

1. Diketahui angka 1,3,5,7,9. Tentukan,

a. Banyak bilangan terdiri dari 2 angka yang dapat dibuat dari angka tersebut.

b. Banyak bilangan terdiri dari 2 angka yang dapat dibuat dari angka tersebut tetapi tidak mempunyai angka yang sama.

2. Diketahui angka 0,1,2,4,5,6,8. Tentukan,

a. Banyak bilangan terdiri dari 3 angka yang dapat dibuat dari angka tersebut.

b. Banyak bilangan terdiri dari 3 angka yang dapat dibuat dari angka tersebut tetapi tidak mempunyai angka yang sama.

c. Banyak bilangan terdiri dari 3 angka yang dapat dibuat dari angka tersebut tetapi bernilai ganjil.

d. Banyak bilangan terdiri dari 3 angka yang dapat dibuat dari angka tersebut yang habis dibagi 5.

3. Diketahui ada 5 baju berbeda, 4 celana panjang berbeda dan 3 dasi berbeda. Tentukan banyak kombinasi dalam memakai baju, celana dan dasi.

4. Didalam suatu ruangan terdapat 10 kursi.6 pemuda dan 4 pemudi akan duduk didalam ruangan tersebut.Tentukan banyaknya posisi duduk, jika

a. duduknya sembarang.

b. pemuda dan pemudi duduknya selang-seling.

5. Diketahui ada 4 buku yang berbeda dalam bahasa Jepang, 5 buku berbeda dalam bahasa Inggris dan 3 buku berbeda dalam bahasa Indonesia.

a. Tentukan banyak kemungkinan dalam mengambil tiga buku dari bahasa yang semuanya berbeda jika urutan bahasa menjadi tidak penting.

b. Tentukan banyak kemungkinan dalam mengambil tiga buku dari bahasa yang sama jika urutan bahasa menjadi tidak penting.

c. Tentukan banyak kemungkinan dalam mengambil tiga buku yang terdiri dari dua bahasa jika urutan bahasa menjadi tidak penting.

6. Berapa banyak kemungkinan susunan pengurus OSIS yang terdiri dari ketua, sekretaris dan bendahara dapat dibentuk, jika ada 50 calon pengurus OSIS.

7. Diketahui 12 bendera yang terdiri dari bendera Indonesia, bendera Amerika dan bendara Jepang. Bendera yang berasal dari Negara yang sama tidak dapat dibedakan. Jika diambil 12 bendera tentukan banyak urutan yang dapat muncul dari pengambilan bendera jika :

a. bendera Indonesia ada 5, bendera Amerika ada 4 dan bendera Jepang ada 3.
b. bendera Indonesia ada 3, bendera Amerika ada 3 dan bendera Jepang ada 6.

8. Di Republik BBM, DPR terdiri dari 2 Partai yaitu Partai Bulan dan Partai Matahari. Salah satu anggota komite terdiri 7 orang Partai Bulan dan 5 orang Partai Matahari. Akan dibuat satu delegasi yang diambil dari komite. Tentukan banyak cara menyusun
a. delegasi yang terdiri dari 4 orang.
b. delegasi terdiri dari 4 orang dengan satu orang dari partai Bulan.
c. delegasi terdiri dari 5 orang, dengan ketua dari partai Bulan dan anggota seimbang antara kedua partai.

9. Berapa jumlah 3 tempat pariwisata yang dapat dipilih dari 9 tempat yang ditawarkan.

10. Tentukan banyaknya pembagi (factor) dari bilangan 10.000

9.2 PELUANG SUATU KEJADIAN

Misalkan peristiwa A dapat terjadi dalam p cara dari seluruh n cara yang mungkin, n cara ini berkemungkinan sama (equally likely), maka peluang A sama dengan p(A) didefinisikan secara klasik sebagai

$$p(A) = \frac{p}{n}$$

Peluang suatu kejadian A adalah jumlah peluang semua titik sampel dalam A dimana

$$0 \le P(A) \le 1$$

Jika P (A) = 0 maka kejadian A tidak mungkin terjadi, sedangkan jika P (A) = 1 maka kejadian A pasti terjadi

DALIL 9 : Bila suatu percobaan mempunyai N hasil percobaan yang berbeda, dan masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk terjadi, dan bila tepat n diantara hasil percobaan itu menyusun kejadian A, maka peluang kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

CONTOH 9.3.1

Misalkan kita melakukan percobaan pelemparan satu dadu bersisi enam

a. Jika A adalah kejadian muncul sisi bertanda 2, tentukan peluang dari kejadian A
b. Jika B adalah kejadian muncul sisi bertanda genap, tentukan peluang dari kejadian B

Penyelesaian ;

a. Muncul satu sisi (bertanda apa saja) dalam percobaan pelemparan dadu merupakan kejadian sederhana. Selanjutnya karena diasumsikan bahwa dadu mempunyai enam sisi yang serupa, maka setiap kejadian sederhana mempunyai peluang sama, yaitu

$$P(A) = \frac{1}{jumlah\ \ anggota\ \ ruang\ \ sampel} = \frac{1}{6}$$

b. Kejadian B mempunyai tiga anggota yaitu 2,4,6, sehingga peluangnya adalah

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

CONTOH 9.3.2

Farhan mempunyai 6 bola putih dan 3 bola merah. Kemudian Farhan mengambil satu bola secara acak (tanpa memilih)

a. Tentukan peluang mengambil bola putih
b. Tentukan peluang mengambil bola merah

Penyelesaian :

Ruang sampel dari pengambilan satu bola adalah

S = {P,P,P,P,P,P,M,M,M}

Dengan P menyatakan bola putih yang terambil dan M menyatakan bola merah yang terambil.

a. Kejadian mengambil bola putih mempunyai anggota enam, jadi peluang kejadiannya adalah

$$P(Bolaputih) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

b. Kejadian mengambil bola merah mempunyai anggota tiga, jadi peluang kejadiannya adalah

$$P(Bolamerah) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

CONTOH 9.3.3

Irfan mempunyai 6 bola putih dan 3 bola merah. Kemudian Irfan mengambil dua bola secara acak (tanpa memilih)

a. Tentukan peluang mengambil semuanya bola putih.
b. Tentukan peluang mengambil semuanya bola merah.
c. Tentukan peluang mengambil satu bola merah dan satu bola putih.

Penyelesaian :

Dua bola yang terambil tidak memperhatikan urutannya maka termasuk kombinasi sehingga ruang sampel pengambilan dua bola dari sembilan bola Irfan adalah

$$\binom{9}{2} = \frac{9\,!}{2\,!\;7\,!}$$
$$= \frac{8\,.\,9}{1\,.\,2}$$
$$= 36$$

a. Banyak anggota kejadian mengambil bola putih adalah

$$\binom{6}{2} = \frac{6\,!}{2\,!\;4\,!}$$
$$= \frac{5\,.\,6}{1\,.\,2}$$
$$= 15$$

Jadi peluang dari kejadian ini

$$P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

b. Banyak anggota kejadian mengambil bola merah adalah

$$\binom{3}{2} = \frac{3\,!}{2\,!\,1\,!}$$
$$= \frac{3}{1}$$
$$= 3$$

Jadi peluang dari kejadian ini

$$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

c. Mengambil satu bola putih dan satu bola merah dianggap sama dengan mengambil satu bola merah dan satu bola putih. Sehingga banyak anggota dari kejadian mengambil satu bola putih dan satu bola merah adalah

$$\binom{6}{1}\binom{3}{1} = \frac{6!}{1!\,5!}\;\frac{3!}{1!\,2!}$$
$$= 6\,.3$$
$$= 18$$

Jadi peluang dari kejadian ini

$$P = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

9.3.1 PELUANG KOMPLEMEN SUATU KEJADIAN

DALIL10. Bila A dan A' dua kejadian yang satu merupakan komplemen lainnya maka

$$P(A) + P(A') = 1$$

CONTOH 9.3.4

Tentukan peluang mengambil satu kartu dari kartu brigde standard memperoleh bukan as.

Penyelesaian :

Peluang mengambil satu kartu memperoleh as adalah

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

Dengan demikian peluang mengambil satu kartu memperoleh bukan as adalah

$$P(A') = 1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52}$$

9.3.2 PELUANG GABUNGAN DUA KEJADIAN

DALIL11. Bila A dan B adalah dua kejadian sembarang maka peluang kejadian $A \cup B$ adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

CONTOH 9.3.5

Pada percobaan pelemparan dua buah dadu setimbang. Kejadian A adalah kejadian jumlah mata dadu yang muncul adalah 8, dan kejadian B adalah kejadian mata dadu kedua yang muncul adalah 5. Tentukan peluang kejadian jumlah mata dadu sama dengan 8 atau mata dadu kedua yang muncul adalah 5.

Penyelesaian :

Pada pelemparan dua buah dadu setimbang, banyaknya ruang sample adalah n (S) = 36

$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\} \Rightarrow n(A) = 5 \Rightarrow P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{36}$

$B = \{(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\} \Rightarrow n(B) = 6 \Rightarrow P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$A \cap B = \{(3,5)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{1}{36}$

Jadi

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= \frac{5}{36} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} \\
&= \frac{10}{36}
\end{aligned}
$$

9.3.3 PELUANG GABUNGAN DUA KEJADIAN SALING LEPAS

DALIL12 : Bila A dan B adalah dua kejadian sembarang dimana $A \cap B = f$ maka kejadian A dan B disebut dua kejadian saling lepas dan peluang kejadian $A \cup B$ adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

CONTOH 11.3.6

Pada percobaan pelemparan dua buah dadu setimbang. Kejadian A adalah kejadian jumlah mata dadu yang muncul adalah 3, dan kejadian B adalah kejadian jumlah mata dadu yang muncul adalah 8. Tentukan peluang kejadian jumlah mata dadu sama dengan 3 atau 8.

Penyelesaian :

Pada pelemparan dua buah dadu setimbang, banyaknya ruang sample adalah n (S) = 36

$$A = \{ (1, 2), (2, 1) \} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$B = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow P(B)$

$= \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{5}{36}$

$A \cap B = f \Rightarrow$ Kejadian A dan B merupakan kejadian saling lepas sehingga

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{18} + \frac{5}{36} \\ &= \frac{7}{36} \end{aligned}$$

9.2.1 PELUANG DUA KEJADIAN SALING BEBAS

Dua kejadian dikatakan saling bebas jika dua kejadian tersebut tidak saling mempengaruhi. Jadi Kejadian A dan kejadian B dikatakan saling bebas jika kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B atau sebaliknya. Untuk memahami dua kejadian saling bebas, perhatikan contoh berikut ini :

CONTOH 9.3.7

Sebuah uang logam dan sebuah dadu dilemparkan bersama-sama. Berapa peluang munculnya sisi angka pada uang logam dan munculnya mata dadu ganjil?

Penyelesaian :

Kejadian A adalah kejadian munculnya sisi angka pada uang logam

Kejadian B adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil

Terlihat bahwa kejadian A tidak mempengaruhi kejadian B sehingga kejadian A dan B saling bebas.

Peluang masing – masing kejadian A dan B adalah

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Sedangkan

Kejadian A dan B adalah kejadian munculnya sisi angka pada uang logam dan munculnya mata dadu ganjil

$A \cap B = \{ (A, 1), (A,2), (A, 3) \}$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Hubungan antara $P(A \cap B)$ dan $P(A).P(B)$ adalah

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Dari uraian diatas, peluang dua kejadian bebas dapat dinyatakan sebagai berikut :

DALIL 13 Jika kejadian A dan kejadian B merupakan dua kejadian saling bebas maka berlaku

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

9.3.4 FREKUENSI HARAPAN SUATU KEJADIAN

Perhatikan kasus berikut ini :

Sebuah dadu dilempar sebanyak 12 kali Tentukan berapa kali kemungkinan muncul mata dadu 2 ?

Untuk menjawab permasalahan diatas, kita dapat melakukan kegiatan dengan cara sebuah dadu kita lempar 12 kali kemudian kita catat banyaknya mata dadu 2 yang muncul, kemudian kita lakukakan lagi dengan melempar dadu sebanyak 12 kali kemudian kita catat banyaknya mata dadu 2 yang muncul. Kegiatan tersebut kita lakukan beberapa kali. Dari hasil cataan terlihat bahwa banyaknya muncul mata dadu 2 mendekati 2 kali. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut : Peluang munculnya mata dadu 2 pada pelemparan sebuah dadu adalah $\frac{1}{6}$. Jika dadu dilempar sebanyak 12 kali maka diharapkan mendapatkan mata dadu 2 sebanyak $\frac{1}{6}$. 12 kali = 2 kali. Harapan munculnya mata dadu 2 sebanyak 2 kali disebut frekuensi harapan.

DALIL 14 Frekuensi harapan munculnya kejadian A dengan n kali percobaan adalah

$$P(A)\times n$$

CONTOH 9.3.8

Sebuah uang logam dilempar sebanyak 40 kali. Tentukan frekuensi harapan munculnya sisi gambar pada uang logam tersebut.

Penyelesaian :

P (sisi gambar) = $\frac{1}{2}$.

Jadi frekuensi harapan munculnya sisi gambar pada uang logam adalah $\frac{1}{2}$ x 40 = 20 kali

SOAL LATIHAN 9-3

Selesaikan soal-soal latihan dibawah ini.

1. Sebuah dadu dilemparkan. Tentukan peluang
   a. Muncul mata dadu 4.
   b Muncul mata dadu genap.
   c. Muncul mata dadu ganjil.
   d. Muncul mata dadu genap atau ganjil.
1. Sebuah dadu dan sebuah uang logam dilempar bersama-sama.Tentukan peluang
   a. Muncul mata uang angka dan angka dadu 3.
   b. Muncul mata uang gambar dan angka dadu genap.
   c. Muncul angka dadu ganjil.
   d. Muncul mata uang angka dan angka dadu lebih dari 2.
2. Dari satu kantong terdiri dari 6 bola merah, 4 bola hitam dan 3 bola hijau diambil satu bola. Tentukan peluang bola yang terambil berwarna
   a. Merah atau hitam.
   b. Merah atau hitam atau hijau.
   c. Bukan hitam.
   d. Bukan hitam atau bukan merah.
3. Jika sebuah huruf diambil dari kata " MATEMATIKA ".Tentukan peluang yang terambil
   a. Huruf M
   b. Huruf vocal
   c. Huruf konsonan
   d Bukan huruf vocal

4. Satu kelompok terdiri dari 12 putera dan 4 puteri. Jika tiga orang diambil dari kelompok tersebut, berapa peluang bahwa ketiganya adalah putera.
5. Farhan mempunyai bola 8 bola merah dan 10 bola biru. Kemudian Farhan mengambil dua bola secara acak. Tentukan peluang bola yang terambil
   a. Semuanya merah
   b. Semuanya biru
   c. Satu bola merah dan satu bola biru
6. Budi mempunyai bola 8 bola merah, 10 bola biru dan 6 bola putih .Kemudian Budi mengambil tiga bola secara acak. Tentukan peluang yang terambil
   a. Tiga bola tersebut berwarna sama
   b. Dua bola merah dan 1 bola putih
   c. Satu bola merah dan 2 bola biru
   d. Paling sedikit 1 bola putih
   e. Tiga bola tersebut berlainan warna
7. Dua buah dadu dilempar bersama – sama.Tentukan peluang munculnya
   a. Jumlah mata dadu 5 atau 10
   b. Jumlah mata dadu 10 atau mata dadu pertama adalah 6
   a. Mata dadu pertama ganjil atau mata dadu kedua genap
8. Pada permainan bridge, 4 pemain masing-masing memegang 13 kartu dari 52 kartu yang ada. Tentukan peluang seorang pemain tertentu kartunya terdiri dari 7 diamond, 2 club, 3 heart dan 1 spade.
9. Tiga buah dadu dilempar bersama – sama. Tentukan peluang munculnya

a. Jumlah mata dadu 12

b. Jumlah mata dadu 10 atau 15

10. Tentukan peluang bahwa sebuah bilangan puluhan adalah kelipatan 3

11. Peluang tim sepak bola SMK " Nusantara " untuk memenangkan suatu pertandingan sepak bola adalah 0,6. Jika tim tersebut akan bermain dalam 50 kali pertandingan, Berapa kali tim sepakbola tersebut akan menang ?

12. Peluang tim basket SMK " Tunas Harapan " untuk memenangkan suatu pertandingan basket adalah 0,8. Jika tim tersebut akan bermain dalam 30 kali pertandingan, Berapa kali tim basket tersebut akan kalah ?

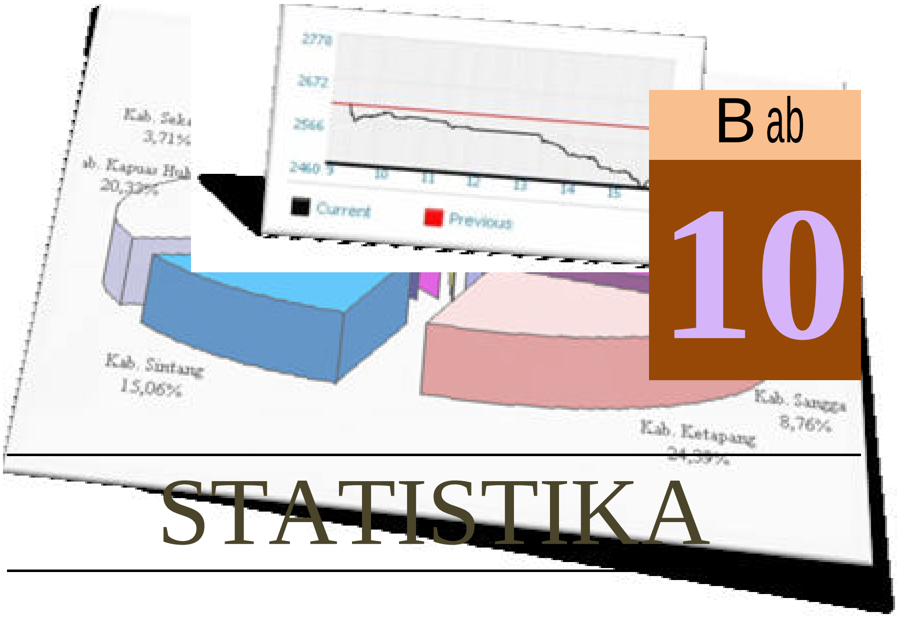
13. Dua buah dadu dilempar bersama - sama sebanyak 288 kali. Tentukan frekuensi harapan

a. Munculnya jumlah mata dadu 10

b. Munculnya jumlah mata dadu 5 atau 12

c. Munculnya mata dadu pertama 3 dan mata dadu kedua genap

d. Munculnya jumlah mata dadu selain 8



Bab

10

STATISTIKA

Materi tentang statistika sudah diajarkan di SMP, pada tingkat SMK ini akan diulang dan dipelajari lebih mendalam dengan menambahkan distribusi frekwensi dan ukuran penyebaran data. Statistika mempunyai peran yang sangat penting dalam bidang sosial maupun teknik. Dalam bidang sosial dipakai untuk pengambilan keputusan yang terkait dengan pengalaman masa lalu, untuk keperluan mendatang. Dalam bidang teknik dipakai untuk perancangan eksperimen, prediksi suatu perlakuan mesin, dan semua aktivitas lainnya yang terkait dengan data.

10. 1 PENGERTIAN DASAR

Dalam mempelajari statistika, pada dasarnya berkepentingan dengan penyajian dan penafsiran kejadian yang bersifat peluang yang terjadi dalam kehidupan sehari hari, dalam suatu penyelidikan terencana ataupun penelitian ilmiah. Misalnya kita mencatat berapa kali terjadi kecelakaan per bulan dalam suatu persimpangan, untuk mendapatkan alasan perlunya dipasang lampu lalu lintas. Mencatat perkembangan nilai siswa dan jumlah jam tatap muka untuk kemudian mendapatkan alasan perlunya jam tambahan diluar jam yang telah ditetapkan sekolah. Membuat ranking nilai siswa untuk kemudian memilih beberapa siswa yang diharapkan dapat mewakili Sekolah dalam suatu olimpiade tertentu. Mencatat jumlah panjang antrian dalam loket masuk suatu tempat hiburan, untuk memperhitungkan perlunya ditambah loket baru dan lain sebagainya.

Jadi statistikawan biasanya bekerja dengan data numerik yang berupa hasil cacahan atau hasil pengukuran, atau mungkin dengan data kategori yang diklasifikasikan menurut kriteria tertentu.

10.1.1 PENGERTIAN STATISTIK

Statistika adalah sekumpulan konsep dan metode yang digunakan untuk merencanakan dan mengumpulkan informasi/data, memberi interpretasi dan menganalisis untuk kemudian mengambil kesimpulan dalam situasi dimana ada ketidakpastian dan variasi. Metode-metode tersebut dikelompokkan menjadi dua kelompok besar yaitu Statistika Deskriptif dan Statistika Inferensia.

Statistika Deskriptif adalah metode-metode yang berkaitan dengan pengumpulan, penyederhanaan dan penyajian sekumpulan data sehingga memberikan informasi yang berguna.

Statistika Inferensia adalah metode-metode yang berhubungan dengan analisis sebagian data untuk kemudian sampai pada peramalan atau penarikan kesimpulan mengenai keseluruhan data induk.

Yang akan diajarkan dalam SMK adalah metode-metode yang termasuk dalam statistika deskriptif.

10.1.2 PENGERTIAN POPULASI DAN SAMPEL

Populasi adalah keseluruhan yang menjadi perhatian kita / yang kita pelajari, atau gugus dari semua pengukuran yang mungkin dibuat untuk suatu permasalahan tertentu.

Sampel adalah himpunan bagian dari populasi atau anak gugus dari pengukuran yang terpilih dari suatu populasi.

CONTOH 10.1.1

Untuk mempelajari golongan darah siswa SMK "Harapan Bunda", didata golongan darah siswa sebanyak 100 orang dari total semua siswa sebanyak 2000 siswa. 2000 siswa adalah populasi, sedangkan 100 siswa terpilih adalah sampel.

10.1.3 MACAM – MACAM DATA

Setiap informasi yang tercatat, apakah dari hasil mencacah, mengukur atau mengklasifikasi disebut sebagai pengamatan atau data. Jadi data adalah keterangan / informasi yang dijaring dalam bentuk angka (data kuantitatif) atau lambang (data kualitatif) dari pengamatan yang dilakukan seseorang. Data kuantitatif dapat diperoleh dengan mengukur (data kontinu) atau dengan mencacah (data diskrit).

CONTOH 10.1.2

Contoh data diskrit adalah jumlah buku milik mahasiswa, jumlah SMK yang ada di Propinsi tertentu.

Dilihat dari sumbernya dapat diklasifikasikan menjadi

1. Data intern, yaitu catatan intern perusahaan yang dibutuhkan oleh perusahaan itu sendiri
2. Data ekstern, yaitu data yang diperoleh dari luar perusahaan.

CONTOH 10.1.3

Contoh data intern adalah catatan akademik di sekolah tertentu yang diperlukan oleh sekolah tersebut. Jika untuk keperluan tertentu sekolah membutuhkan data dari luar sekolah maka data tersebut termasuk data ekstern.

Dilihat dari penerbitnya data dapat diklasifikasikan

1. Data primer, yaitu data yang dikumpulkan dan diolah sendiri oleh organisasi yang menerbitkan
2. Data sekunder, yaitu data yang diterbitkan oleh organisasi yang bukan pengolahnya.

Data dapat dikumpulkan dengan beberapa cara, diantaranya dengan :

1. Wawancara, adalah tanya jawab secara langsung dengan sumber data atau orang-orang yang dianggap mampu memberikan data yang diperlukan.
2. Kuisioner, adalah tehnik pengumpulan data dengan memberikan serangkaian pertanyaan yang dikirim per pos atau langsung pada responden untuk diisi.

3. Pengamatan (Observasi), adalah teknik pengambilan data dengan mengamati baik secara langsung maupun tidak langsung terhadap objek.
4. Test & skala obyektif adalah serangkaian test maupun skala yang obyektif, meliputi test kecerdasan dan bakat, test prestasi atau test kepribadian.

Berdasarkan skala data, data dapat diklasifikasikan menjadi :

1. Nominal, membedakan benda / peristiwa satu dengan yang lain berdasarkan jenis / predikat, misal : Laki-laki – perempuan, desa – kota.
2. Ordinal, membedakan benda / peristiwa satu dengan yang lain berdasarkan jumlah relatif beberapa karakteristik tertentu yang dimiliki masing-masing benda / peristiwa, misal : pemenang lomba 1, 2, 3.
3. Interval, apabila benda atau peristiwa yang kita selidiki dapat dibedakan antara yang satu dengan yang lain kemudian diurutkan. Perbedaan peristiwa yang satu dengan yang lain tidak mempunyai arti, tidak harus ada nol mutlak, misal: derajat C = derajat F.
4. Rasio, rasio antara masing-masing pengukuran mempunyai arti, ada nilai nol mutlak, misal : Tinggi.

10. 2 PENYAJIAN DATA

Pada umumnya untuk memudahkan dalam interpretasi data, data berukuran besar disajikan dalam bentuk tabel, diagram dan grafik.

10.2.1 PENYAJIAN DATA DALAM BENTUK TABEL

Penyajian data dalam bentuk tabel dapat berupa tabel statistik atau tabel distribusi frekuensi.

■ TABEL STATISTIK

Tabel statistik disajikan dalam baris dan kolom yang berfungsi sebagai "gudang keterangan". Bentuk umum tabel statistik adalah sebagai tersebut dalam Gambar 10.2.1

Judul Tabel

	Judul kolom	Judul kolom	Judul kolom	Judul kolom
Judul baris				
		Sel		
			sel	

Keterangan

Sumber data

Gambar 10.2.1 Bentuk Umum Tabel Statistik

Judul tabel ditulis dibagian paling atas dan dimulai dari sisi paling kiri dengan huruf kapital, Judul tabel memuat apa, macam, klasifikasi, dimana, kapan dan satuan data yang digunakan secara singkat. Judul kolom dan judul baris ditulis dengan singkat. Sel adalah tempat nilai-

nilai data. Keterangan diisi jika ada yang mau dijelaskan dari tabel yang belum tercantum dalam tabel dan sumber data menjelaskan asal data.

CONTOH 10.2.1

Table 10.2.1 . Jumlah pengunjung masing-masing anjungan tempat wisata "Mekar sari" tahun 2004-2007 berdasarkan jenis pengunjung.

Tahun	Anjungan Alfa		Anjungan Beta		Anjungan Gama	
	Dewasa	Anak-anak	Dewasa	Anak-anak	Dewasa	Anak-anak
2004	46250	37550	85050	25250	35250	75750
2005	47750	38900	84550	15550	25275	78900
2006	48890	45500	75550	19850	30850	78760
2007	48900	45450	89550	12500	25950	85575
Jumlah	191790	167400	334700	73150	117325	318985

Sumber : data diambil dari loket yang terjual pada masing-masing anjungan

■ TABEL DISTRIBUSI FREKUENSI

Tabel distribusi frekuensi terdiri tabel distribusi frekuensi data tunggal dan tabel distribusi frekuensi data kelompok. Tabel distribusi data tunggal adalah suatu tabel distribusi frekuensi yang disusun sedemikian rupa sehingga dapat diketahui frekuensi setiap satuan data (datum).

CONTOH 10.2.2

Percobaan melempar sebuah kubus berangka (alat untuk permainan ular tangga) sebanyak 30 kali menghasilkan permukaan yang muncul sebagai berikut :

2	6	3	3	5	6	4	2	4	3
5	3	2	1	4	1	6	5	3	4
4	6	4	3	2	5	1	1	3	2

Data tersebut dapat disusun dalam distribusi frekuensi tunggal seperti tersebut dalam Tabel 10.2.2

Tabel 10.2.2 Permukaan yang muncul

Angka (X_i)	Tally (turus)	Frekwensi (f_i)
1	||||	4
2	~~||||~~	5
3	~~||||~~ ||	7
4	~~||||~~ |	6
5	||||	4
6	||||	4
Jumlah		$\sum f_i = 30$

Tabel distribusi frekuensi data kelompok adalah suatu bentuk penyusunan yang teratur mengenai suatu rangkaian data dengan menggolongkan besar dan kecilnya angka-angka yang bervariasi kedalam kelas-kelas tertentu.

Yang harus diperhatikan dalam membuat tabel distribusi data kelompok adalah bahwa tidak ada satu angkapun dari data yang tidak dapat dimasukkan kedalam kelas tertentu dan tidak terdapat keragu-raguan dalam memasukkan angka-angka kedalam kelas-kelas yang sesuai. Sehingga yang harus dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Penentuan range berdasarkan pembulatan kebawah untuk angka terendah dan pembulatan keatas untuk angka tertinggi
2. Hindari penggunaan batas kelas secara berulang
3. Batas kelas hendaknya dinyatakan dalam bilangan bulat, bila tidak mungkin penggunaan jumlah desimal harus sesuai dengan kebutuhan saja.

Untuk membuat distribusi frekwensi data berkelompok dapat dilakukan dengan langkah sebagai berikut :

1. Menentukan jumlah kelas, jika menggunakan pendekatan HA Sturges maka

   $$K = 1 + 3{,}322 \log n$$

   dimana K adalah jumlah kelas dan n adalah jumlah data.
2. Menentukan lebar interval / panjang interval (*p*)

   $$p = \text{range} / K$$

   dimana Range = nilai datum tertinggi – nilai datum terendah
3. Membuat tabel distribusi frekwensi, biasanya secara lengkap terdiri dari 9 kolom, dimana

   kolom 1: Nomor kelas,

   kolom 2: interval kelas/limit kelas,

Pada interval kelas terdapat batas bawah kelas dan batas atas kelas. Batas bawah kelas adalah nilai ujung bawah suatu kelas sedangkan batas atas kelas adalah nilai ujung atas suatu kelas.

kolom 3: tepi kelas

tepi bawah = batas bawah – 0,5

tepi atas = batas atas + 0, 5

kolom 4: titik tengah kelas (m_i),

titik tengah kelas adalah suatu nilai yang dapat dianggap mewakili kelas tersebut dan rumusnya

$$m_i = \frac{1}{2}(\text{ batas atas + batas bawah })$$

kolom 5: tabulasi / tally,

kolom 6: frekuensi (f_i),

kolom 7: frekuensi kumulatif

frekuensi kumulatif kelas ke –i ($fkom_i$) adalah jumlah frekuensi dari kelas pertama sampai kelas ke -i

kolom 8: distribusi relatif

distributif relatif kelas ke – i ($drel_i$) adalah proporsi data yang berada pada kelas ke –i sehingga

$$drel_i = \frac{\textit{frekuensi kelas ke} - i}{\textit{banyaknya semua datum}} = \frac{f_i}{\sum f_i}$$

kolom 9: distribusi relatif komulatif

distribusi relatif komulatif kelas ke-i ($drkom_i$) adalah jumlah distributive relative dari kelas pertama sampai kelas ke -i

4. Memasukkan angka-angka kedalam kelas-kelas yang sesuai, kemudian menghitung frekuensinya. Proses memasukkan angka-angka dilakukan dengan tally sheet, buat perlimaan.

CONTOH 10.2.3

Skor hasil tes IQ dari 50 siswa SMK "Tunas Baru" tercatat sebagai berikut :

80	111	122	94	119	125	88	100	117	87
104	86	112	88	96	118	127	129	85	89
123	110	92	127	103	89	128	103	115	95
127	104	117	89	110	116	103	84	127	97
113	93	88	123	121	92	119	89	125	118

Jumlah kelasnya adalah K = 1 + 3,322 log 50 = 6,643978354 $\approx$ 7

Range = jangkauan = 129 – 80 = 49

Lebar interval kelas = 49 / 6,643978354 = 7,375099283 $\approx$ 8

Tabel lengkapnya dapat dilihat pada Tabel 10.2.3. berikut ini :

Tabel 10.2.3 . Hasil test IQ siswa SMK " Tunas Baru"

No	Interval	Tepi Kls	m_i	Tally	f_i	fkom$_i$	drel$_i$	drkom$_i$
1	80-87	79,5-87,5	83,5	~~IIII~~	5	5	0,10	0,10
2	88-95	87,5-95,5	91,5	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12	17	0,24	0,34
3	96-103	95,5-103,5	99,5	~~IIII~~ I	6	23	0,12	0,46
4	104-111	103,5-111,5	107,5	~~IIII~~	5	28	0,10	0,56
5	112-119	111,5-119,5	115,5	~~IIII~~ ~~IIII~~	10	38	0,20	0,76
6	120-127	119,5-127,5	123,5	~~IIII~~ ~~IIII~~	10	48	0,20	0,96
7	128-135	127,5-135,5	131,5	II	2	50	0,04	1,00

Sumber : SMK "Tunas Baru" tahun 2007

10.2.2 PENYAJIAN DATA DALAM BENTUK DIAGRAM

Penyajian data dalam bentuk diagram dilakukan dengan beberapa cara, diantaranya, diagram garis, diagram kotak / diagram batang, diagram lingkaran, piktogram.

■ DIAGRAM GARIS

Diagram Garis adalah suatu diagram berupa garis yang biasa dipakai untuk menyajikan data yang diperoleh dari waktu ke waktu secara teratur dalam jangka waktu tertentu.

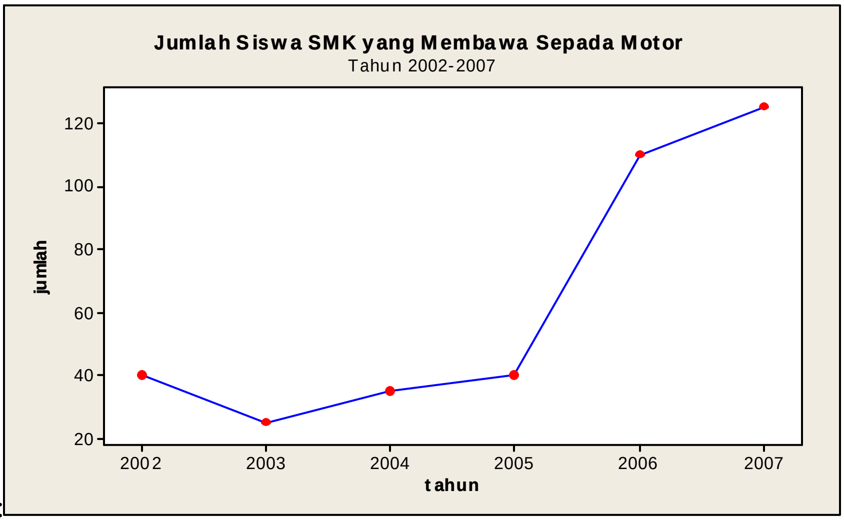
CONTOH 10.2.4

Dari hasil survey siswa SMK yang membawa sepeda motor didapatkan hasil seperti pada Tabel 10.2.4

Tabel 10.2.4. Jumlah Siswa SMK yang Membawa Sepeda Motor

Tahun	Jumlah Siswa
2002	40
2003	25
2004	35
2005	40
2006	110
2007	125

Diagram garis dari tabel 10.2.4 ditunjukkan gambar 10.2.2



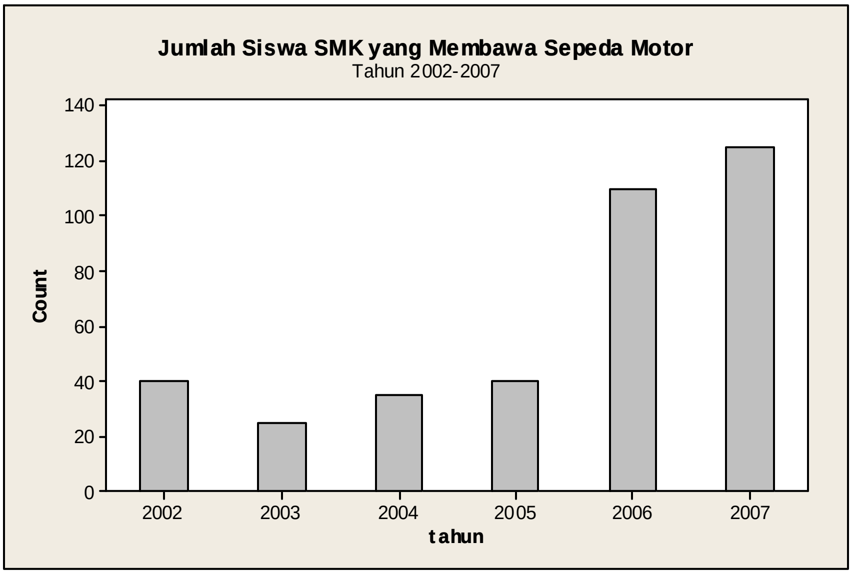
Gambar 10.2.2 Contoh Diagram Garis

■ DIAGRAM BATANG

Diagram Batang adalah suatu diagram yang terdiri dari batang-batang, dimana tinggi batang merupakan frekwensi atau nilai dari data.

CONTOH 10.2.5

Diagram batang dari tabel 10.2.4 ditunjukkan gambar 10.2.3



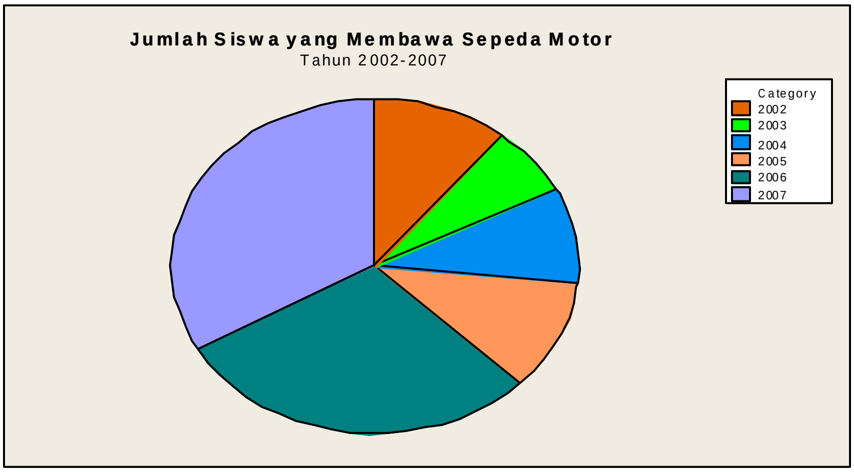
Gambar 10.2.3. Contoh Diagram Batang

■ DIAGRAM LINGKARAN

Diagram Lingkaran adalah suatu diagram berupa lingkaran, dimana daerah lingkaran menggambarkan data seluruhnya, sedangkan bagian dari data digambarkan dengan juring atau sector.

CONTOH 10.2.6

Diagram batang dari tabel 10.2.4 ditunjukkan gambar 10.2.4



Gambar 10.2.4. Contoh Diagram Lingkaran

■ PIKTOGRAM

Piktogram adalah suatu diagram yang disajikan dalam bentuk lambang-lambang sesuai dengan objek yang diteliti.

CONTOH 10.2.7

Dari catatan Dinas Pendidikan Kodya "Selayang", jumlah siswa diempat SMK dapat dilihat pada Tabel 10.2.5. dan penyajian piktogramnya dapat dilihat pada Gambar 10.2.5.

Tabel 10.2.5. Jumlah Siswa SMK di Kodya "Selayang"

SMK	Mawar	Melati	Tulip	Anggrek
Jumlah Siswa	500	850	600	1250

Sekolah		Jumlah Siswa
SMK Mawar	⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜	**500**
SMK Melati	⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ○	**850**
SMK Tulip	⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜	**600**
SMK Anggrek	⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ⟜ ○	**1250**

Keterangan :
○ sama dengan 50
⟜ sama dengan 100

Gambar 10.2.5. Contoh Piktogram

10.2.3 PENYAJIAN DATA DALAM BENTUK GRAFIK

Penyajian data dalam bentuk grafik dapat dilakukan dengan membuat Histogram atau dengan membuat Poligon.

- **HISTOGRAM**

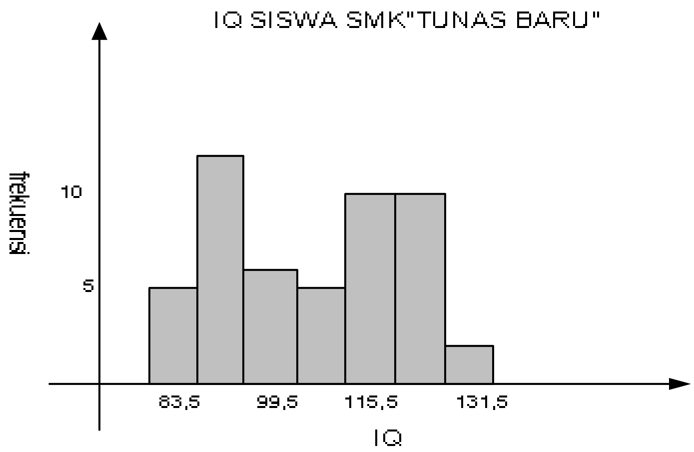
Histogram adalah sebuah bentuk diagram batang tetapi lebar batangnya merupakan lebar interval kelas sedangkan yang membatasi masing-masing batang adalah tepi kelas, sehingga masing-masing batang berimpit satu sama yang lainnya. Lihat contoh 10.2.8 dan gambar 10.2.6

- **POLIGON**

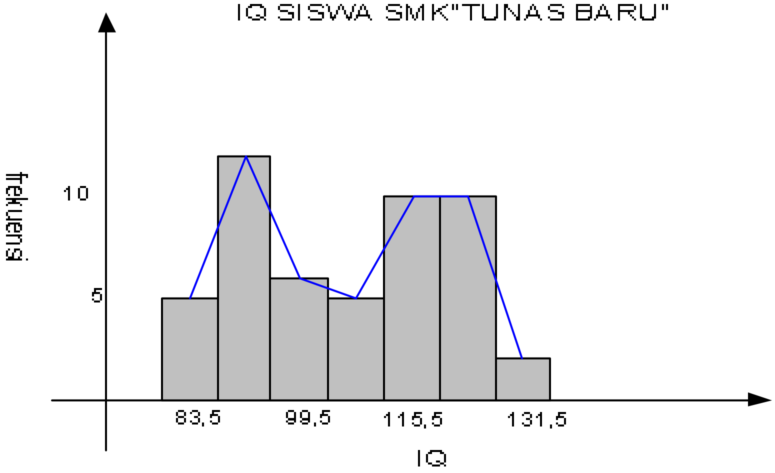
Jika ujung masing-masing batang dari histogram, pada posisi titik tengah dihubungkan dengan sebuah garis, garis tersebut disebut sebagai polygon frekuensi. Jika polygon frekuensi didekati dengan sebuah kurva mulus, maka kurva tadi disebut sebagai kurva frekuensi yang diratakan, tetapi jika penghalusan dilakukan pada polygon komulatif, maka kurvanya disebut sebagai ogive. Lihat gambar 10.2.7

CONTOH 10.2.8

Dari tabel 10.2.3 Hasil test IQ siswa SMK ” Tunas Baru “ maka histogramnya dapat dilihat dalam Gambar 10.2.6. dan polygon frekuensinya dapat dilihat pada Gambar 10.2.7



Gambar 10.2.6. Contoh Histogram



Gambar 10.2.7. Contoh Poligon Frekuensi

S0AL LATIHAN 10.2

1. Nilai ujian pelajaran matematika dari 80 siswa SMK " Tunas Harapan " adalah sebagai berikut :

51	75	81	62	65	70	68	40	70	60
65	72	75	81	90	65	68	76	60	35
75	81	71	58	70	60	97	74	42	80
79	53	83	61	78	75	69	80	95	37
80	72	90	71	48	85	80	65	91	73
76	82	78	63	75	72	74	76	76	43
65	76	80	78	85	64	65	50	60	72
85	78	68	74	67	85	65	80	77	58

Buatlah tabel distribusi frekuensi data kelompok dari nilai matematika diatas.

2. Dari Hasil survey siswa SMK " Tunas Harapan " yang membawa handphone adalah sebagai berikut :

   Tabel siswa SMK " Tunas Harapan " yang membawa handphone

Tahun	Jumlah siswa
2000	50
2001	65
2002	70
2003	75
2004	40
2005	80
2006	90
2007	105

   Sajikan data diatas dalam diagram garis, diagram batang dan diagram lingkaran.

3. Dari soal no. 1, buatlah histogram dan polygon frekuensi dari nilai ujian pelajaran matematika SMK " Tunas Harapan "

10.3 UKURAN STATISTIK BAGI DATA

Dalam mengumpulkan data, jika objek yang diteliti terlalu banyak atau terlalu luas cakupannya sehingga menjadi cukup besar, maka peneliti seringkali tidak meneliti seluruh objek, melainkan akan menggunakan sebagian saja dari seluruh objek yang diteliti. Keseluruhan yang menjadi perhatian kita / yang kita pelajari disebut sebagai **Populasi** sedangkan himpunan bagian dari populasi hasil dari pengukuran yang terpilih dari suatu populasi disebut sebagai **Sample**.

Parameter adalah sembarang nilai yang menjelaskan ciri sample-suatu Populasi misalkan (m, s^2 dll), sedangkan **Parameter sample** adalah sembarang nilai yang menjelaskan ciri sample misalkan ($\overline{X}$, s^2 dll).

Untuk menyelidiki segugus data kuantitatif akan sangat membantu bila didefinisikan ukuran-ukuran numerik yang menjelaskan ciri-ciri data yang penting. Ukuran yang menunjukkan pusat segugus data disebut sebagai **Ukuran Pemusatan.** Ukuran yang menyatakan seberapa jauh pengamatan (data) menyebar dari rata-ratanya disebut sebagai **Ukuran Keragaman / Penyebaran**. Untuk mengetahui sebaran / distribusi segugus data setangkup atau tidak dipakai **Ukuran kemiringan**.

10.3.1 UKURAN PEMUSATAN

Ukuran yang menunjukkan pusat segugus data disebut sebagai **Ukuran Pemusatan.** Ukuran pemusatan yang biasa dipakai mean, median dan modus.

- **MEAN / RATA-RATA HITUNG**

Mean atau rata- rata hitung dari suatu data adalah jumlah seluruh datum dibagi dengan banyak datum.

Untuk data tunggal

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Dimana $\overline{x}$ adalah mean atau rata- rata hitung dari suatu data

x_i adalah nilai datum ke i

n adalah banyaknya datum

Untuk frekuensi data tunggal

$$\overline{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + ... + f_k x_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i$$

Dimana $\overline{x}$ adalah mean atau rata- rata hitung dari suatu data

f_i adalah frekuensi dari x_i

x_i adalah nilai datum pada kelas ke i

k adalah banyaknya kelas

$n = f_1 + f_2 + \dots + f_k$ adalah banyaknya semua datum

Untuk frekwensi data kelompok

$$\overline{x} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + ... + f_k m_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i m_i$$

Dimana : $\overline{x}$ adalah mean atau rata- rata hitung dari suatu data

f_i adalah frekuensi dari x_i

m_i adalah nilai tengah data pada kelas ke i

k adalah banyaknya kelas

$n = f_1 + f_2 + \dots + f_k$ adalah banyaknya semua datum

- **MEDIAN**

Median dari suatu data yang telah diurutkan datanya dari nilai datum yang terkecil ke nilai datum yang terbesar adalah datum yang membagi suatu data terurut menjadi dua bagian yang sama.

Untuk data tunggal

Jika banyaknya datum n ganjil maka mediannya adalah nilai datum ke $\frac{n+1}{2}$ yaitu

$$\text{Median} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

Sedangkan jika banyaknya datum n genap maka mediannya adalah rata – rata dari dua nilai datum yang ditengah yaitu

$$\text{Median} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

Untuk Data Kelompok

$$\text{Median} = L_{med} + \left(\frac{\frac{1}{2}n - \left(\sum f\right)med}{f_{med}}\right)p$$

Dimana L_{med} = tepi bawah kelas yang memuat median

$n = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ adalah banyaknya semua datum

$\left(\sum f\right)med$ = jumlah frekuensi sebelum median

f_{med} = frekuensi kelas yang memuat median

P = panjang interval

- **MODUS**

Modus dari suatu data adalah nilai datum yang paling sering muncul.

Untuk Data tunggal

Modus dari suatu data adalah nilai datum yang paling sering muncul atau nilai datum yang mempunyai frekuensi terbesar.

Untuk Data kelompok

$$Mo = L_{Mo} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right]p$$

Dimana Mo = modus dari suatu data

L_{Mo} = tepi bawah kelas modus

Δ_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya

Δ_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

P = panjang interval

CONTOH 10.3.1

Tentukan mean, median dan modus dari data berikut ini : 100,110,105,120,80,90, 105,125,120,135, 120

Penyelesaian :

Data diatas termasuk data tunggal

a. Mean dari data tersebut adalah

$$\bar{x} = \frac{100+110+105+120+80+90+105+125+120+135+120}{11}$$

=111,18

b. Untuk menentukan median, kita urutkan terlebih dahulu datumnya dari yang terkecil yaitu

80,90, 100,105,105,110,120,120,120,, 125,135

Karena banyaknya datum ada 11 maka median adalah nilai datum ke

$\frac{11+1}{2}$ = 6. Jadi median = 110

c. Dari data diatas terlihat bahwa datum yang sering muncul adalah 120 maka modusnya = 120

CONTOH 10.3.2

Tentukan mean, median dan modus dari data nilai matematika SMK nusantara berikut ini :

Nilai (X_i)	Banyaknya siswa (f_i)	$f_i X_i$
3	2	6
4	3	12
5	10	50
6	6	36
7	7	49
8	8	64
9	4	36
Jumlah	40	253

Penyelesaian :

a. Mean $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{253}{40} = 6{,}325$

b. Karena banyaknya data 40 maka median

$$\text{Median} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1})$$

$$= \frac{1}{2}(x_{20} + x_{21})$$

$$= \frac{1}{2}(6 + 6)$$

$$= 6$$

c. Dari data diatas terlihat bahwa frekuensi terbesar adalah 10 dengan nilai matematika (nilai datum) 5. Jadi modusnya adalah 5

CONTOH 10.3.3

Tentukan mean, median modus dari data hasil test IQ siswa SMK" Tunas Baru berikut ini :

Tabel 10.2.3 . Hasil test IQ siswa SMK " Tunas Baru"

No	Interval	Tepi Kls	m_i	f_i	$fkom_i$
1	80-87	79,5-87,5	83,5	5	5
2	88-95	87,5-95,5	91,5	12	17
3	96-103	95,5-103,5	99,5	6	23
4	104-111	103,5-111,5	107,5	5	28
5	112-119	111,5-119,5	115,5	10	38
6	120-127	119,5-127,5	123,5	10	48
7	128-135	127,5-135,5	131,5	2	50

Sumber : SMK "Tunas Baru" tahun 2007

Penyelesaian :

a. Mean

$$\bar{x} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + ... + f_k m_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i m_i$$

$$= \frac{5.83{,}5 + 12.91{,}5 + 6.99{,}5 + 5.107{,}5 + 10.115{,}5 + 10.123{,}5 + 2.131{,}5}{5 + 12 + 6 + 5 + 10 + 10 + 2}$$

$$= \frac{5303}{50}$$

$$= 106{,}06$$

b. Karena banyaknya data ada 50 maka Median terletak diantara data ke-25 dan ke-26, sehingga berada dalam kelas nomer 4 dimana

L_{med} = tepi bawah kelas yang memuat median =103,5

n = jumlah semua data $n = \sum f_i = 50$

$\left(\sum f\right)med$ = jumlah frekuensi sebelum median =23

f_{med} = frekuensi kelas yang memuat median = 5

P = panjang interval =11,5-103,5 = 8

Jadi median = $L_{med} + \left(\frac{\frac{1}{2}n - \left(\sum f\right)med}{f_{med}} \right) p$

Median = 103,5 + $\left(\frac{\frac{1}{2}.50 - 23}{5} \right) 8$

= 106,7

c. Dari tabel terlihat bahwa frekuensi terbesar adalah 12 pada kelas ke 2 maka kelas modus = kelas ke-2 sehingga

L_{Mo} = tepi bawah kelas modus = 87,5

Δ_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya

= 12 -5 = 7

Δ_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

= 12 -6 = 6

P = panjang interval = 95,5-87,5 = 8

Jadi

$$
\begin{aligned}
Mo &= L_{Mo} + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right] p \\
&= 87,5 + \left[\frac{7}{7+6}\right] 8 \\
&= 87,5 + 4,3077 \\
&= 91,8077
\end{aligned}
$$

10.3.2 UKURAN PENYEBARAN

Ukuran yang menyatakan seberapa jauh pengamatan (data) menyebar dari rata-ratanya disebut sebagai **Ukuran Keragaman / Penyebaran**.

- **JANGKAUAN / RENTANG**

Untuk data tunggal

Jangkauan dari suatu data adalah selisih antara nilai datum terbesar dengan nilai datum terkecil sehingga

Jangkauan = nilai datum terbesar – nilai datum terkecil

Untuk data kelompok

Jangkauan = tepi atas kelas tertinggi – tepi bawah kelas terkecil

- **JANGKAUAN SEMI ANTAR KUARTIL**

➢ **Menentukan Kuartil**

Kuartil adalah suatu nilai yang membagi sekumpulan data menjadi empat bagian sama banyak.

Untuk data tunggal

Untuk data tunggal, data diurutkan terlebih dahulu dari nilai datum yang terkecil ke nilai datum yang terbesar

Kuartil I (Q_1) = nilai datum yang memisahkan data $\frac{1}{4}$ bagian berada dibawahnya

Kuartil II (Q_2) =: nilai datum yang memisahkan data $\frac{1}{2}$ bagian berada dibawahnya

Kuartil III(Q_3) =: nilai datum yang memisahkan data $\frac{3}{4}$ bagian berada dibawahnya

Dari pengertian diatas,terlihat bahwa kuartil II tidak lain adalah median

Untuk data kelompok

Nilai kuartil I (Q_1), nilai kuartil II (Q_2) = median dan nilai kuartil III (Q_3) untuk data kelompok dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut :

$$Q_k = L_{Q_k} + \left[\frac{\frac{k}{4}n - \left(\sum f\right)_{Q_k}}{f_{Q_k}} \right] p \quad , \text{ dengan } k = 1, 2, 3$$

Dimana Q_k = kuartil k0

L_{Q_k} = tepi bawah kelas yang memuat Q_k

n = jumlah semua data yaitu $n = \sum f_i$

$\left(\sum f\right)_{Q_k}$ = jumlah frekuensi sebelum kelas Q_k

f_{Q_k} = frekuensi kelas yang memuat Q_k

P = panjang interval

- **Menentukan Jangkauan Semi antar Kuartil**

Jangkauan Antar Kuartil = Kuartil 3 – Kuartil 1

Jangkauan Semi Antar Kuartil = ½ (Kuartil 3 – Kuartil 1)

- **SIMPANGAN RATA – RATA**

Simpangan rata-rata dari suatu data menyatakan ukuran berapa jauh penyebaran nilai–nilai data terhadap nilai rata-rata

Untuk data tunggal

Simpangan rata-rata dari nilai-nilai data tunggal x_1, x_2, x_3,… x_n adalah

$$SR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|$$

Dimana $\bar{x}$ = nilai rata-rata dari suatu data

Untuk data kelompok

$$SR = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\left|m_i - \bar{x}\right|$$

Dimana n = banyaknya datum

k = banyaknya kelas

f_i = frekuensi kelas ke-i

m_i = nilai tengah kelas ke i

$\bar{x}$ = nilai rata-rata dari suatu data

■ VARIANSI DAN SIMPANGAN BAKU

Untuk data tunggal

Ragam atau variansi dari nilai-nilai data tunggal $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$ adalah

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Sedangkan simpangan bakunya adalah

$$S = \sqrt{\text{var}\,iansi}$$

Dimana $\overline{x}$ = nilai rata-rata dari suatu data

Untuk data kelompok

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i\left(m_i - \overline{x}\right)^2$$

Sedangkan simpangan bakunya adalah

$$S = \sqrt{\text{var}\,iansi}$$

Dimana n = banyaknya datum

k = banyaknya kelas

f_i = frekuensi kelas ke-i

m_i = nilai tengah kelas ke i

$\overline{x}$ = nilai rata-rata dari suatu data

ANGKA BAKU

Angka Baku dari nilai datum x dari suatu data adalah

$$z = \frac{x - \bar{x}}{S}$$

Dimana $\bar{x}$ = nilai rata-rata dari suatu data

S = simpangan baku dari suatu data

KOEFISIEN VARIASI SAMPEL

Koefisien variasi sample adalah penyimpangan data relatif yang umumnya disajikan dalam persen. Koefisien variasi sample (CV) dari suatu data adalah

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \times 100\%$$

Dimana $\bar{x}$ = nilai rata-rata dari suatu data

S = simpangan baku dari suatu data

CONTOH 10.3.4

Dari contoh sebelumnya, Tentukan kuartil 1, kuartil 2, kuartil 3, jangkauan antar kuartil dan jangkaun semi antar kuartil, dari data IQ 50 siswa SMK “Tunas Baru”.

Penyelesaian :

Data terurut adalah

80	84	85	86	87	88	88	88	89	89
89	89	**92**	92	93	94	95	96	97	100
103	103	103	104	**104**	**110**	110	111	112	113
115	116	117	117	118	118	119	**119**	121	122
123	123	125	125	127	127	127	127	128	129

Untuk menentukan kuartil 1, kuartil 2 dan kuartil 3 maka kita tentukan terlebih dahulu kuartil 2 yaitu nilai datum yang membagi data menjadi 2 bagian yang sama. Karena data ada 50 maka kuartil 2 = median adalah rata-rata dari dua nilai datum yang ditengah yaitu

$$\text{Kuartil 2} = \frac{1}{2}\left[x_{25} + x_{26}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(104 + 110)$$

$$= 107$$

Karena $\frac{1}{2}$ data ada 25 datum maka kuartil 1 merupakan nilai tengah dari $\frac{1}{2}$ bagian bawah data atau nilai tengah dari semua datum yang berada sebelum kuartil 2 yaitu

$$\text{Kuarti 1} = x_{13} = 92$$

Sedangkan kuartil 3 merupakan nilai tengah dari semua datum yang berada setelah kuartil 2 yaitu

$$\text{Kuarti 3} = x_{25+13} = x_{38} = 119$$

Jangkauan antar kuartil = kuartil 3 – kuartil 1= 119 – 92 = 27

Jangkauan semi antar kuartil = $\frac{1}{2}$(kuartil 3 – kuartil 1) = 13,5

CONTOH 10.3.5

Dari tabel frekuensi data kelompok IQ 50 siswa SMK "Tunas Baru" Tentukan Kuartil 1, kuartil 2, kuartil 3, simpangan rata-rata dan simpangan baku dari data tersebut]

Penyelesaian :

Tabel 10.2.3 . Hasil test IQ siswa SMK " Tunas Baru"

No	Interval	Tepi Kls	m_i	f_i	$fkom_i$
1	80-87	79,5-87,5	83,5	5	5
2	88-95	87,5-95,5	91,5	12	17
3	96-103	95,5-103,5	99,5	6	23
4	104-111	103,5-111,5	107,5	5	28
5	112-119	111,5-119,5	115,5	10	38
6	120-127	119,5-127,5	123,5	10	48
7	128-135	127,5-135,5	131,5	2	50

Sumber : SMK "Tunas Baru" tahun 2007

a. Menentukan kuartil 1

Dari contoh soal 10.3.4, kuartil 1 adalah nilai dantum ke-13 sehingga kelas yang memuat kuartil 1(Q_1) adalah kelas ke-2 yaitu

L_{Q_1} = tepi bawah kelas yang memuat Q_1 = 87,5

n = jumlah semua data yaitu $n = \sum f_i$ = 50

$\left(\sum f\right)_{Q_1}$ = jumlah frekuensi sebelum kelas $Q_1 = 5$

f_{Q_1} = frekuensi kelas yang memuat $Q_1 = 12$

P = panjang interval= 95,5 – 87,5 = 8

Jadi

$$\text{Kuartil 1} = Q_1 = L_{Q_1} + \left[\frac{\frac{1}{4}n - \left(\sum f\right)_{Q_1}}{f_{Q_1}}\right]p$$

$$= 87{,}5 + \left[\frac{\frac{1}{4}.\,50 - 5}{12}\right]8$$

$$= 87{,}5 + 5$$

$$= 92{,}5$$

b. Menentukan kuartil 2

Dari contoh soal 10.3.4, kuartil 2 adalah rata-rata nilai dantum ke-25 dan nilai dantum ke-26 sehingga kelas yang memuat kuartil 2 (Q_2) adalah kelas ke-4 yaitu

L_{Q_2} = tepi bawah kelas yang memuat $Q_2 = 103{,}5$

n = jumlah semua data yaitu $n = \sum f_i = 50$

$\left(\sum f\right)_{Q_2}$ = jumlah frekuensi sebelum kelas $Q_2 = 23$

f_{Q_2} = frekuensi kelas yang memuat $Q_2 = 5$

P = panjang interval = 8

Jadi

$$\text{Kuartil 2} = Q_2 = L_{Q_2} + \left[\frac{\frac{2}{4}n - \left(\sum f\right)_{Q_2}}{f_{Q_2}}\right]p$$

$$= 103{,}5 + \left[\frac{\frac{2}{4}.\ 50 - 23}{5}\right]8$$

$$= 103{,}5 + 3.2$$

$$= 106{,}7$$

c. Menentukan kuartil 3

Dari contoh soal 10.3.4, kuartil 3 adalah nilai dantum ke-38 sehingga kelas yang memuat kuartil 1(Q_3) adalah kelas ke-5 yaitu

L_{Q_3} = tepi bawah kelas yang memuat Q_3 = 111,5

n = jumlah semua data yaitu $n = \sum f_i = 50$

$\left(\sum f\right)_{Q_3}$ = jumlah frekuensi sebelum kelas Q_3 = 28

f_{Q_3} = frekuensi kelas yang memuat Q_3 = 10

P = panjang interval = 8

Jadi

$$\text{Kuartil 3} = Q_3 = L_{Q_3} + \left[\frac{\frac{3}{4}n - \left(\sum f\right)_{Q_3}}{f_{Q_3}}\right]p$$

$$= 111{,}5 + \left[\frac{\frac{3}{4}.\ 50 - 28}{10}\right]8$$

$$= 111{,}5 + 7{,}6$$

$$= 119{,}1$$

d. Dari contoh 10.3.3, diperoleh mean $\overline{x}$ = 106,06 sehingga

m_i	f_i	$\lvert m_i - \overline{x} \rvert$	$f_i \lvert m_i - \overline{x} \rvert$
83,5	5	22,56	112,8
91,5	12	14,56	174,72
99,5	6	6,56	39,36
107,5	5	1.44	7.2
115,5	10	9,44	94,4
123,5	10	17,44	174,4
131,5	2	25,44	50,88
jumlah			653,76

Jadi simpangan rata- ratanya adalah

$$SR = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} f_i \lvert m_i - \overline{x} \rvert$$

$$= \frac{1}{50} \cdot 653,76$$

$= 13{,}0752$

e. Dari contoh 10.3.3, diperoleh mean $\overline{x}$ = 106,06 sehingga

m_i	f_i	$m_i - \overline{x}$	$(m_i - \overline{x})^2$	$f_i(m_i - \overline{x})^2$
83,5	5	-22,56	508,9536	2544,768
91,5	12	-14,56	211,9936	2543,9232
99,5	6	-6,56	63,0336	258,2016
107,5	5	1.44	2,0736	10,368
115,5	10	9,44	89,1136	891,136
123,5	10	17,44	304,1536	3041,536
131,5	2	25,44	647,1936	1294,3872
Jumlah				10584,32

Jadi variansi data tersebut adalah

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i (m_i - \overline{x})^2$$

$$= \frac{1}{50}\, 10584{,}32$$

$$= 211{,}6864$$

sehingga simpangan bakunya adalah

$$S = \sqrt{\text{var}\,iansi} = \sqrt{211{,}6864} = 14{,}54944672$$

CONTOH 10.3.6

Pada ulangan umum matematika dari 150 siswa SMK, rata-rata nilai adalah 78 dengan simpangan baku 8. Dari hasil evaluasi keaktifan siswa dapat dilihat bahwa waktu belajar mereka rata-rata 15 jam per minggu dengan simpangan baku 3 jam per minggu. Mana yang lebih homogin, nilai matematika atau waktu belajar mereka.

Jawab

Koefisien Variasi (CV) nilai matematika = $\dfrac{S}{\bar{x}} \times 100\%$

= (8/78) x 100%

= 10,25641026 %

Koefisien Variasi (CV) waktu belajar = (3/15) x 100% = 20 %

Karena CV nilai matematika lebih kecil daripada CV waktu belajar maka nilai matematika lebih homogin dibandingkan waktu belajar mereka.

CONTOH 10.3.7

Pada ulangan umum matematika dari 150 siswa SMK, rata-rata nilai adalah 78 dengan simpangan baku 8. Tetapi nilai ulangan umum Fisika mempunyai rata-rata 73 dengan simpangan baku 7,6. Farhan mendapat nilai 75 pada ulangan matematika dan 71 pada ulangan fisika. Pada ulangan apakah Farhan mendapat nilai lebih baik.

Penyelesaian :

Angka baku / Nilai standart matematika Farhan adalah

$$z = \frac{x - \overline{x}}{S} = \frac{(75 - 78)}{8} = -0,375$$

Nilai standart fisika Farhan adalah

$$z = \frac{(71 - 73)}{7,6} = -\,0,26315789$$

Karena nilai standart nilai fisika lebih besar daripada nilai matematika maka nilai fisika Farhan lebih baik dari pada nilai matematikanya.

SOAL LATIHAN 10.3

Kerjakan soal-soal berikut

1. Tentukan mean, median, modus, kuartil 1, kuartil 2, kuartil 3, jangkauan semi kuartil, simpangan rata-rata dan simpangan baku dari data berikut ini :

a. 35,38,40,30,55,40,40,56,40,44,54, 56,39

b. 101,104,105,80,103,120,135,105,134,135,120,120,101,120

2. SMK “Budi Mulia” mempunyai 19 karyawan. Data umur masing-masing karyawan adalah sebagai berikut : 27, 28, 40, 31, 35, 55, 32, 43, 30, 27, 31, 33, 45, 50, 24, 54, 30, 35, dan 55.

   Tentukan kuartil 1, kuartil 2, kuartil 3, jangkauan semi kuartil, simpangan rata-rata dan simpangan baku

3. Tentukan mean, median, modus, kuartil 1, kuartil 2, kuartil 3, jangkauan semi kuartil, simpangan rata-rata dan simpangan baku dari data nilai bahasa Inggris SMK” Nusantara” berikut ini :

Nilai (X_i)	Banyaknya siswa (f_i)
3	5
4	6
5	10
6	8
7	12
8	7
9	4
Jumlah	52

4. Dari tabel distribusi frekuensi data kelompok nilai matematika pada soal latihan sub-bab 10.2 no 1, tentukan mean, median, modus kuartil 1, kuartil 2, kuartil 3, jangkauan semi kuartil, simpangan rata-rata dan simpangan baku dari data tersebut
5. Diberikan hasil tryout 10 siswa peserta olimpade

Siswa	Matematika	B. Inggris	B. Indonesia
1	92	90	90
2	89	91	92
3	90	87	89
4	92	83	87
5	87	93	85
6	90	84	83
7	87	90	82
8	92	85	80
9	90	90	88
10	85	92	86

a. Tentukan rata-rata, median dan modus dari hasil tryout
b. Tentukan simpangan baku hasil tryout
c. Mana dari ketiga nilai yang menunjukkan kemampuan siswanya lebih homogin.

Bab

11

MATEMATIKA KEUANGAN

Dalam urusan bisnis dan keuangan tidak akan lepas juga dari perhitungan matematika. Seorang pengusaha yang dalam kehidupannya harus berurusan dengan bank ataupun pemilik modal dalam menjalankan bisnisnya perlu menghitung berapa keuntungan atau kerugian yang mungkin dihadapinya. Untuk itu perlu matematika keuangan yang sangat bermanfaat bagi pengusaha dalam menjalankan bisnisnya.

11.1. BUNGA TUNGGAL DAN BUNGA MAJEMUK.

Dalam keseharian, sering ditemui bahwa seseorang membeli mobil secara angsuran dengan bunga 10 % pertahun atau seseorang meminjam uang di bank dengan bunga 2 % per bulan. Jadi kata bunga bukanlah kata asing di telinga masyarakat Indonesia.

? **Pengertian Bunga**

Secara umum “bunga” dapat diartikan sebagai jasa yang berbentuk uang yang diberikan oleh seorang peminjam kepada orang yang meminjamkan modal atas persetujuan bersama.

Jika seseorang meminjam uang ke bank sebesar M rupiah dengan perjanjian bahwa setelah satu bulan dari waktu peminjaman, harus mengembalikan pinjaman tersebut sebesar $(M + B)$ rupiah, maka orang tersebut telah memberikan jasa terhadap bank sebesar B rupiah selama satu bulan. Jasa sebesar B rupiah disebut dengan **bunga,** sedangkan M rupiah merupakan besarnya pinjaman yang disebut dengan **modal**.

Jila pinjaman tersebut dihitung prosentase bunga terhadap besarnya modal, diperoleh :

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{M}} \times 100\ \%$$

disebut **suku bunga**. Besar suku bunga berlaku pada lama waktu perjanjian antara peminjam dengan yang diberi pinjaman. Secara umum, pengertian suku bunga dapat dituliskan sebagai berikut :

Jika besar modal pinjaman adalah M_0 dan besar bunga adalah B, maka besar suku bunga persatuan waktu dituliskan dengan b, didefinisikan sebagai

$$b = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{M}_0} \times 100\ \%$$

Jika pembayaran dilakukan sesuai dengan waktu perjanjian, maka bunga yang berkaitan disebut **bunga tunggal.**

Hubungan antara besar modal, besar suku bunga, dan besar pengembalian dinyatakan dengan :

$$M = M_0 + \frac{p}{100} M_0$$

Atau

$$M = M_0 \left[1 + \frac{p}{100} \right]$$

dengan: M menyatakan besarnya pengembalian

M_0 menyatakan besar pinjaman (modal) dan

p menyatakan besar suku bunga dalam %

Contoh 11.1.1:

Diketahui suatu modal sebesar Rp 3.000.000,- dengan suku bunga 15% pertahun. Tentukan besarnya bunga tunggal tersebut.

a. untuk jangka waktu 8 bulan

b. untuk jangka waktu 20 bulan

Penyelesaian:

Karena besarnya suku bunga pertahun adalah 15%, maka besarnya bunga tunggal pertahun adalah :

B = 15/100 x Rp 3.000.000,- = Rp 450.000,-

Sehingga diperoleh:

a. Besarnya bunga tunggal untuk jangka waktu 8 bulan adalah
   8/12 x Rp 450.000,- = Rp.300.000,-

b. Besarnya bunga tunggal untuk jangka waktu 20 bulan adalah
   20/12 x Rp 450.000,- = Rp. 750.000,-

Contoh 11.1.2:

Pak Didik meminjam modal di bank sebesar Rp 1.600.000,- yang harus dilunasi dalam jangka waktu satu tahun dengan besar pengembalian 5/4 dari besarnya pinjaman. Tentukan besarnya bunga pertiga bulan.

Penyelesaian:

Besar pinjaman $M_0 = Rp1{,}600.000,-$

Besarnya pengembalian

$$M = (5/4) \times Rp1.600.000,- = Rp.2.000.000,-$$

Besarnya bunga dalam satu tahun adalah

$$B = M - M_0 = Rp2.000.000,- - Rp1.600.000,- = Rp400.000,-$$

Besarnya suku bunga pertahun adalah $b = \dfrac{400.000}{1.600.000} \text{ x } 100\% = 25\%$

Jadi besarnya suku bunga pertigabulan adalah $\dfrac{3}{12} \text{ x } 25\% = 6{,}25\%$

Contoh 11.1.3:

Jika suatu modal sebesar Rp 15.000.000,- dibungakan dengan bunga tunggal dengan suku bunga sebesar 1,2% perbulan. Dalam waktu berapa bulan, agar modal tersebut menjadi dua kali dari modal semula?

Penyelesaian:

Besar bunga untuk satu bulan adalah

$$B_1 = \frac{1{,}2}{100} \text{ x Rp. } 15.000.000,- = \text{Rp. } 180.000,-$$

Besar bunga selama n bulan adalah

$$B_n = n \times Rp180.000,-$$

Besar modal setelah n bulan adalah

$$M_n = Rp15.000.000,- + B_n$$

$$= Rp15.000.000,- + [n \times Rp180.000,-]$$

Setelah n bulan, modal menjadi dua kali modal semula.

Jadi $M_n = 2 \times Rp15.000.000,- = Rp30.000.000,-$

Akibatnya

$$Rp30.000.000,- = Rp15.000.000,- + [n \times Rp180.000,-]$$

Atau

$$Rp15.000.000,- = [n \times Rp180.000,-]$$

Sehingga

$$n = \frac{\text{Rp.15.000.000,-}}{\text{Rp.180.000,-}} = 88,33$$

Jadi waktu yang diperlukan agar modal menjadi dua kali modal semula adalah 88,33 bulan.

Didalam bungan tunggal ini dikenal dua jenis bunga tunggal, yaitu:

1. **bunga tunggal eksak**
2. **bunga tunggal biasa**.

Bunga tunggal eksak adalah bunga tunggal yang dihitung berdasarkan jumlah hari dalam satu tahun secara tepat (satu tahun ada 365 hari), sedangkan untuk tahun **kabisat**, yaitu suatu tahun yang habis dibagi empat, satu tahun ada 366 hari.

Bunga tunggal biasa adalah bunga tunggal yang dihitung untuk setiap bulannya terdapat 30 hari (satu tahun ada 360 hari).

Contoh 11.1.4:

Suatu modal sebesar Rp 72.000.000,- dengan suku bunga 10% pertahun, jika akan dipinjamkan selama 50 hari. Tentukan besarnya bunga tunggal eksak dan bunga tunggal biasa, jika peminjaman dilakukan:

a. Pada tahun 2004

b. Pada tahun 2007.

Penyelesaian:

a. Peminjaman dilakukan pada tahun 2004

Besarnya bunga tunggal biasa adalah :

$$\frac{50}{360} \text{ x } \frac{10}{100} \text{ x Rp. } 72.000.000,\text{-} = \text{Rp. } 100.000,\text{-}$$

Besarnya bunga tunggal eksak adalah :

$$\frac{50}{366} \text{ x } \frac{10}{100} \text{ x Rp. } 72.000.000,\text{-} = \text{Rp. } 98.360,65$$

(Karena 2004 habis dibagi empat, maka banyaknya hari dalam tahun 2004 adalah 366)

b. Peminjaman dilakukan pada tahun 2007

Besarnya bunga tunggal biasa adalah :

$$\frac{50}{360} \text{ x } \frac{10}{100} \text{ x Rp. } 72.000.000,\text{-} = \text{Rp. } 100.000,\text{-}$$

Besarnya bunga tunggal eksak adalah :

$$\frac{50}{365} \text{ x } \frac{10}{100} \text{ x Rp. } 72.000.000,\text{-} = \text{Rp. } 98.630.136,99$$

Dari contoh di atas, dapat dilihat bahwa besar bunga tunggal biasa tidak tergantung pada tahun waktu peminjaman dilakukan (setiap tahun ada

360 hari). Sedang besar bunga tunggal eksak samgat tergantung pada tahun, dimana waktu peminjaman dilakukan (tahun kabisat atau bukan kabisat).

Untuk menentukan banyaknya hari dalam peminjaman, dikenal dua metode perhitungan, yaitu **waktu rata-rata** dan **waktu eksak** yang didefinisikan sebagai berikut :

Waktu rata-rata adalah waktu yang dihitung berdasarkan banyaknya hari dalam satu bulan terdapat 30 hari. Sedangkan **Waktu eksak** adalah waktu yang dihitung berdasarkan banyaknya hari dalam satu bulan yang dijalani secara tepat.

Menentukan waktu rata-rata

Cara menentukan waktu rata-rata adalah:

1. Menghitung banyaknya hari pada saat bulan peminjaman, yaitu 30 dikurangi tanggal peminjaman
2. Menghitung banyaknya hari pada bulan-bulan berikutnya dengan menggunakan ketentuan bahwa satu bulan ada 30 hari.
3. Menghitung banyaknya hari pada bulan terakhir dari batas tanggal peminjaman.
4. Banyaknya hari peminjaman adalah jumlahan dari ketiga langkah di atas.

Contoh 11.1.5:

Hitung waktu rata-rata dari tanggal 7 Maret 2004 sampai 22 Pebruari 2007.

Penyelesaian:

Banyaknya hari pada saat peminjaman adalah 30-7=23

Banyaknya hari pada bulan berikutnya pada tahun yang sama saat peminjaman adalah 9x30=270

Banyaknya hari pada tahun berikutnya setelah tahun peminjaman adalah 2x360=720

Banyaknya hari pada tahun akhir peminjaman adalah 30+22=52

Jadi waktu rata-rata = 23+270+720+52

= 1065

Jadi waktu rata-rata dari tanggal 7 Maret 2004 sampai tanggal 22 Pebruari 2007 adalah 1065 hari.

Contoh 11.1.6:

Hitung waktu rata-rata dari tanggal 17 Agustus 2007 sampai 2 Desember 2007.

Penyelesaian:

Waktu rata-rata = (30 - 17) + 3(30) + 2

= 13 + 90 + 2 = 123

Jadi waktu rata-rata dari tanggal 17 Agustus 2007 sampai tanggal 2 Desember 2007 adalah 123 hari.

? **Menentukan waktu eksak**

Ada dua cara menentukan waktu eksak, yaitu:

1. Dengan menggunakan tabel.
2. Dengan menghitung banyaknya hari yang dijalani.

Dalam buku ini hanya dibahas cara kedua, yaitu menghitung hari pada bulan yang dijalani secara tepat.

Contoh 11.1.7:

Hitung waktu eksak dari tanggal 5 Januari 2007 sampai 25 April 2007.

Penyelesaian:

Waktu eksak = (31 - 5) + (28 + 31) + 25

= 26 + 59 +25 = 110

Jadi waktu eksak dari tanggal 5 Januari 2007 sampai tanggal 25 April 2007 adalah 110 hari.

11.2. DISKONTO

Selain bunga tunggal yang telah dibahas, ada juga pinjaman dengan besar bunga tunggal yang dibayarkan pada awal peminjaman modal. Masalah seperti ini disebut dengan **diskonto**. Besar suku bunganya disebut dengan **besar diskonto.**

Contoh 11.2.1:

Ibu Alif meminjam uang di bank sebesar Rp 10.000.000,- dengan besar diskonto 10% dalam jangka satu tahun. Tentukan besar uang pinjaman saat diterima Ibu Alif.

Penyelesaian:

Besar diskonto 10% pertahun.

Jadi besar bunga dalam satu tahun adalah

$$\frac{10}{100} \text{ x Rp. } 10.000.000,- = \text{Rp.} 1.000.000,-$$

Besar uang yang diterima Ibu Alif adalah

$$Rp10.000.000,- - Rp1.000.000,- = Rp9.000.000,-$$

Contoh 11.2.2:

Pak Imron menerima pinjaman dari Bank dengan besar diskonto 12,5% pertahun. Jika uang pinjaman pada saat diterima Pak Imron sebesar Rp 14.000.000,-. Tentukan besar pinjaman Pak Imron sebelum dipotong dengan besarnya bunga yang telah ditentukan.

Penyelesaian:

Misal M = besarnya pinjaman Pak Imron

B = besarnya bunga diskonto selama satu tahun

maka

$$B = \frac{12,5}{100} \text{ x M} = \frac{1}{8}\text{M}$$

Besar pinjaman Pak Imron = besar uang yang diterima + besarnya bunga

$$M = Rp14.000.000,- + (1/8)M$$

Akibatnya : $M - (1/8)M = Rp14.000.000,-$

$$(7/8)M = Rp14.000.000,-$$

Jadi besar pinjaman Pak Imron sebelum dipotong besarnya bunga adalah $\text{M} = \frac{8}{7} \times Rp.14.000.000,- = \text{Rp.}16.000.000,\text{-}$

11.3. BUNGA MAJEMUK

Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas mengenai bunga tunggal, dengan cara bunga yang dibayarkan pada akhir periode peminjaman, dan cara diskonto, yaitu pembayaran bunga dilakukan pada awal periode peminjaman.

Pada bagian ini akan dibahas cara pembayaran bunga yang dilakukan pada setiap akhir periode tertentu, dan besar bunga ditambahkan (digabung) dengan modal awal, bunga pada periode berikutnya dihitung dari besar modal yang sudah digabung dengan bunga. Pada periode-periode berikutnya bunga dihitung analog. Pembayaran bunga semacam ini dinamakan sebagai **bunga majemuk**.

Cara penggabungan bunga dapat dilakukan secara bulanan, kuartalan, triwulanan, semesteran, atau tahunan. Beberapa istilah yang terkait dengan masalah bunga majemuk antara lain adalah frekuensi penggabungan, periode bunga, dan banyaknya periode bunga. Pengertian dari masing-masing istilah tersebut adalah sebagai berikut:

a. **Frekuensi penggabungan** adalah banyaknya penggabungan bunga dengan modal dalam waktu satu tahun.

b. **Periode bunga** adalah lamanya waktu antara dua penggabungan bunga terhadap modal yang berurutan.

Hubungan antara modal awal dengan modal setelah n periode yang dibungakan secara majemuk dinyatakan dalam rumus berikut.

Jika suatu modal sebesar M dibungakan dengan bunga majemuk dengan suku bunga $b = p\%$ b untuk setiap periode bunga, maka besar modal setelah n periode adalah Mn dengan rumus :

$$M_n = M(1+b)^n$$

Contoh 11.3.1:

Suatu modal sebesar M dipinjamkan dengan bunga majemuk, suku bunga ditetapkan sebesar 12% pertahun. Jika penggabungan bunganya dilakukan triwulan. Tentukan selama 5 tahun

a. Periode bunga

b. Frekuensi penggabungan

c. Besar suku bunga untuk setiap periode

d. Banyaknya periode bunga

Penyelesaian:

a. Karena 1 triwulan = 3 bulan, maka periode bunga adalah 3 bulan.

b. Frekuensi penggabungan = 12/3 = 4

c. Besar suku bunga untuk setiap periode adalah b = (12%)/4 = 3 %

d. Banyaknya periode bunga = 5 x 4 = 20.

Contoh 11.3.2:

Suatu modal sebesar M dibungakan selama 2 tahun dengan bunga majemuk 12% pertahun, dan penggabungan bunga dilakukan perkuartal. Tentukan:

a. Periode bunga

b. Frekuensi penggabungan

c. Besar suku bunga untuk setiap periode

d. Banyaknya periode bunga

Penyelesaian:

a. Karena 1 kuartal = 4 bulan, maka periode bunga adalah 4 bulan.

b. Frekuensi penggabungan = 12/4 = 3

c. Besar suku bunga untuk setiap periode adalah

b = (12%)/ 3 = 4%

d. Banyaknya periode bunga = 2 x 3 = 6.

11.4. NILAI TUNAI, NILAI AKHIR, dan HARI VALUTA

Dalam dunia perbankan, selain kata tabungan juga dikenal kata deposito, yaitu cara penyimpanan uang di bank dengan ketentuan bahwa penyimpan uang dapat diambil simpanannya pada waktu yang telah ditentukan, jika diambil pada saat belum jatuh tempo maka dikenai pinalti (denda) sesuai ketentuan yang telah disepakati.

Beberapa istilah yang terkait dengan deposito, antara lain adalah: nilai akhir, nilai tunai, dan hari valuta. Pada istilah-istilah tersebut dimaksudkan sebagai berikut.

Pada deposito, besarnya uang yang disimpan pertama kali disebut **nilai tunai,** sedang besarnya uang pada saat pengembalian disebut **nilai akhir,** dan saat pengambilan disebut **valuta**.

Contoh 11.4.1:

Sejumlah uang sebesar M didepositokan selama 2 tahun dengan suku bunga majemuk 10% pertahun. Jika pada hari valuta, uang tersebut menjadi Rp12.000.000,-. Tentukan besar uang yang telah didepositokan.

Penyelesaian:

Dalam masalah ini, akan dicari nilai tunai, dengan rumus :

$$M_n = M(1+b)^n$$

atau

$$M = \frac{\mathrm{M_n}}{(1+\mathrm{b})^n}$$

dengan:

n = 2

$M_2 = Rp.12.000.000,-$

b = 10% = 0,1

$$M = \frac{M_2}{(1+0,1)^2} = \frac{\text{Rp.}12.000.000,\text{-}}{1,21} = \text{Rp.}\,9.917.355,37$$

Jadi besar uang yang didepositokan adalah M = Rp 9.917.355,37.

Contoh 11.4.2:

Modal sebesar Rp 6.000.000,- dibungakan berdasarkan bunga majemuk dengan bunga 5% pertahun. Tentukan besar modal setelah dibungakan selama 3 tahun.

Penyelesaian:

Dengan rumus :

$$M_n = M(1+b)^n$$

dimana :

M = Rp 6.000.000,-

b = 5% = 0,05

n = 3

diperoleh

$$\begin{aligned} M_3 &= Rp\,6.000.000,- \times (1+0.05)^3 \\ &= Rp\,6.000.000,- \times (1.157625) \\ &= Rp\,6.945.750,- \end{aligned}$$

Jadi besar modal selama 3 tahun adalah Rp6.945.750,-

Contoh 11.4.3:

Modal sebesar Rp 10.000.000,- dipinjamkan dengan bunga majemuk. Penggabungan bunga dilakukan persemester dan besar bunga adalah

12% pertahun. Tentukan lama modal tersebut dipinjamkan setelah modal menjadi Rp 15.041.000,-

Penyelesaian:

Karena 1 semester = 6 bulan, maka periode bunga adalah 6 bulan. Jadi frekuensi penggabungan = 12/6 = 2

Suku bunga setiap periode adalah 12% : 2 = 6%.

Berdasarkan rumus $M = \dfrac{\mathrm{M}_{\mathrm{n}}}{(1+\mathrm{b})^{n}}$, diperoleh :

$$(1+0.06)^{n} = M_{n} / M$$

$$(1+0.06)^{n} = \frac{Rp15.041.000,-}{10.000.000,-} = 1.5041$$

Dengan rumus logaritma, diperoleh n = 7.

Jadi lama modal tersebut dipinjamkan adalah 7 semester atau 3,5 tahun.

Pada pembahasan di atas, periode bunga adalah bulat. Selanjutnya jika periode bunga berupa pecahan, maka untuk cara mencari nilai akhir adalah sebagai berikut:

1. Tentukan nilai akhir dengan bunga majemuk untuk periode bunga bulat.
2. Tambahkan nilai akhir bunga tunggal untuk periode bunga pecahan.

Contoh 11.4.4:

Modal sebesar Rp 9.000.000,- dibungakan berdasarkan bunga majemuk dengan bunga 4% pertahun. Tentukan besar modal setelah dibungakan selama 5 tahun 6 bulan.

Penyelesaian:

Dalam hal ini : M = Rp 9.000.000,-

b = 4% = 0,04

n = 5,5 (karena 6 bulan sama dengan 0,5 tahun)

diperoleh :

$$M_{5,5} = \text{Rp. } 9.000.000 \times (1,04)^5 + \left[\frac{1}{2}(0,04)\text{Rp. } 9.000.000(1,04)^5\right]$$

$$= \text{Rp. } 9.000.000(1,04)^5 \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)(0,04)\right]$$

$$= \text{Rp } 9.000.000,\text{-}\ (1,216652902)(1,02)$$

$$= \text{Rp.} 11.168.873,64$$

Jadi besar modal setelah 5 tahun 6 bulan adalah adalah

$$M_{5,5} = \text{Rp.} 11.158.873,64$$

11.5. RENTE (RENTETAN MODAL)

1. Rente Terbatas adalah rente dengan banyaknya angsuran atau Penambahan uang oleh pihak bank untuk tabungan maupun produk bank yang lain menggunakan sistem bunga majemuk yaitu setiap akhir periode bunganya langsung menjadi modal yang dibungakan lagi atau dikenal dengan bunga berbunga.

Didalam sistem bunga majemuk dikenal istilah rente yaitu rentetan modal yang dibayarkan setiap periode yang tetap. Pembayaran yang menggunakan rente antara lain:

1. Pembayaran barang secara kredit
2. Pembayaran asuransi
3. Tabungan berjangka atau deposito

Berdasarkan banyaknya angsuran rente dibedakan menjadi 2, yaitu : periode terbatas, misal 12 kali angsuran, 24 kali angsuran, atau dengan k kali angsuran dengan k : bilangan asli dan berhingga.

2. Rente Kekal (abadi) adalah rente dengan banyaknya angsuran yang tidak terbatas, misal k kali angsuran dengan k tak hingga.

Berdasarkan waktu pembayarannya rente dibedakan menjadi 2, yaitu :

1. Rente Pranumerando adalah suatu rente dengan waktu pembayarannya dilakukan setiap awal periode, misal tanggal 1 setiap bulan, tanggal 1 Januari setiap tahun.
2. Rente Postnumerando adalah suatu rente dengan waktu pembayarannya dilakukan setiap akhir periode, misal tanggal 30 setiap bulan, tanggal 30 Desember setiap tahun.

? **Rente Pranumerando**

1. Penghitungan Nilai Akhir

Misalkan dengan modal (M) setiap tahun dalam periode (n) tahun, dengan suku bunga majemuk (i) per tahun. Maka nilai akhir dari angsuran itu dapat dicari dengan cara sebagai berikut.

Angsuran dibayar pada awal periode yaitu tanggal 1 Januari dan nilai akhir dihitung pada akhir tahun ke-n yaitu pada tanggal 31 Desember tahun ke-n seperti pada penjelasan berikut.

Tahun Pertama	1 Januari	$M(1 + i)^1$
Tahun Kedua	1 Januari	$M(1 + i)^2$
Tahun Ketiga	1 Januari	$M(1 + i)^3$
:		
Tahun ke (n-1)	1 Januari	$M(1 + i)^{n-1}$
Tahun ke n	1 Januari	$\underline{M(1 + i)^n +}$
	31 Desember	$\sum_{k-0}^{k=n} M(1+i)^k$

Jadi Nilai Akhir dari Rente Pranumerando adalah

$$N_a = \sum_{k=1}^{k=n} M(1+i)^k$$

$$N_a = M\sum_{k=1}^{k=n} (1+i)^k$$

Atau jika dihitung menggunakan deret, didapat

Na = M (1 + i) + M (1 + i) +…+ M (1 + i)^n merupakan deret Geometri dengan

a = M (1 + i) dan r = (1 + i)

$$N = M\,(1+i)\,\frac{(1+i)^{n}+1}{(1+i)\text{ -1}}$$

$$N = M\,(1+i)\,\frac{(1+i)^{n}+1}{i}$$

Contoh 11.5.1:

Setiap awal tahun disetorkan sejumlah uang ke bank sebanyak Rp.1.000.000,-. Jika besar bunga 4 % pertahun, maka tentukan nilai akhir rente pada tahun ke 3.

Penyelesaian:

M = Rp.1.000.000,-

n = 3

i = 4 %

$$N_a = \sum_{k=1}^{k=n} M\,(1+i)^k$$

$$= Rp1.000.000,- \times \sum_{k=1}^{3}(1+0.04)^k$$

$$= Rp1.000.000,- \times (1.04 + 1.0816 + 1.124864)$$

$$= Rp1.000.000,- \times (3.246464)$$

$$= Rp3.246.464,-$$

2. Penghitungan Nilai Tunai

Misalkan dengan modal (M) setiap tahun dalam periode (n) tahun, dengan suku bunga majemuk (i) per tahun. Maka nilai tunai dari angsuran itu dapat dicari dengan cara sebagai berikut.

Angsuran dibayar pada awal periode yaitu tanggal 1 Januari dan nilai tunai dihitung pada akhir tahun ke-n yaitu pada tanggal 1 Januari tahun ke-n seperti pada penjelasan berikut :

Tahun Pertama	1 Januari	M
Tahun Kedua	1 Januari	$M/(1+i)$
Tahun Ketiga	1 Januari	$M/(1+i)^2$
:		
Tahun ke (n-1)	1 Januari	$M/(1+i)^{n-2}$
Tahun ke n	1 Januari	$\underline{M/(1+i)^{n-1}\ \ +}$
		$M + M\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{(1+i)^k}$

Jadi Nilai Tunai dari Rente Pranumerando adalah

$$N_t = M + M\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{(1+i)^k}$$

$$= M(1 + \sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{(1+i)^k})$$

Atau jika dihitung menggunakan deret, didapat suatu deret geometri dengan a = M, dan r = 1 / (1+i), maka :

$$N_t = M(1+i)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]$$

Contoh 11.5.2:

Setiap awal tahun disetorkan sejumlah uang ke bank sebanyak Rp. 1.000.000,-. Jika besar bunga 4 % pertahun, maka tentukan nilai tunai rente pada tahun ke 3.

Penyelesaian:

M = Rp.1.000.000,-

n = 3

i = 4 %

$$N_t = \text{Rp}.1.000.000,\text{-}(1+0{,}04)\left[\frac{1-(1+0{,}04)^{-3}}{0{,}04}\right]$$

$$= Rp.1.000.000,-\times(1{,}04)\times\left[\frac{1\text{-}0{,}888996358}{0{,}04}\right]$$

= Rp.1.040.000 (2,775091033)

= Rp.2.886.094,67

? **Rente Postnumerando**

1. Penghitungan Nilai Akhir

Tahun Pertama 31 Desember $M(1+i)^{n-1}$

Misalkan dengan modal (M) setiap tahun dalam periode (n) tahun, dengan suku bunga majemuk (i) per tahun. Maka nilai akhir N_a dari angsuran itu dapat dicari dengan cara sebagai berikut :

Angsuran dibayar pada akhir periode yaitu tanggal 31 Desember dan nilai akhir dihitung pada akhir tahun ke-n yaitu pada tanggal 31 Desember tahun ke-n seperti pada penjelasan berikut :

Tahun Kedua	31 Desember	$M(1+i)^{n-2}$
Tahun Ketiga	31 Desember	$M(1+i)^{n-3}$
:		
Tahun ke (n-1)	31 Desember	$M(1+i)$
Tahun ke n	31 Desember	M +
		$M + \sum_{k=1}^{n-1} M(1+i)^k$

Jadi Nilai Akhir dari Rente Pranumerando adalah

$$N_a = M\left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} (1+i)^k\right]$$

Atau jika dihitung menggunakan deret geometri, didapat

$$N_a = \frac{M}{i}\left[(1+i)^n + 1\right]$$

Contoh 11.5.3:

Pada tiap akhir tahun dimasukkan uang sebesar Rp. 4.000.000,- ke bank. Bunga bank 5% pertahun. Pada tahun ke-3, tentukan nilai akhir rente.

Penyelesaian:

M = Rp.4.000.000,-

n = 3

i = 5%

$$N_a = \text{Rp.}4.000.000,\text{-}\left[1 + \sum (1 + 0{,}05)^3\right]$$

$$= \text{Rp.}4.000.000,\text{- } (\ 2{,}157625)$$

$$= \text{Rp.}8.630.500,\text{-}$$

2. Penghitungan Nilai Tunai

Misalkan dengan modal (M) setiap tahun dalam periode (n) tahun, dengan suku bunga majemuk (i) per tahun. Maka nilai tunai N_t dari angsuran itu dapat dicari dengan cara sebagai berikut :

Angsuran dibayar pada awal periode yaitu tanggal 1 Januari dan nilai tunai dihitung pada akhir tahun ke-n yaitu pada tanggal 1 Januari tahun ke-n seperti pada penjelasan berikut:

Tahun Pertama	1 Januari	$\dfrac{M}{(1+i)}$
Tahun Kedua	1 Januari	$\dfrac{M}{(1+i)^2}$
Tahun Ketiga	1 Januari	$\dfrac{M}{(1+i)^3}$
:		
:		
Tahun ke (n-1)	1 Januari	$\dfrac{M}{(1+i)^{n-1}}$
Tahun ke n	1 Januari	$\dfrac{M}{(1+i)^n}$
		$\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{M}{(1+i)^k}$

Jadi Nilai Tunai dari Rente Postnumerando adalah

$$N_t = M\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{(1+i)^k}$$

Atau jika dihitung menggunakan deret, didapat :

$$N_t = \frac{M}{i}\left[(1+i)^n\right]$$

Contoh 11.5.4:

Pada tiap akhir tahun dimasukkan uang sebesar Rp. 4.000.000,- ke bank. Bunga bank 5% pertahun. Pada tahun ke 3, tentukan harga tunai rente ?

Penyelesaian:

M = Rp.4.000.000,-

n = 3

i = 5%

$$N_t = M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^k}$$

$$N_3 = \text{Rp.}4.000.000,\text{-}\left[\frac{1}{1+0{,}05}+\frac{1}{(1+0{,}05)^2}+\frac{1}{(1+0{,}05)^3}\right]$$

= Rp.4.000.000,- (0,952380952++0,907029478+0,863837598)

= Rp.4.000.000,-(2,723248029)=Rp.10.982.991,11

? **Rente Kekal**

Rente kekal atau rente abadi adalah rente dengan banyaknya angsuran tidak terbatas (n = ~). Maka dari hanya nilai tunainya saja yang dapat dihitung, sedangkan nilai akhirnya tidak dapat dihitung jumlahnya.

1. Rente Kekal Pranumerando

Rente kekal pranumerando jika dijabarkan nilai tunai untuk tiap priode merupakan deret geometri tak hingga dengan a = M, dan r = $\frac{1}{1+i}$, maka nilai tunai rente pranumerando kekal adalah :

$$N_t = \frac{M}{i}(1+i) = \frac{M}{i} + M$$

Contoh 11.5.5:

Setiap awal tahun disetorkan sejumlah uang ke bank sebanyak Rp.1.000.000,-. Jika besar bunga 5% pertahun, maka tentukan harga tunai rente kekal pada tahun ke 3.

Penyelesaian:

M = Rp.1.000.000,-

n = 3

i = 5%

$$N_3 = \frac{M}{i}(1+i)$$

$$= \frac{\text{Rp.}1.000.000,-}{0,05}(1+0,05)$$

= Rp.21.000.000,-

2. Rente Kekal Postnumerando

Sama dengan rente kekal pranumerando, rente kekal postnumerando nilai tunainya jika dijabarkan akan berbentuk deret geometri tak hingga dengan :

a = $\frac{M}{(1+i)}$ dan r = $\frac{1}{(1+i)}$, sehingga $N_t = \frac{M}{i}$

Contoh 11.5.6:

Pada tiap akhir tahun dimasukkan uang sebesar Rp. 1.000.000,- ke bank. Bunga bank 5% pertahun. Pada tahun ke 4, tentukan harga tunai rente kekal.

Penyelesaian:

M = Rp.1.000.000,-

n = 4

i = 5%

$$N_4 = \frac{\text{Rp.1.000.000,-}}{0{,}05} = \text{Rp.20.000.000,-}$$

Jadi harga tunai rente kekal adalah Rp. 20.000.000,-.

11.6. ANUITAS

Anuitas adalah suatu pembayaran atau penerimaan uang secara periodik dalam jumlah tetap dan dalam jangka waktu yang tetap pula. Jumlah pembayaran anuitas terdiri dari dua bagian, yaitu:

- Angsuran pelunasan pinjaman
- Pembayaran bunga.

? Menentukan Besarnya Anuitas

Untuk menentukan besarnya anuitas dapat digunakan rumus :

$$A = M \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k}}$$

Atau

$$A = iM \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

dengan

A = besarnya anuitas

M = besarnya pinjaman

i = suku bunga

n = banyaknya anuitas

Contoh 11.6.1:

Suatu pinjaman sebesar Rp 10.000.000,- akan dilunasi dengan 3 angsuran dengan suku bunga 12% pertahun. Tentukan besar anuitasnya.

Penyelesaian:

M = Rp 10.000.000,-

i = 12% = 0,12

n = 3

a. Diselesaikan dengan Rumus $A = M \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(1+i)^k}}$, diperoleh besarnya

anuitas $A = \text{Rp. } 10.000.000,\text{-} \dfrac{1}{2.401831267} = \text{Rp } 4.163.48,98.$

b. Diselesaikan dengan Rumus $A = iM \dfrac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$

Besarnya anuitas adalah

$$A = 0,12 \times \text{Rp.} 10.000.000,\text{-} \times \frac{(1,12)^3}{(1,12)^3 - 1}$$

$$= \text{Rp } 1.200.000 \times \frac{1,404928}{0,404928} = Rp.4.163.48,98$$

? **Menyusun Rencana Angsuran**

Untuk mengetahui bahwa perhitungan anuitas sudah benar, sebaiknya disusun rencana angsuran. Pada anuitas terakhir, besar angsuran utang harus nol.

Contoh 11.6.2:

Ibu Rini meminjam uang di Bank sebesar Rp 10.000.000,-. Pinjaman harus dilunasi dengan anuitas selama setahun dengan pembayaran tiap tiga bulan. Suku bunga 3% per tiga bulan. Buatlah rencana angsurannya, dan buatkan tabel rencana angsuran itu.

Penyelesaian:

M = Rp 10.000.000,-

i = 3%

n = 4 (sebab angsuran dilakukan setiap 3 bulan. Jadi n = 12 : 3 = 4)

Besar anuitas tiap 3 bulan adalah

$$A = M\frac{1}{\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{(1+0{,}03)^k}} = Rp.10.000.000,- \times \frac{1}{3{,}717089840}$$

$$= Rp.2.690.270{,}5$$

Membuat rencana angsuran:

Karena anuitas terdiri dari besar angsuran dan bunga, maka angsuran ke n, yaitu An, adalah An = A - Bn

dengan Bn adalah bunga pada angsuran ke n.

Oleh karena itu diperoleh:

- Bunga pada akhir tiga bulan pertama

B1 = 3% x Rp 10.000.000,- =

$$\frac{3}{100}\times \text{Rp}.10.000.000,- = \text{Rp}.\ 300.000,-$$

Angsuran pertama adalah

A1 = A - B1 = Rp 2.690.270,5 - Rp 300.000,- = Rp 2.390.270,5

Pinjaman (sisa utang) pada awal tiga bulan kedua adalah

M1 = Rp 10.000.000,- - Rp 2.390.270,5 = Rp 7.609.729,5.

- Bunga pada akhir tiga bulan kedua

$$B_2 = \frac{3}{100}\times Rp.7.609.729,5 = Rp.228.291,88$$

Angsuran kedua adalah A2 = A - B2 = Rp 2.690.270,5 - Rp 228.291,88

= Rp 2.461.978,62

Pinjaman (sisa utang) pada awal tiga bulan ketiga adalah

M2 = Rp 7.609.729,5 - Rp 2.461.978,62= Rp 5.147.750,88.

- Bunga pada akhir tiga bulan ketiga adalah

$$B_3 = \frac{3}{100}\times Rp.5.147.750,88 = Rp.154.432,52$$

Angsuran ketiga adalah

A3 = A - B3 = Rp 2.690.270,5 - Rp 154.432,52 = Rp 2.535.837,98

Pinjaman (sisa utang) pada awal tiga bulan keempat adalah

M3 = Rp 5.147.750,88. - Rp 2.535.837,98 = Rp 2.611.912,9

- Bunga pada akhir tiga bulan keempat adalah

$$B_4 = \frac{3}{100}\times Rp.2.611.912,9 = Rp.783.573,87$$

A4 = A - B4 = Rp 269.027,05 - Rp 783.573,87 = Rp 2.611.913,13

Pinjaman (sisa utang) pada awal tiga bulan kelima adalah

Angsuran keempat adalah

M4 = Rp 2.611.912,9- Rp 2.611.913,13= Rp -0,02 = Rp 0,-

Tabel rencana angsurannya adalah sebagai berikut:

Tabel Rencana Angsuran

Angsuran ke n	Utang (Rp.)	Anuitas		
		Suku bunga 3%	Angsuran Utang	Sisa Utang
1	10.000.000,-	300.000,-	2.390.270,5	7.609.729,5
2	7.609.729,5	228.291,88	2.461.978,62	5.147.750,88
3	5.147.750,88	154.432,52	2.535.837,98	2.611.912,9
4	2.611.912,9	783.573,87	2.611.913,13	0,-

? Anuitas dengan Pembulatan

Biasanya besar anuitas yang dibayarkan (diterima) berupa pecahan. Untuk mempermudahkan atau menyederhanakan pembayaran, biasanya besar anuitas dibulatkan ke atas atau ke bawah.

Jika besar anuitas dibulatkan ke bawah, maka besarnya pembayaran terakhir adalah besarnya anuitas ditambah kekurangannya, dan jika besar anuitas dibulat kan ke atas, maka besarnya pembayaran terakhir adalah besarnya anuitas dikurangi kelebihan pembayaran.

Contoh 11.6.3:

Pak Abu meminjam uang di Bank sebesar Rp 10.000.000,-. Pinjaman harus dilunasi dengan anuitas selama setahun dengan pembayaran tiap triwulan.Suku bunga 3% per triwulan.

Tentukan:

a. Besar anuitas dengan pembulatan ribuan ke atas

b. Besarnya pembulatan jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke atas

c. Tabel rencana angsuran jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke atas

d. Angsuran terakhir jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke atas

e. Pembayaran terakhir jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke atas

f. Besar anuitas dengan pembulatan ribuan ke bawah

g. Besarnya pembulatan jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke bawah

h. Tabel rencana angsuran jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke bawah

i. Angsuran terakhir jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke bawah

j. Pembayaran terakhir jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke bawah

Penyelesaian:

M = Rp 10.000.000,-

i = 3%

n = 4 (sebab angsuran dilakukan setiap triwulan. Jadi n = 12 : 3 = 4)
Besar anuitas tiap triwulan adalah

$$A = M \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^k}}$$

$$= Rp.10.000.000,- \times \frac{1}{1/1{,}03 + 1/1{,}0609 + 1/1{,}092727 + 1/1{,}12550881}$$

$$= Rp.10.000.000,- \times \frac{1}{3{,}71709840} = Rp.2.690.270{,}45$$

Dengan pembulatan ribuan ke atas, diperoleh

a. Besar anuitas adalah Rp 2.700.000,-

b. Besar pembulatan adalah Rp 2.700.000- Rp 2.690.270,45

= Rp 9.729,55

c. Untuk membuat tabel rencana angsuran, terlebih dahulu dihitung rencana angsurannya sebagai berikut.

Dengan mengingat An = A – Bn, dan Bn adalah bunga pada angsuran ke n, diperoleh:

- Bunga pada akhir triwulan pertama, B1 = 3% x Rp 10.000.000,-

  = Rp 300.000,-

  Angsuran pertama adalah

  A1 = A - B1

  = Rp 2.700.000,- -Rp 300.000,-

  = Rp 2.400.000,-

  Pinjaman (sisa utang) pada awal triwulan kedua adalah

  M1 = Rp 10.000.000,00 - Rp 2.400.000,-= Rp 7.600.000,-

- Bunga pada akhir tiga bulan kedua

$$B_2 = \frac{3}{100} \times \text{Rp } 7..600.000,\text{-} = \text{Rp}.228.000,\text{-}$$

  Angsuran kedua adalah

  A2 = A - B2 = Rp 2.700.000 ,-- Rp.228.000= Rp 2.472.000,-

  Pinjaman (sisa utang) pada awal triwulan ketiga adalah

  M2 = Rp 7.600.000,- - Rp 2.472.000,-= Rp 5.128.000,-.

- Bunga pada akhir triwulan ketiga adalah

  B3 = 3% x Rp 5.128.000,-. = $\frac{3}{100}\text{Rp. } 5.128.000,\text{-} = \text{Rp. } 153.840,\text{-}$

  Angsuran ketiga adalah

  A3 = A - B3 = Rp 2.700.000,- - Rp 153.840,- = Rp 2.546.160,-

  Pinjaman (sisa utang) pada awal triwulan keempat adalah

  M3 = Rp 5.128.000,-. - Rp 2.546.160,- = Rp 2.581.840,-

- Bunga pada akhir triwulan keempat adalah

  B4 = 3% x Rp 2.581.840,-. = $\frac{3}{100} \times \text{Rp. } 2.581.840,\text{-} = \text{Rp. } 77.455,2$

  Angsuran keempat adalah

  A4 = A - B4 = Rp 270.000,- - Rp 77.455,2 = Rp 2.622.544,8

Pinjaman (sisa utang) pada akhir triwulan keempat adalah

M4 = Rp 2.581.840,- - Rp 2.622.544,8 = Rp -40.704,8

Dengan adanya pembulatan ribuan ke atas, ada kelebihan angsuran sebesar

Rp. 40.704,8.

Jadi tabel rencana angsurannya adalah sebagai berikut:

Angsuran ke n	Utang (Rp.)	Anuitas		
		Suku bunga 3%	Angsuran Utang	Sisa Utang
1	10.000.000,-	300.000,-	2.400.000,-	7.600.000,-
2	7.600.000,-	228.000,-	2.472.000,-	5.128.000,-
3	5.128.000,-	153.840,-	2.546.160,-	2.581.840,-
4	2.581.840,-	7.745,52	2.622.544,8	-40.704,8

d. Angsuran terakhir adalah

A4 - Rp 40.704,8 = Rp 2.622.544,8 - Rp 4.070,48 = Rp 2.622.544,8

e. Pembayaran terakhir adalah

Angsuran terakhir + Bunga terakhir = Rp 2.622.544,8+ Rp 77.455,2

= Rp 2700.000,-

Dengan pembulatan ribuan ke bawah diperoleh:

a. Besar anuitas adalah Rp 2.690.000,-

b. Besar pembulatan adalah Rp 2.690.270,45 - Rp 2.690.000,-

= Rp 270,45

c. Untuk membuat tabel rencana angsuran, terlebih dahulu dihitung rencana angsurannya sebagai berikut :

Dengan mengingat An = A – Bn dimana Bn adalah bunga pada angsuran ke n, diperoleh:

- Bunga pada akhir tiga bulan pertama

B1 = 3% x Rp 10.000.000,- =

$$\frac{3}{100}\text{Rp. }10.000.000,\text{-} = \text{Rp. }300.000,\text{-}$$

Angsuran pertama adalah

A1 = A - B1 = Rp 2.690.000,- - Rp 300.000,-

= Rp 2.390.000,-

Pinjaman (sisa utang) pada awal tiga bulan kedua adalah

M1 = Rp 10.000.000,- - Rp 2.390.000,- = Rp 7.610.000,-

- Bunga pada akhir tiga bulan kedua

B2 = 3% x Rp7.610.000,- = $\frac{3}{100}\times \text{Rp. }7,610.000,\text{-} = \text{Rp. }228.300,\text{-}$

Angsuran kedua adalah A2 = A - B2 = Rp 2.690.000,- - Rp 228.300,-

= Rp 2.461.700,-

Pinjaman (sisa utang) pada awal tiga bulan ketiga adalah

M2 = Rp 7.610.000,- - Rp 2.461.700,- = Rp 5.148.300,-.

- Bunga pada akhir tiga bulan ketiga adalah

B3 = 3% x Rp 5.148.300,- =

$$\frac{3}{100}\times \text{Rp. }5.148.300,\text{-} = \text{Rp. }154.444{,}90$$

Angsuran ketiga adalah A3 = A - B3 = Rp 2.690.000,- - Rp 15.444,90

= Rp 2.535.551,-

Pinjaman (sisa utang) pada awal tiga bulan keempat adalah

M3 = Rp 5.148.300,- - Rp 2.535.551,- = Rp 2.612.749,-

- Bunga pada akhir tiga bulan keempat adalah

B4 = 3% Rp 2.612.749,- = $\frac{3}{100}\times \text{Rp. }2.612.749,\text{-} = \text{Rp. }78.382{,}47$

Angsuran keempat adalah A4 = A - B4 = Rp 2.690.000,- - Rp 78.382,47

= Rp 2.611.617,53

Pinjaman (sisa utang) pada akhir tiga bulan keempat adalah

M4 = Rp 2.612.749,-- Rp 2.611.617,53 = Rp 1.131,47

Angsuran ke n	Utang (Rp.)	Anuitas		
		Suku bunga 3%	Angsuran Utang	Sisa Utang
1	10.000.000,-	300.000,-	2.390.000,-	7.610.000,-
2	7.610.000,-	2288.300,-	2.461.700,-	5.148.300,-
3	5.148.300,-	154.449,-	2.535.551,-	2.612.749,-
4	2.612.479	78.382,47	2.611.617,53	1.131,47

i. Dengan adanya pembulatan ribuan ke bawah, ada kekurangan angsuran sebesar Rp1.131,47. Jadi angsuran terakhir adalah

A4 + Rp 1.131,47 = Rp 2.611.617,53 + Rp 1.131.47

= Rp 2.612.749,-

j. Pembayaran terakhir adalah angsuran terakhir + bunga terakhir = Rp 2.612.749 + Rp 78.382,47,- = Rp 2.691.131,47

11.7. METODE SALDO MENURUN

Dengan metode garis lurus, besarnya penyusutan setiap tahun dianggap sama, tetapi dalam metode saldo menurun, besar penyusutan mula-mula besar dan semakin lama besar penyusutan penurun sebanding lurus dengan menurunnya nilai buku ativa (harta) tetap.

Perhitungan penyusutan dengan metode saldo turun ada dua cara, yaitu: metode angka persen tetap atau metode tarif tetap atas nilai buku, dan metode menurun berganda.

? **Perhitungan dengan metode angka persen tetap mempunyai rumus**

$$T = 1 - \sqrt[n]{\frac{S}{A}}$$

Dimana :

T = persen penyusutan dari nilai buku

S = nilai residu (sisa) aktiva tetap

A = nilai perolehan aktiva tetap

n = perkiraan umur ekonomi aktiva tetap

Contoh 11.7.1:

Diketahui bahwa biaya perolehan suatu aktiva adalah Rp 10.000.000,-. Taksiran nilai sisa adalah Rp 1.000.000,- dengan umur manfaat 3 tahun. Dengan metode saldo menurun angka persen tetap,

a. Persentase penyusutan setiap periode
b. Buatkan tabel yang berisikan harga perolehan, penyusutan, akumulasi penyusutan, dan harga buku.

Penyelesaian:

S = Rp 1.000.000,-

A = Rp 10.000.000,-

n = 3

a. Persentase penyusutan setiap periode adalah $T = 1 - \sqrt[n]{\frac{S}{A}}$ =

$$1 - \sqrt[3]{\frac{1000000}{10000000}} = 1 - 0{,}4641592396$$

$$= 0{,}53584076 = 53{,}6\%$$

b. Penyusutan periode 1 = 53,6% x Rp 10.000.000,- = Rp 5.360.000,-

Penyusutan periode 2 = 53,6% x Rp 4.460.000,- = Rp2.487.040,-

Penyusutan periode 3 = 53,6% x Rp 2.152.960,- = Rp 1.153.986,56

Tabelnya adalah sebagai berikut :

Periode/tahun	Harga Perolehan (Rp.)	Penyusutan (Rp.)	Akumulasi Penyusutan	Nilai Buku
1	10.000.000	5.360.000,-	5.360.000,	4.640.000
2	10.000.000	2.487.040,-	7.847.040	2.152.960
3	10.000.000	1.153.986,56	9.001.026,	998.974,-

Pada penyusutan metode saldo menurun berganda, besar persentase penyusutan pertahun ditetapkan sebesar dua kali dari penyusutan garis lurus.

Contoh 11.7.2:

Diketahui bahwa biaya perolehan suatu aktiva adalah Rp 10.000.000,-. Taksiran nilai sisa adalah Rp 1.000.000,- dengan umur manfaat 4 tahun. Dengan metode saldo menurun berganda,

a. Persentase penyusutan setiap periode

b. Hitunglah penyusutan selama 4 tahun

Penyelesaian:

a. Persentase penyusutan setiap periode (setiap tahun) adalah

$$\frac{100\%}{4}(2) = 50\ \%$$

b. Besar penyusutan tahu ke 1 = 50% x Rp 10.000.000,-

= Rp 5.000.000,-

Nilai Buku awal tahun ke 2 = Rp10.000.000,- - Rp 5.000.000,-
= Rp 5.000.000,-
Besar penyusutan tahu ke 2 = 50% x Rp 5.000.000,-
= Rp 2.500.000,-
Nilai Buku awal tahun ke 3 = Rp 5.000.000,- - Rp 2.500.000,-
= Rp 2.500.000,-
Besar penyusutan tahu ke 3 = 50% x Rp 2.500.000,-
= Rp 1.250.000,-

S0AL LATIHAN bab 11

1. Jika terdapat suatu modal sebesar Rp.25.000.000,- dengan suku bunga 15% pertahun tentukan besar bunga tunggal untuk jangka waktu
   a. 9 bulan
   b. 20 bulan
2. Ibu Ani meminjam modal sebesar Rp.10.000.000,- jika ibu Ani harus mengembalikan dalam jangka waktu 2 tahun dengan pengembalian sebesar 8/5 dari modal pinjaman. Tentukan besar bunga pertahun
3. jika terdapat modal sebesar Rp.15.000.000,- dibungakan dengan bunga tunggal suku bunga 12% perbulan dalam waktu berapa agar modal menjadi 5/3 dari modal semula.
4. Jika modal sebesar Rp.16.000.000,-dipinjamkan selama 3 bulan dengan suku bunga 12,5% pertahun. Tentukan besar bunga tunggal eksak dan biasa, jika dilakukan pada tahun
   a. 2007 b. 2008

5. Tentukan waktu rata-rata dan waktu eksak dari tanggal 22 Pebruari 2000 sampai 17 Mei 2007
6. Ali meminjam modal sebesar Rp.100.000.000,-dengan cara diskonto, suku bunga yang disepakati 15% pertahun. Tentukan besar modal pinjaman yang diterima Ali setelah dpotong bunga.
7. Bakri menerima pinjaman setelah dipotong bunga Rp.12.000.000,-dengan cara diskonto, suku bunga 16% pertahun. Tentukan besar pinjaman Bakri.
8. Jika suatu modal sebesar M dibungakan selama 5 tahun dengan bunga majemuk sebesar 12% pertahun, dan penggabungan bunga dilakukan perkuartal. Tentukan
   a. Frekuensi penggabungan
   b. Banyaknya periode bunga
9. Jika modal sebesar Rp.25.000.000,- dibungakan dengan bunga majemuk, suku bunga1,2% perbulan. Berapa besar modal setelah
   a. 10 bulan
   b. 3 tahun
10. Jika modal sebesar 30.000.000,- dibungakan berdasarkan bunga majemuk dengan bunga 8% pertahun. Tentukan besar modal selama 5 tahun 9 bulan.
11. Jika pada awal tahun disetor sejumlah uang ke Bank sebanyak Rp.1.000.000,- besar bunga 6% pertahun, maka tentukan nilai akhir rente pada akhir tahun ke-8
12. Pada tiap akhir tahun dimasukkan uang sebesar Rp.100.000.000,- ke bank bunga yang ditawarkan 10% pertahun. Pada tahun ke-6, tentukanharga tunai rente
13. Pak karta meminjam uang di Bank sebesarRp.100.000.000,- dan harus dilunasi dengan anuitas selama 3 tahun dengan pembayaran

tiap semester, suku bunga yang ditawarkan adalah 5% persemester. Tentukan

a. Besar anuitas dengan pembulatan ribuan ke atas
b. Besarnya pembulatan jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke atas
c. Tabel rencana angsuran jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke atas
d. Angsuran terakhir jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke atas
e. Pembayaran terakhir jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke atas
f. Besar anuitas dengan pembulatan ribuan ke bawah.
g. Besarnya pembulatan jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke bawah.
h. Tabel rencana angsuran jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke bawah.
i. Angsuran terakhir jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke bawah.
j. Pembayaran terakhir jika anuitas dibulatkan ke ribuan ke bawah.

ISBN 978-602-8320-73-3
ISBN 978-602-8320-76-4

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 45 Tahun 2008 tanggal 15 Agustus 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk digunakan dalam Proses Pembelajaran.

HET (Harga Eceran Tertinggi) Rp. 20,130.00