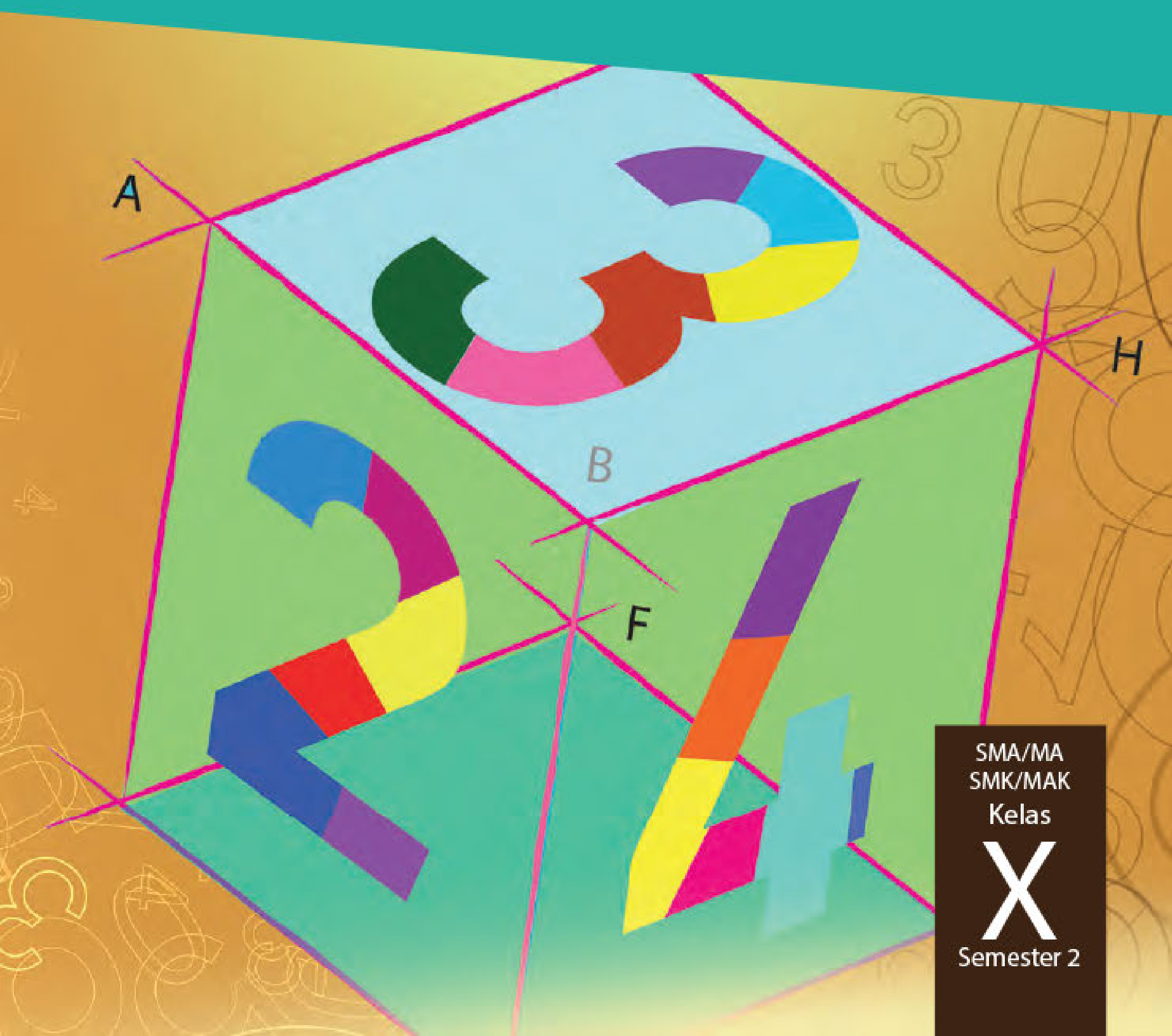
KURIKULUM 2013

EDISI REVISI 2014

MATEMATIKA



SMA/MA
SMK/MAK
Kelas
X
Semester 2

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku siswa yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku siswa ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika/Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- Edisi Revisi.
Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2014.
viii, 196 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA Kelas X Semester 2
ISBN 978-602-282-491-6 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-493-0 (jilid 1b)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Sudianto Manullang, Mangara Simanjorang, dan Yuza Terzalgi Bayuzetra.
Penelaah : Agung Lukito dan Sisworo.
Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Cetakan Ke-1, 2013
Cetakan Ke-2, 2014 (Edisi Revisi)
Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian diatas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antar variabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antar beberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Matematika Kelas X untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada peserta didik seperti uraian diatas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan peserta didik dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan: dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan peserta didik untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, peserta didik diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap peserta didik dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Implementasi terbatas pada tahun ajaran 2013/2014 telah mendapat tanggapan yang sangat positif dan masukan yang sangat berharga. Pengalaman tersebut dipergunakan semaksimal mungkin dalam menyiapkan buku untuk implementasi menyeluruh pada tahun ajaran 2014/2015 dan seterusnya. Buku ini merupakan edisi kedua sebagai penyempurnaan dari edisi pertama. Buku ini sangat terbuka dan terus dilakukan perbaikan dan penyempurnaan. Untuk itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami ucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

Jakarta, Januari 2014

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

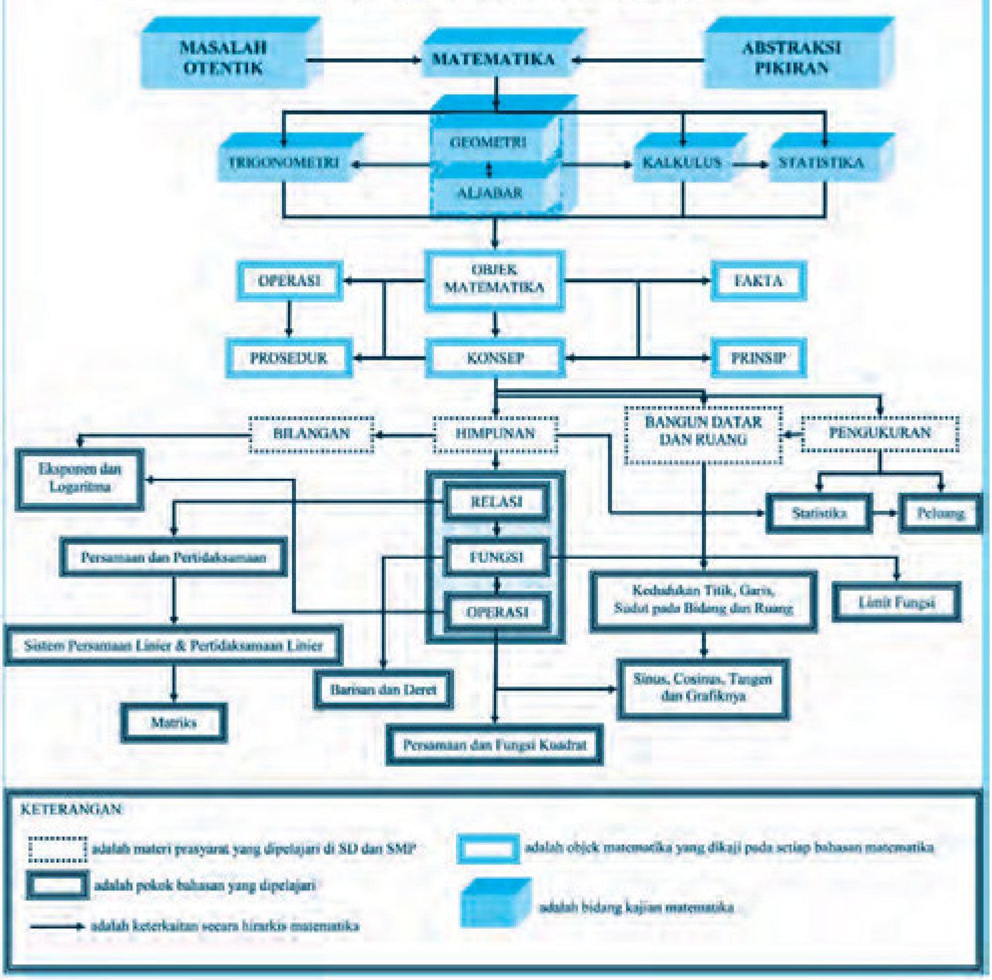
Mohammad Nuh

DAFTAR ISI

“Pendidikan adalah senjata paling mematikan di dunia,
karena dengan itu Anda dapat mengubah dunia”
– Nelson Mandela

Kami ucapkan :
Selamat belajar & mengajar
Jangan menyerah, suksesmu adalah sukses kita semua

PETA KONSEP MATEMATIKA SMA KELAS X



KURIKULUM 2013

Bab 7

Persamaan dan Fungsi Kuadrat

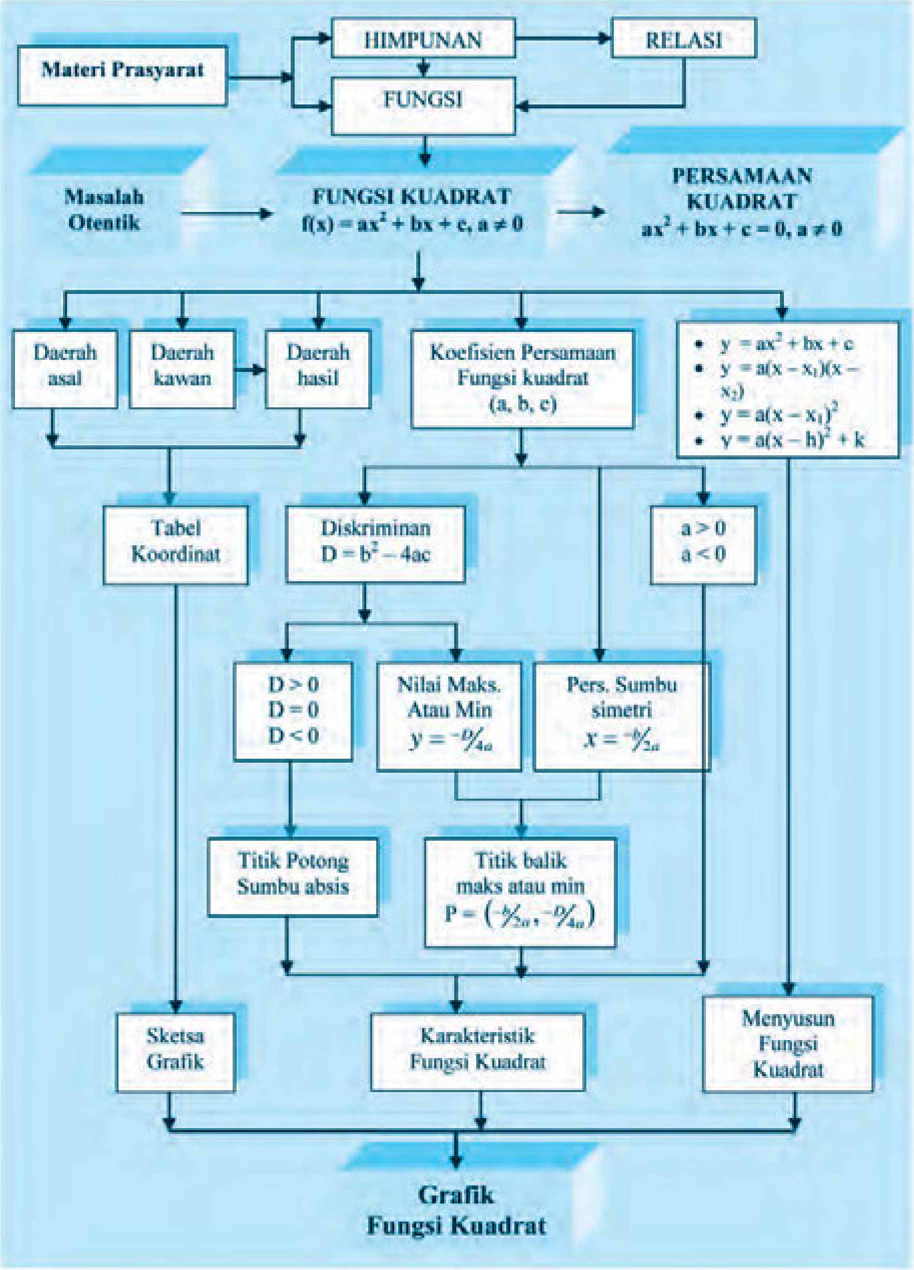
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran persamaan siswa mampu: 1. Mentransformasi diri dalam berpilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 2. Mendeskripsikan berbagai bentuk ekspresi yang dapat diubah menjadi persamaan kuadrat. 3. Mendeskripsikan persamaan dan fungsi kuadrat, memilih strategi dan menerapkan untuk menyelesaikan persamaan dan fungsi kuadrat serta memeriksa kebenaran jawabannya. 4. Menganalisis fungsi dan persamaan kuadrat dalam berbagai bentuk penyajian masalah kontekstual. 5. Menganalisis grafik fungsi dari data terkait masalah nyata dan menentukan model matematika berupa fungsi kuadrat. 6. Mengidentifikasi dan menerapkan konsep fungsi dan persamaan kuadrat dalam menyelesaikan masalah nyata dan menjelaskannya secara lisan dan tulisan. 7. Menyusun model matematika dari masalah yang berkaitan dengan persamaan dan fungsi kuadrat dan menyelesaikan serta memeriksa kebenaran jawabannya. 8. Menggambar dan membuat sketsa grafik fungsi kuadrat dari masalah nyata berdasarkan data yang ditentukan dan menafsirkan karakteristiknya.	Melalui pembelajaran materi fungsi kuadrat, siswa memperoleh pengalaman belajar • menjelaskan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait dengan model matematika sebagai persamaan kuadrat. • merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang berkaitan dengan persamaan kuadrat.. • menyelesaikan model matematika untuk memperoleh solusi permasalahan yang diberikan. • menafsirkan hasil pemecahan masalah. • menuliskan ciri-ciri persamaan kuadrat. dari beberapa model matematika • menuliskan konsep persamaan kuadrat.berdasarkan ciri-ciri yang ditemukan dengan bahasanya sendiri. • menurunkan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan persamaan kuadrat berdasarkan konsep yang sudah dimiliki.. • menggunakan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk memecahkan masalah otentik. • bekerjasama membangun ide-ide dan berlatih berpikir kritis, logis dan kreatif

Istilah Penting

- *Persamaan Kuadrat*
- *Peubah*
- *Koefisien*
- *Konstanta*
- *Akar-akar Persamaan*
- *Fungsi kuadrat*
- *Parabola*
- *Sumbu Simetri*
- *Titik Puncak*
- *Nilai Maksimum dan Minimum*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

I. PERSAMAAN KUADRAT

1. Menemukan Konsep Persamaan Kuadrat Satu Variabel

Banyak permasalahan dalam kehidupan yang pemecahannya terkait dengan konsep dan aturan-aturan dalam matematika. Secara khusus keterkaitan konsep dan prinsip-prinsip persamaan kuadrat, sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu/bersumber dari fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep persamaan kuadrat dapat dibangun/ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dan selesaikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Di dalam proses pemecahan masalah-masalah yang diberikan, kamu cermati objek-objek budaya atau objek lingkungan budaya yang dilibatkan dalam permasalahan yang diberikan. Objek-objek itu menjadi bahan aspirasi/inspirasi, karena terkadang ada konsep matematika melekat pada objek itu yang tidak kita sadari dan ternyata sebagai kata kunci dalam penyelesaian masalah. Demikian juga kamu tidak boleh mengabaikan atau melupakan konsep-konsep dan aturan-aturan matematika yang telah dipelajari sebelumnya, baik di tingkat SD, SMP, bahkan pada materi yang baru saja kamu pelajari.

Dalam menyelesaikan masalah matematika, kamu bisa pada kesepakatan antara kamu dan teman-teman serta guru, adalah menggunakan variabel-variabel bersifat abstrak sebab matematika adalah hasil abstraksi pemikiran manusia. Matematika menganut kebenaran konsistensi atau tidak boleh ada di dalamnya, unsur-unsur, simbol-simbol, konsep-konsep, dan rumus-rumus yang saling bertentangan. Alat ukur kebenarannya, jika konsep yang ditemukan, ukuran kebenarannya apabila konsep tersebut diterima pada struktur matematika yang sudah ada sebelumnya. Prinsip (rumus-rumus, sifat-sifat) yang ditemukan, ukuran kebenarannya dapat dibuktikan kebenarannya menggunakan konsep atau aturan yang sudah ada sebelumnya.

Masalah-7.1

Arsitek Ferdinand Silaban merancang sebuah rumah adat Batak di daerah Tuk-tuk di tepi Danau Toba. Ia menginginkan luas penampang atap bagian depan 12 m^2. Di dalam penampang dibentuk sebuah persegi panjang tempat ornamen (ukiran) Batak dengan ukuran lebar 2 m dan tingginya 3 m. Bantulah Pak Silaban menentukan panjang alas penampang atap dan tinggi atap bagian depan!

Gambar 7.1 Rumah Adat

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan sajikan/dekati masalah dalam gambar. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi supaya dapat terpecahkan. Perhatikan konsep apa yang melekat pada penampang depan atap rumah adat tersebut. Gunakan sebagai langkah awal untuk menyelesaikan masalah. Ingat kembali apa yang dimaksud dua bangun dikatakan kongruen dan lakukan perbandingan panjang sisi-sisi kedua bangun tersebut untuk memperoleh persamaan tinggi penampang atap.

Ingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai variabel dengan menggunakan manipulasi aljabar pada persamaan yang diperoleh? Berdasarkan nilai variabel akan ditentukan tinggi penampang atap dan panjang alasnya.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Luas penampang atap bagian depan 12 m^2

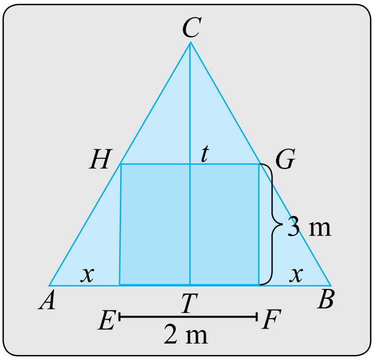
Ukuran persegipanjang tempat ornamen adalah 3 m × 2 m

Ditanya:

a. Panjang alas penampang atap

b. Tinggi atap

Kamu ilustrasikan masalah di atas seperti gambar berikut!



Gambar 7.2 Penampang Atap Bagian atas

- Memperhatikan konsep apa yang melekat pada penampang depan atap rumah adat tersebut.

Kamu cermati segitiga sama kaki ABC dan lakukan hal berikut.
Misalkan panjang $AE = FB = x$ m.
Karena penampang atap rumah berbentuk segitiga sama kaki, maka

$$\text{Luas} = \frac{1}{2} \times \text{panjang alas} \times \text{tinggi}$$

$$L = \frac{1}{2} \times (AE + EF + FB) \times t$$

$$12 = \frac{1}{2} t(x + 2 + x)$$

$$12 = t(1 + x) \quad \text{.......................................} \quad (1)$$

Perhatikan segitiga CTB dan segitiga GFB. Kedua segitiga tersebut sebangun.

$$\frac{CT}{GF} = \frac{TB}{FB} \Leftrightarrow \frac{t}{3} = \frac{1+x}{x}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3+3x}{x} \quad \text{.......................................} \quad (2)$$

Substitusikan persamaan 2) ke persamaan 1) sehingga diperoleh

$$12 = \left(\frac{3+3x}{x}\right)(1+x) \Leftrightarrow 12x = (3+3x)(1+x)$$

$$\Leftrightarrow 12x = 3 + 3x + 3x + 3x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 12x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$\therefore x^2 - 2x + 1 = 0$

Ingat kembali materi persamaan kuadrat yang telah dipelajari di SMP, bagaimana cara menentukan nilai-nilai x dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (3). Berdasarkan persamaan (3) akan ditentukan nilai-nilai x.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - x - x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) - 1(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

- Apa makna dari $a \times b = 0$ dan apa kaitannya dengan $(x - 1)(x - 1) = 0$

Dengan menggunakan nilai x akan ditentukan nilai t.

Untuk $x = 1$ diperoleh $t = \dfrac{3-3x}{x} = 6$.

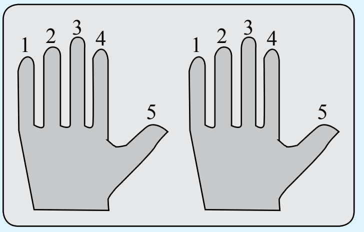
Sehingga diperoleh panjang alas dan tinggi penampang atap rumah adalah 4 m dan 6 m.

Sering kita temui orang tua yang sudah lanjut usia, mampu menghitung harga telur (banyak telur, cukup banyak) tanpa menggunakan kalkulator dengan waktu cukup singkat. Sementara orang tua tersebut tidak pernah menduduki jenjang pendidikan. Ternyata mereka memiliki warisan dari leluhur cara menjumlahkan dan mengalikan bilangan. Agar kamu mengetahuinya, gunakan jari tanganmu dan pecahkan Masalah 7.2 berikut.

Masalah-7.2

Nenek moyang salah satu suku di Indonesia dalam melakukan operasi hitung penjumlahan dan perkalian mereka menggunakan basis lima dengan fakta bahwa banyak jari tangan kiri atau kanan adalah lima. Coba bantu temukan aturan perkalian untuk menentukan hasil kali bilangan x dan y dengan

a. $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$
b. $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in N$



Gambar 7.3 Jari Tangan

Sebelum menemukan aturan perkalian bilangan-bilangan yang dibatasi pada bagian a) dan b), coba pilih dua bilangan x dan y, $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$ (misalnya, 6×8). Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan 6 di jari tangan kiri dan bilangan 8 di jari tangan kanan. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut!

1) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan x di tangan kiri, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
2) Setelah kamu mencacah satu kali bilangan y di tangan kanan, ada berapa banyak jari yang terpakai dan yang tidak terpakai pada pencacahan kedua kali?
3) Berapa jumlah banyak jari yang terpakai pada tangan kiri dan banyak jari yang terpakai pada tangan kanan pada saat pencacahan kedua kali?
4) Berapa hasil kali jumlah jari yang terpakai di tangan kiri dan jari di tangan kanan dengan hasil pada langkah 3)?
5) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kiri saat pencacahan kedua kali ?
6) Berapa banyak jari yang tidak terpakai di tangan kanan saat pencacahan kedua kali?
7) Berapa hasil kali bilangan pada langkah 5) dan 6)?
8) Berapa hasil jumlah bilangan pada langkah 4) dan 7)

Berdasarkan 8 langkah penentuan hasil perkalian bilangan x dan y, bekerjasama dengan temanmu satu kelompok untuk menemukan aturan perkalian dua bilangan x dan y, $5 < x, y < 10$, dengan $x, y \in N$.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan: z adalah bilangan basis (dalam contoh adalah 5)

$x = z + a, \;\; a < z$

$y = z + b, \;\; b < z$

1. hitung $(a + b)$
2. hitung $(z + z) = 2z$
3. kalikan hasil langkah 1) dan 2), yaitu $(a + b)\, 2z$
4. hitung $(z – a)$
5. hitung $(z – b)$
6. kalikan hasil langkah 4) dan 5), yaitu $(z – a)\,(z – b)$
7. jumlahkan hasil langkah 3) dan 6), yaitu $(a + b)\, 2z + (z – a)\,(z – b)$
8. diperoleh $x \times y = (a + b)\, 2z + (z – a)\,(z – b)$, $5 < x, y < 10$, $x, y \in \mathrm{N}$

Untuk contoh di atas diperoleh

$6 \times 8 = (a + b)\, 2z + (z – a)(z – b)$

$48 = 8z + (z – 1)\,(z – 3)$

$\therefore \;\; z^2 + 4z - 45 = 0$ .... (1)

Latihan 7.1

Cermati aturan perkalian pada bagian a) dan coba temukan aturan perkalian bilangan pada bagian b). Awali kerja kamu dengan memilih dua bilangan $x = 5$ dan $y \geq 5$, dengan $x, y \in N$. Ingat apa arti basis 5, lakukan pencacahan bilangan x di jari tangan kiri dan bilangan y di jari tangan kanan.

Masalah-7.3

Pak Anas memiliki tambak ikan mas di hulu sungai yang berada di belakang rumahnya. Setiap pagi, ia pergi ke tambak tersebut naik perahu melalui sungai yang berada di belakang rumahnya. Dengan perahu memerlukan waktu 1 jam lebih lama menuju tambak daripada pulangnya. Jika laju air sungai 4 km/jam dan jarak tambak dari rumah 6 km, berapa laju perahu dalam air yang tenang?

Gambar 7.4 Sungai

Ilustrasi masalah dapat dicermati pada gambar berikut.

Selesaikanlah masalah di atas, dan agar pekerjaan kamu lebih efektif renungkan beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana kecepatan perahu saat menuju hulu sungai Asahan dan kecepatan perahu saat Pak Anas pulang?
2) Jika diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai di tujuan, apa yang dapat kamu simpulkan dari keadaan perahu?
3) Coba temukan bentuk perasamaan kuadrat dalam langkah pemecahan masalah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan V_a adalah kecepatan air sungai dengan $V_a = 4$ km/jam
V_{hu} adalah kecepatan perahu ke hulu
V_{hi} adalah kecepatan perahu saat pulang
V_t adalah kecepatan perahu dalam air tenang
t_1 adalah waktu yang diperlukan menuju tambak
t_2 adalah waktu yang digunakan menuju rumah (pulang)
S adalah jarak tambak dari rumah Pak Anas
Bagaimana kecepatan perahu saat pergi ke hulu dan saat menuju hilir (pulang)?
Kecepatan perahu saat menuju hulu sungai Asahan menentang arus air dan saat Pak Anas pulang, kecepatan perahu searah dengan arus air sungai mengalir. Sehingga, jika dimisalkan $V_{at} = x$ km/jam maka
$V_{hu} = x - 4$ dan $V_{hi} = x + 4$
Diasumsikan perahu tidak pernah berhenti sebelum sampai di tujuan berarti
$x \neq -4$ dan $x \neq 4$.

$$t_1 - t_2 = \frac{S}{V_{hu}} - \frac{S}{V_{hi}} = 1$$

$$\frac{6}{x-4} - \frac{6}{x+4} = 1$$

$$6(x+4) - 6(x-4) = (x+4)(x-4)$$
$$6x + 24 - 6x + 24 = x^2 + 4x - 4x - 16$$
$$48 = x^2 - 16$$
$$\therefore x^2 - 64 = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$x^2 - 64 = 0 \Rightarrow (x-8)(x+8) = 0$$
$$\Rightarrow x - 8 = 0 \text{ atau } x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x = 8 \text{ atau } x = -8$$

Kecepatan perahu di air tenang adalah $V_{at} = x = 8$ km/jam.
Nilai $x = -8$ tidak berlaku sebab kecepatan perahu bergerak maju selalu bernilai positif.

Mari kita temukan sebuah model matematika berupa persamaan kuadrat dari permasalahan berikut.

Masalah-7.4

Seorang penjual komputer telah merakit komputer dengan biaya selama seminggu sebesar Rp 37.500.000,-. Hasil rakitannya selama seminggu dipasarkan dan berhasil terjual dengan sisa 3 unit. Jika hasil penjualan komputer Rp 36.0000.000,- dengan keuntungan tiap komputer Rp 500.000,-, tentukan jumlah komputer yang diproduksi selama seminggu.

Alternatif Penyelesaian

Misalkan banyak komputer yang dirakit dalam seminggu adalah x.

Biaya merakit tiap unit komputer = $\dfrac{37.500.000}{x}$ dan

Harga jual setiap unit komputer = $\dfrac{36.000.000}{x-3}$

Ingat kembali konsep keuntungan pada materi aritmatika sosial di SMP.
Untung = Harga penjualan – Biaya perakitan

$$500.000 = \frac{36.000.000}{x-3} - \frac{37.500.000}{x}$$

$$1 = \frac{72}{x-3} - \frac{75}{x} \qquad \text{(sama-sama dibagi 500.000)}$$

$x(x-3) = 72x - 75(x-3)$

$x^2 - 3x = 72x - 75x + 225$

$x^2 - 3x - 72x + 75x - 225 = 0$

$x^2 - 225 = 0$

$(x-15)(x+15) = 0$

$x = 15$ atau $x = -15$
$x = -15$ tidak mungkin, sehingga x yang mungkin adalah $x = 15$. Mengapa?
Jadi, banyak komputer yang dirakit dalam waktu satu minggu sebanyak 15 unit.

- Temukan persamaan kuadrat pada langkah pemecahan Masalah 7.1, 7.2, 7.3, dan 7.4
  - $x^2 - 2x + 1 = 0$
  - $z^2 + 4z - 45 = 0$
  - $3z^2 + 2z - 85 = 0$
  - $x^2 - 64 = 0$
  - $x^2 - 225 = 0$
- Tuliskan ciri-ciri persamaan kuadrat secara individual dan diskusikan dengan teman secara klasikal.

Ciri-ciri persamaan kuadrat.
- Sebuah persamaan
- Pangkat tertinggi variabelnya adalah 2 dan pangkat terendah adalah 0
- Koefisien variabelnya adalah bilangan real
- Koefisien variabel berpangkat 2 tidak sama dengan nol
- Koefisien variabel berpangkat 1 dan 0 dapat bernilai 0.

Berdasarkan ciri-ciri persamaan kuadrat di atas, coba kamu tuliskan pengertian persamaan kuadrat dengan kata-katamu sendiri dan diskusikan hasilnya dengan temanmu secara klasikal. Dari hasil secara klasikal tetapkan definisi berikut.

Definisi 7.1

Persamaan kuadrat dalam x adalah suatu persamaan berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$.

Keterangan: x adalah variabel atau peubah
a adalah koefisien x^2
b adalah koefisien x
c adalah konstanta persamaan

Contoh 7.1

Persamaan linear satu variabel $2x + 5 = 0$ bukan persamaan kuadrat sebab persamaan $2x + 5 = 0$ dapat dibentuk menjadi persamaan $0x^2 + 2x + 5 = 0$, tetapi koefisien x^2 adalah nol. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan $2x + 5 = 0$ tidak memenuhi syarat Definisi 7.1, sebab koefisien x^2 adalah 0.

Contoh 7.2

Sebuah bola bergerak dari ketinggian h m. Ketinggian bola dari tanah untuk setiap detiknya ditentukan fungsi waktu $h(t) = 20t - 5t^2$. Saat bola tiba di atas tanah, apa yang kamu temukan?

Penyelesaian

Saat bola tiba di atas tanah, $h(t) = 0$.

$h(t) = 0 \Rightarrow h(t) = 20t - 5t^2 = 0$.

Persamaan $20t - 5t^2 = 0$ termasuk persamaan kuadrat sebab persamaan $20t - 5t^2 = 0$ dapat ditulis menjadi $-5t^2 + 20t + 0 = 0$, dengan koefisien $a = -5 \neq 0$, $b = 20$ dan $c = 0$. Berdasarkan Definisi 7.1 persamaan $20t - 5t^2 = 0$ merupakan persamaan kuadrat dengan satu variabel, yaitu t.

Contoh 7.3

Persamaan $x^2 + y^2 - 2x + 5 = 0$, bukan persamaan kuadrat satu variabel sebab persamaan tersebut memuat dua peubah, yaitu x dan y.

Latihan 7.2

Di depan sebuah sekolah akan dibangun lapangan bola basket. Tanah kosong yang tersedia berukuran 60 m × 30 m. Karena dana terbatas, maka luas lapangan yang direncanakan adalah 1000 m^2. Untuk memperoleh luas yang diinginkan, ukuran panjang tanah dikurangi x m dan ukuran lebar dikurangi x m. Dapatkah kamu menemukan sebuah persamaan kuadrat dari masalah ini?

Uji Kompetensi 7.1

1. Apakah persamaan yang diberikan merupakan persamaan kuadrat? Berikan alasanmu!
   a. $x^2y = 0,\ y \in R, y \neq 0.$
   b. $x + \frac{1}{x} = 0,\ x \neq 0.$
2. Robert berangkat ke sekolah meng–enderai sepeda. Jarak sekolah dari rumahnya 12 km. Robert berangkat dengan kecepatan awal sepeda bergerak 7 km/jam. Karena Robert semakin lelah, kecepatan sepedanya mengalami perlambatan 2 km/jam. Berapa lama waktu yang digunakan Robert sampai di sekolah.
3. Pada sebuah kerucut lingkaran tegak diketahui bahwa: penambahan volume karena jari-jarinya bertambah sepanjang 24 cm sama dengan penambahan volume karena tingginya bertambah 24 cm. Jika tinggi semula kerucut 3 cm, berapakah jari-jari kerucut semula ?
4. Dua buah jenis printer komputer akan digunakan untuk mencetak satu set buku. Jenis printer pertama, $\frac{1}{x}$ jam lebih cepat dari jenis printer kedua untuk menyelesaikan cetakan satu set buku. Jika kedua jenis printer digunakan sekaligus, maka waktu yang digunakan untuk mencetak satu set buku adalah 4 jam. Berapa waktu yang dibutuhkan printer jenis kedua untuk mencetak satu set buku.
5. Harga beli sejumlah produk adalah Rp 18.000.000,-. Produk dijual dengan sisa 3 unit dengan hasil penjualan Rp 21.600.000,-. Jika harga setiap produk yang dibeli adalah Rp 600,- lebih murah dari haruga jualnya, temukan bentuk persamaan kuadrat dari permasalahan tersebut.
6. Sejumlah investor akan menanamkan modalnya dalam jumlah yang sama untuk membuka usaha di suatu daerah. Investasi yang akan ditanamkan sebesar Rp 19,5 miliar. Pada saat usaha akan dimulai, ada 4 investor lagi yang akan ikut bergabung. Jika keempat orang itu ikut bergabung, maka masing-masing akan membayar Rp 1,55 miliar kurangnya dari yang telah mereka bayar. Tentukan jumlah investor mula-mula yang berencana akan menanamkan modalnya.
7. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, tentukan nilai terbesar yang mungkin $a^3 + 4a^2 + 9988$.
8. Jika $a^3 + b^3 = 637$ dan $a + b = 13$, tentukan nilai $(a–b)^2$.
9. Faktorkan: $4kn + 6ak + 6an + 9a^2$.
10. Jika $a + b + c = 0$ dengan $a, b, c \neq 0$, tentukan nilai

$$\left[a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]^2$$

Projek

Rancanglah minimal dua masalah nyata di lingkungan sekitarmu yang terkait dengan persamaan kuadrat dan berilah penyelesaian kedua masalah tersebut. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

b. Menentukan Akar-Akar Persamaan Kuadrat

Ada beberapa cara (aturan) menentukan akar-akar (penyelesaian) persamaan kuadrat. Aturan tersebut seluruhnya diturunkan dari konsep (Definisi-7.1) yang telah kita temukan. Aturan tersebut antara lain, cara memfaktorkan, melengkapkan kuadrat sempurna, dan rumus *ABC*. Ketiga aturan ini memiliki kelebihan dan kelemahan terkait dengan efisiensi waktu yang digunakan untuk menentukan akar-akar sebuah persamaan kuadrat. Agar lebih terarah pembahasan kita, mari kita coba memecahkan masalah-masalah yang diberikan.

1) Cara Pemfaktoran

Latihan 7.3

Temukan pola atau aturan memfaktorkan berdasarkan konsep persamaan kuadrat untuk menentukan akar-akarnya (harga-harga x yang memenuhi persamaan).
Selesaikanlah masalah di atas, agar pekerjaan kamu lebih efektif pahamilah beberapa pertanyaan berikut!

a) Apa yang dimaksud dengan memfaktorkan? Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Nilai x dapat kita tentukan dengan cara pemfaktoran. Cara pemfaktoran dapat kita lakukan dengan memperhatikan koefisien x^2, x, dan konstanta c.
b) Ada berapa kasus yang dapat kamu pilah agar pemfaktoran persamaan kuadrat dapat terwakili seluruhnya.

Contoh 7.4

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $3z^2 + 2z - 85 = 0$ dengan cara pemfaktoran.

Alternatif Penyelesaian

$$3z^2 + 2z - 85 = \frac{1}{3}\left(9z^2 + 6z - 225\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(9z^2 + 3\left(17 - 15\right)z + \left(17 \times \left(15\right)\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\left(9z^2 + 51z\right) - \left(45z + 255\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\left(3z + 17\right)3z - 15\left(3z + 17\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(3z + 17\right)\left(3z - 15\right) = 0 \text{ atau } \left(3z + 17\right)\left(z - 5\right) = 0$$

> Ingat bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$.
> $m = 17$
> $n = -15$
> $m + n = 2$
> $m \times n = -255$

Harga-harga z yang memenuhi adalah $z = \dfrac{-17}{3}$ atau $z = 5$, sehingga himpunan penyelesaian persamaan $3z^2 + 2z - 85 = 0$ adalah $\left\{\dfrac{-17}{3}, 5\right\}$.

2) Cara Melengkapkan Kuadrat Sempurna

Untuk menemukan aturan penentuan akar-akar persamaan kuadrat dengan cara melengkapkan kuadrat sempurna cermati beberapa pertanyaan berikut.

a) Apa yang dimaksud melengkapkan kuadrat sempurna?
b) Apakah kamu masih ingat pelajaran di SMP bahwa $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?
c) Dapatkah kamu membentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dalam bentuk $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?
d) Apakah seluruh bentuk persamaan kuadrat dapat ditentukan akarnya dengan teknik kuadrat sempurna?

Berdasarkan Definisi-7.1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$. Untuk $a = 1$,

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + bx + c - c = 0 - c$$

$$\Leftrightarrow x^2 + bx + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}b)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2}b) = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\text{, jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c}\text{, jika } \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - c \geq 0$$

Contoh 7.5

Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 6 = 0$.

Alternatif Penyelesaian

$x^2 - x - 6 = 0$
$x^2 - x = 6$

$$x^2 - x + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 6 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x^2 - x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2}$$

$$x = \pm\frac{5}{2} + \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

$$x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = -2$$

Jadi akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 6 = 0$ adalah $x_1 = 3$ dan $x_2 = -2$.

3) Menggunakan Rumus *ABC*

Masih ingatkah kamu rumus *abc* waktu belajar persamaan kuadrat di SMP? Darimana rumus itu diturunkan? Bagaimana cara menemukannya?. Untuk itu perhatikan beberapa pertanyaan berikut.

a) Dapatkah kamu membagi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ dengan koefisien a? mengapa?
b) Setelah kamu membagi persamaan dengan koefisien a, dapatkah kamu melakukan manipulasi aljabar untuk mendapatkan bentuk kuadrat sempurna?
c) Bagaimana memanipulasi dan menyederhanakan persamaan agar diperoleh nilai x_1 dan x_2?
d) Akar persamaan kuadrat adalah dua bilangan, dapatkah kamu membedakan jenis akar-akar itu dari segi jenis bilangannya dan nilainya? Apa yang membedakan akar-akar tersebut?
e) Temukanlah jenis-jenis akar-akar persamaan kuadrat dilihat dari nilai diskriminan.

Berdasarkan Definisi-7.1, bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sifat-1

Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, dan c bilangan real dan $a \neq 0$, adalah $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

c. Menemukan Rumus Untuk Menentukan Jumlah dan Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

Akar-akar sebuah persamaan kuadrat dapat dijumlahkan atau dikalikan. Bagaimana menentukan hasil jumlah dan hasil kali akar-akar dan kaitannya dengan koefisien-koefisien persamaan kuadrat tersebut? Untuk itu selesaikanlah masalah berikut.

Temukan aturan (rumus) menentukan jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat!

Selesaikanlah masalah di atas, lakukan tugas bersama temanmu satu kelompok. Beberapa pertanyaan yang kamu harus cermati untuk menemukan rumus hasil jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat antara lain:

a) Dapatkah kamu menentukan akar-akar persamaan kuadrat dengan aturan yang sudah kamu miliki? Aturan mana yang kamu pilih dari tiga cara di atas terkait dengan menemukan rumus jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat?
b) Bagaimana syarat menjumlahkan dan mengalikan dua akar?
c) Dapatkah kamu menyatakan v jumlah dan hasil kali akar-akar persamaan kuadrat dalam koefisien-koefisien persamaan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan rumus *ABC* di atas, akar-akar persamaan kuadrat adalah

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dan } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. Jumlah Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

b. Hasil Kali Akar-akar Persamaan Kuadrat

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Berdasarkan kedua rumus di atas, disimpulkan

Sifat-2

Jika persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$ memiliki akar-akar x_1 dan x_2, maka $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ dan $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

d. Persamaan Kuadrat Dengan Akar-akar x_1 dan x_2

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2, maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Sehingga permasalahan kita saat ini adalah sebagai berikut.

Temukan aturan untuk menentukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan x_2.
Selesaikanlah masalah di atas, lakukan bersama temanmu satu kelompok. Agar pekerjaan kamu lebih efektif pahamilah beberapa pertanyaan berikut

a) Bagaimana kamu akan mengkonstruk sebuah persamaan kuadrat dengan akar-akar yang diberikan?
b) Apa keterkaitan rumus hasil jumlah dan rumus hasil kali akar-akar yang diberikan?

Jika diketahui akar-akar persamaan kuadrat x_1 dan x_2 maka kita dapat menemukan persamaan kuadratnya. Berdasarkan Definisi-1, kita memiliki bentuk umum persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{c}{a} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_1)x - x_2\,(x - x_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}
$$

Sifat-3

Persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$.

Uji Kompetensi 7.2

1. Tentukanlah akar-akar persamaan kuadrat berikut.
   a. $x^2 - 12x + 20 = 0$
   b. $3x^2 + 10x + 36 = 0$
   c. $2x^2 + 7x = 5$

2. Persamaan $(m - 1)x^2 + 4x + 2m = 0$ mempunyai akar-akar real. Tentukan nilai m yang memenuhi!

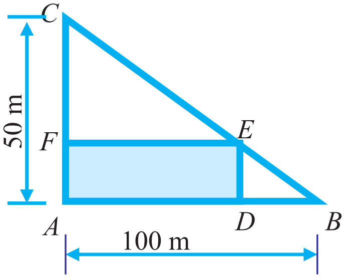
3. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, tunjukkan bahwa
   a. $\alpha^4 + \beta^4 = \dfrac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$
   b. $(\alpha - \beta)^2 = \dfrac{b^2 - 4ac}{a^2}$

4. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + 5 = 0$ adalah p dan q. Temukan persamaan kuadrat yang akar-akarnya $(p + 2)$ dan $(q + 2)$!

5. Dua jenis mesin penggiling padi digunakan untuk menggiling satu peti padi. Untuk menggiling satu peti padi, mesin jenis pertama lebih cepat $\frac{1}{2}$ jam dari mesin jenis kedua. Sementara jika kedua mesin digunakan sekaligus, dapat menggiling satu peti padi selama 6 jam.
   a. Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis pertama untuk menggiling satu peti padi.
   b. Berapa jam waktu yang digunakan mesin jenis kedua untuk menggiling satu peti padi.

6. Jika $a^2 + a - 3 = 0$, tentukan nilai terbesar yang mungkin $a^3 + 4a^2 + 9988$.

7. Pada sebidang tanah akan didirikan sebuah sekolah SD. Bentuk tanah dan ukuran tanah dapat dilihat pada gambar.



8. Jika $\dfrac{x}{x^2 + 3x + 1} = a$, tentukan nilai $\dfrac{x^2}{x^4 + 3x^2 + 1}$.

9. Jika $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} + \sqrt{2009x^2 - 11x + 96} = 16$,tentukan nilai yang mungkin untuk $\sqrt{2009x^2 - 11x + 144} - \sqrt{2009x^2 - 11x + 96}$.

10. Faktorkan : $3x^2 - 4xy + y^2 + 2x - 6y - 16$.

Projek

Himpunlah informasi penggunaan sifat-sifat dan aturan yang berlaku pada persamaan kuadrat di bidang ekonomi, fisika, dan teknik bangunan. Kamu dapat mencari informasi tersebut dengan menggunakan internet, buku-buku dan sumber lain yang relevan. Temukan berbagai masalah dan pemecahannya menggunakan aturan dan sifat-sifat akar persamaan kuadrat. Buatlah laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas!

2. FUNGSI KUADRAT

a. Menemukan Konsep Fungsi Kuadrat

Fungsi kuadrat sering kita temukan dalam permasalahan kehidupan nyata yang menyatu pada fakta dan lingkungan budaya kita. Konsep fungsi kuadrat dapat ditemukan di dalam pemecahan permasalahan yang kita hadapi. Untuk itu perhatikan dengan cermat permasalahan-permasalahan yang diberikan.

Masalah-7.5

Untuk pengadaan air bersih bagi masyarakat desa, anak rantau dari desa tersebut sepakat membangun tali air dari sebuah sungai di kaki pegunungan ke rumah-rumah penduduk. Sebuah pipa besi yang panjangnya *s* dan berdiameter d ditanam pada kedalaman 1 m di bawah permukaan air sungai sebagai saluran air. Tentukanlah debit air yang mengalir dari pipa tersebut. (Gravitasi bumi adalah 10 m/det^2).

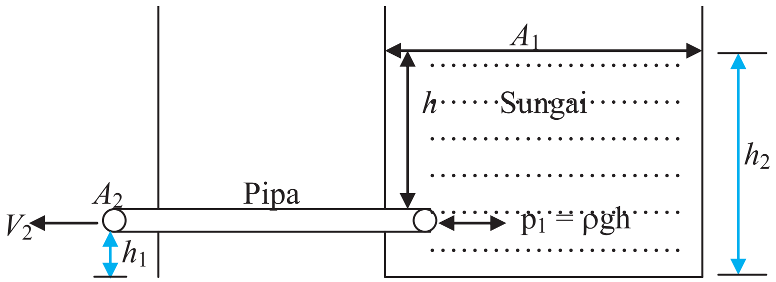
Gambar 7.6 Sumber Air Bersih

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan masalah dalam Gambar 7.6. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi sehingga masalah tersebut dapat diselesaikan.

Beberapa pertanyaan yang harus kamu pahami untuk dapat memecahkan masalah dengan baik antara lain sebagai berikut.

1) Apa yang terjadi jika luas permukaan sungai jauh lebih luas dari luas permukaan pipa?
2) Bagaimana tekanan air pada pangkal pipa di ujung pipa serta aturan apa yang terkait dengan keadaan tersebut?
3) Dapatkah kamu menentukan kecepatan air yang keluar dari mulut pipa menggunakan aturan pada pertanyaan 2)?
4) Dapatkah kamu menentukan debit air yang mengalir dari pipa dengan mengingat rumus debit zat cair, saat kamu belajar di SD?
5) Apa keterkaitan luas penampang pipa dengan kecepatan air mengalir?

Alternatif Penyelesaian



Gambar 7.7 Ilustrasi Posisi Pipa di Dalam Sungai

Misalkan:

p_1 adalah tekanan air pada mulut pipa

p_2 adalah tekanan air pada ujung pipa

h adalah kedalaman pipa di bawah permukaan air sungai = 1 m

h_1 adalah ketinggian pipa dari permukaan tanah

h_2 adalah ketinggian permukaan air sungai

V_1 adalah kecepatan air sungai mengalir

V_2 adalah kecepatan air mengalir dari ujung pipa

A_1 adalah luas penampang permukaan air sungai

A_2 adalah luas penampang permukaan ujung pipa

g adalah gravitasi bumi = 10 m/det^2.

- Apa yang terjadi jika A_1 jauh lebih dari A_2. Diharapkan jawaban siswa sebagai berikut.

Jika A_1 lebih besar dan semakin besar dari A_2 ($A_1 >>> A_2$), maka volume V_1 lebih kecil dan semakin kecil dari V_2 ($V_1 <<< V_2$), akibatnya V_1 menuju 0 (nol).
Karena tekanan air pada pangkal pipa dan diujung pipa sama maka berdasarkan gambar di atas diperoleh persamaan

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$\rho g(h_1 - h_2) = \frac{1}{2}\rho V_2^2 \quad \text{(karena } V_1^2 \text{ menuju nol)}$$

$$gh = \frac{1}{2} V_2^2 \quad \text{(karena } h = h_1 - h_2\text{)}$$

$$2gh = V_2^2 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{2gh}$$

$\therefore$ Kecepatan air mengalir dari pipa adalah $V = \sqrt{2gh}$

Debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah volume air yang mengalir persatuan waktu.

$$q = \frac{volume}{waktu}$$

$$= \frac{A \times S}{t}$$

$$= A \times V.$$

$q = (\frac{1}{4}\pi d^2)(\sqrt{2gh})$ (penampang pipa berbentuk lingkaran, luas penampang pipa adalah A) $= \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$, ($d$ adalah diameter pipa)

Debit air yang mengalir dari pipa dinyatakan dalam fungsi berikut

$$\therefore q(d) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)d^2,\ d \in R,\ d \geq 0$$

Sekarang perhatikan contoh lainnya, kain tenun yang berasal dari Sumatera Barat atau yang lebih dikenal dengan songket Minangkabau merupakan suatu hasil karya tradional yang perlu dipertahankan. Kekayaan motifnya ternyata juga memiliki arti dan nilai kebersamaan tersendiri. Adapun jenis-jenis motif dari kain songket Minangkabau tersebut diantaranya adalah motif Pucuk Rabuang, motif Itiak Pulang Patang, motif Kaluak Paku, dan yang lainnya. Motif Kaluak Paku misalnya memiliki makna bahwa kita sebagai manusia haruslah mawas diri sejak kecil dan perlu belajar sejak dini mulai dari keluarga untuk menjalankan kehidupan di masyarakat agar kita menjadi lebih kuat dan tidak mudah terpengaruh hal negatif. Makna lainnya, yaitu seorang pemimpin harus mampu menjadi teladan bagi masyarakat yang ada disekitarnya.

Ukuran panjang dan lebar kain songket cukup bervariasi. Sekarang mari kita perhatikan salah satu jenis kain songket, yaitu kain sonket motif Kaluak Paku, dalam hal ini kita jadikan bahan inspirasi mengangkat masalah matematika terkait fungsi kuadrat.

Masalah-7.6

Gambar 7.8 Kain Songket

Sebuah kain songket memiliki ukuran panjang $\frac{9}{4}$ m dan lebar $\frac{3}{4}$ m. Di bagian tengah terdapat 5 bagian daerah yang luas seluruhnya $\frac{451}{400}$ m. Tentukan ukuran bagian kain songket yang berwarna merah dan daerah berambu benang.

♦ Coba sendiri!

Pahamilah masalah di atas, artinya kamu tuliskan hal apa yang diketahui, apa yang ditanyakan, dan interpretasikan dalam gambar. Gunakan variabel untuk menyatakan masalah dalam matematika. Ingat konsep dan aturan-aturan apa saja yang terkait dengan masalah yang dihadapi sehingga dapat terpecahkan.

Cermatilah beberapa pertanyaan yang mengarahkan kamu bekerja lebih efektif.

1) Berbentuk apakah daerah bagian dalam kain songket. Bagaimana kamu menentukan luas daerah tersebut?

2) Apakah ada keterkaitan konsep dan prinsip persamaan kuadrat untuk menentukan ukuran daerah bagian dalam kain songket?

Kenyataan hidup terkadang berbeda dengan apa yang kita harapkan. Seperti Pak Ketut yang memiliki Ijazah Sarjana Pertanian telah lama dan berulangkali melamar pekerjaan di kota Jakarta. Ternyata, ia belum beruntung memanfaatkan ijazahnya sampai saat ini. Akhirnya, ia kembali ke Pulau Dewata dan berencana membuat keramba ikan Gurami dan Udang. Tetapi, ia mendapat masalah sebagai berikut.

Masalah-7.7

Pak Ketut memiliki jaring jala sepanjang 60 m. Ia ingin membuat keramba ikan gurami dan udang. Kedua keramba ikan dibuat berdampingan, seperti tampak pada gambar berikut.

Misalkan panjang keramba y m dan lebarnya x m, serta kelilingnya keramba k m. Tentukanlah ukuran keramba agar luasnya maksimum!

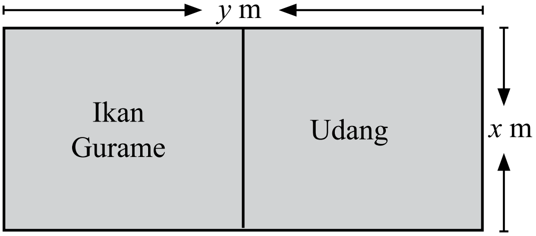
Gambar 7.9 Keramba Ikan Gurami dan Udang

Coba amati gambar keramba yang diinginkan dan renungkan beberapa pertanyaan berikut.

1) Bagaimana bentuk keramba yang direncanakan Pak Ketut?
2) Adakah konsep dan prinsip matematika yang terkait untuk menentukan panjang keliling permukaan keramba?
3) Adakah konsep dan prinsip matematika untuk menentukan luas daerah permukaan keramba ?
4) Bagaimana menentukan ukuran panjang dan lebar permukaan keramba agar luasnya maksimum dengan jaring jala yang tersedia?

Alternatif Penyelesaian

Penampang permukaan keramba dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7.10 Posisi Tambak

Karena panjang jaring jala yang tersedia adalah 60 m maka keliling keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

$$K = 2y + 3x = 60 \Rightarrow 2y = 60 - 3x \Rightarrow y = 30 - \frac{3}{2}x$$

Luas keseluruhan permukaan keramba ikan adalah

L = panjang × lebar

$L = y \times x$

$$y = 30 - \frac{3}{2}x \Rightarrow L = y \times x \Rightarrow L = (30 - \frac{3}{2}x)x$$

$$\Rightarrow L = 30x - \frac{3}{2}x^2$$

Karena luas permukaan keramba tergantung nilai x, persamaan fungsi luas dapat dinyatakan sebagai berikut.

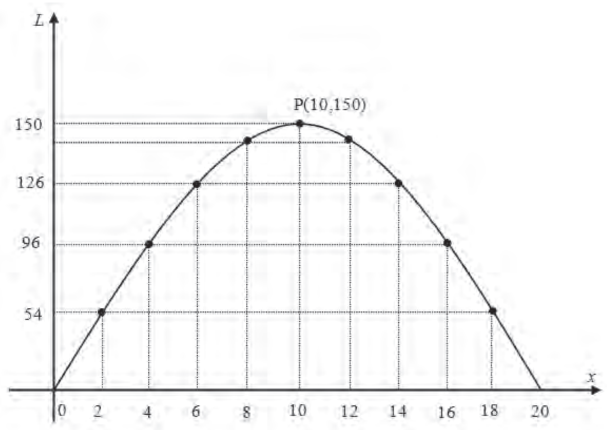
$$\therefore L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2, x \in R, x \geq 0$$

Dengan mengambil beberapa nilai x diperoleh beberapa nilai L dan disajikan pada tabel berikut

Tabel 7.1 Nilai *L* dengan *x* merupakan bilangan bulat genap positif

Nilai x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Nilai L	0	54	96	126	144	150	144	126	96	54	0

Sekarang mari kita gambarkan grafik fungsi $L(x) = 30x - \; x^2$ pada bidang koordinat dengan bantuan nilai-nilai x dan L yang ada pada tabel di atas.



Gambar 7.11 Grafik Fungsi Kuadrat

Coba cermati harga-harga x dan L di dalam Tabel 7.1 dan grafik fungsi $L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2,\ x \geq 0$ memiliki ciri-ciri sebagai berikut.

a) Kurva terbuka ke bawah
b) Grafik memotong sumbu-x pada dua titik yang berbeda yaitu titik (0, 0) dan titik (20, 0).
c) Grafik fungsi mencapai puncak pada titik (10, 150).
d) Garis $x = 10$ membagi dua (sama besar) daerah di bawah kurva, sehingga garis $x = 10$ dapat dikatakan sebagai sumbu simetri grafik fungsi $L(x) = 30x - \frac{3}{2}x^2$.

Berdasarkan grafik fungsi di atas, luas maksimum diperoleh saat lebar dan panjang permukaan keramba ikan, yaitu $x = 10$ m dan $y = 15$ m

$x = 10$ m dan $y = 30 - \frac{3}{2}x \Rightarrow y = 15$ m

Luas maksimum permukaan keramba ikan adalah $L = 150$ m^2

Perhatikan kembali setiap langkah pemecahan Masalah 7.5, 7.6, dan Masalah 7.7. Masih ingatkah kamu contoh fungsi kuadrat ketika belajar di SMP. Coba temukan model-model matematika dari setiap permasalahan yang merupakan fungsi kuadrat. Kemudian coba temukan ciri-ciri dari fungsi itu dan tuliskan konsep (pengertian) fungsi kuadrat berdasarkan ciri-ciri yang kamu ditemukan, serta hasilnya diskusikan dengan temanmu.

Definisi 7.2

Fungsi kuadrat dalam x adalah suatu fungsi yang ditentukan oleh $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$.

Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi

$f : A \rightarrow B$, dengan $f(x) = ax^2 + bx + c;\quad a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

Dengan : x adalah variabel atau peubah
a adalah koefisien dari x^2
b adalah koefisien dari x
c adalah konstanta persamaan
$f(x)$ adalah nilai fungsi yang bergantung pada nilai variabel x.

Selanjutnya ujilah beberapa fungsi berikut, apakah merupakan fungsi kuadrat?

Latihan 7.4

Apakah fungsi yang didefinisikan berikut merupakan fungsi kuadrat?

1. Misalkan $A, B \subset R$, didefinisikan fungsi

   $g : A \rightarrow B$, dengan $g(x) = c, \forall x \in A, c \in B$.

   Catatan: simbol $\forall$ adalah sebuah simbol dalam logika matematika. Simbol tersebut dibaca untuk semua atau untuk setiap. Contoh $\forall x \in A$ berlakulah $x^2 \geq 0$.

2. Didefinisikan $h(t) = (t - 2)^2, t \in R$,

3. Misalkan himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x < 3, x \in R\}$

   $B = \{y \mid -8 \leq y < 20, y \in R\}$

   Didefinisikan $f : A \rightarrow B$

   $f : x \rightarrow x^3, \forall x \in A$

4. Misalkan himpunan $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3, x \in R\}$ dan

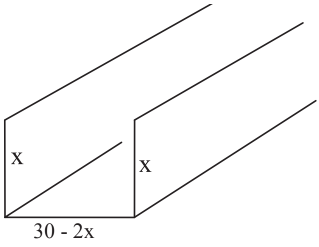
   $B = \{y \mid 8 \leq y \leq 26, \forall y \in R\}$

   Didefinisikan $f : A \rightarrow B$, dengan

   $f(x) = x^2 + 3x + 8, \forall x \in A$

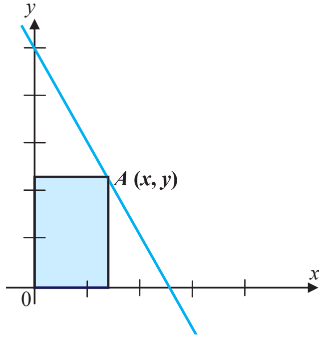
Uji Kompetensi 7.3

1. Pekerjaan Pak Suradi adalah pembuat talang air. Ia mendapat pesanan membuat sebuah talang air dari lembaran seng yang lebarnya 30 cm dengan melipat lebarnya atas tiga bagian seperti terlihat pada gambar di bawah ini.



   Bantulah Pak Suradi menentukan nilai x agar volume air yang tertampung maksimal.

2. Titik $A(x, y)$ terletak pada garis g dengan persamaan $2x + y = 10$. Dari titik A dibuat garis-garis tegak lurus terhadap sumbu-x dan sumbu-y sehingga terbentuk persegipanjang dengan diagonal OA. Perhatikan gambar berikut!



   a) Jika L menyatakan luas daerah persegipanjang yang terbentuk, nyatakan L sebagai fungsi x.
   b) Apakah L sebagai fungsi merupakan fungsi kuadrat dalam x?

Projek

Rancanglah permasalahan terkait gerakan peluru dan ekonomi yang menerapkan konsep dan aturan fungsi kuadrat. Buatlah pemecahan masalah tersebut dalam sebuah laporan serta sajikan di depan kelas.

b. Grafik Fungsi Kuadrat

Dari hasil pemecahan Masalah 7.8, kita telah memperoleh persamaan fungsi kuadrat yang menyatakan debit air yang mengalir dari sebuah pipa adalah $q(d) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ d^2,\ d \in R, d \geq 0$. Misalkan diameter pipa adalah x dan debit air yang mengalir adalah y. Berarti y dapat dinyatakan dalam x, yaitu $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R, x \geq 0$.

> Temukan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R$ dari grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R, x \geq 0$.

Beberapa pertanyaan arahan yang perlu kamu cermati untuk memperoleh grafik fungsi $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R$ dari grafik fungsi kuadrat $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R, x \geq 0$.

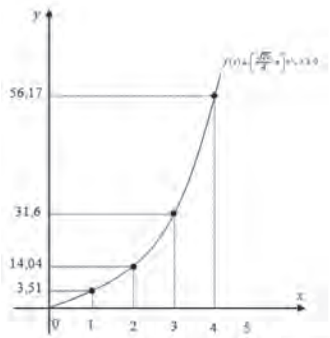
1) Pikirkan apa saja yang kamu butuhkan untuk menggambar grafik fungsi $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi).\ x^2, x \in R, x \geq 0$. dan ingat kembali baaimana menggambar grafik kuadrat di SMP.
2) Apa perbedaan fungsi kuadrat $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi).\ x^2, x \in R, x \geq 0$. dan fungsi kuadrat $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\ x^2, x \in R$
3) Apa kaitan konsep pencerminan dengan masalah ini?
4) Bagaimana komponen-komponen grafik fungsi setelah dicerminkan?
5) Dapatkah kamu memberikan perbedaan kedua grafik fungsi kuadrat tersebut?
6) Bilamana grafik memotong sumbu x dan memotong sumbu y?

♦ Ingat kembali, bagaimana menggambarkan grafik kuadrat dan memanfaatkan sifat pencerminan untuk memperoleh grafik fungsi kuadrat yang baru.

Perhatikan fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2, x \in R, x \geq 0,$ yang menyatakan debit air yang mengalir dari pipa. Debit air yang mengalir dari pipa bergantung pada diameter (x) pipa. Jika $x = 0$, maka debit air adalah $y = f(x) = f(0) = 0$. Untuk beberapa nilai x diberikan, diperoleh nilai $y = f(x)$ seperti disajikan dalam tabel berikut.

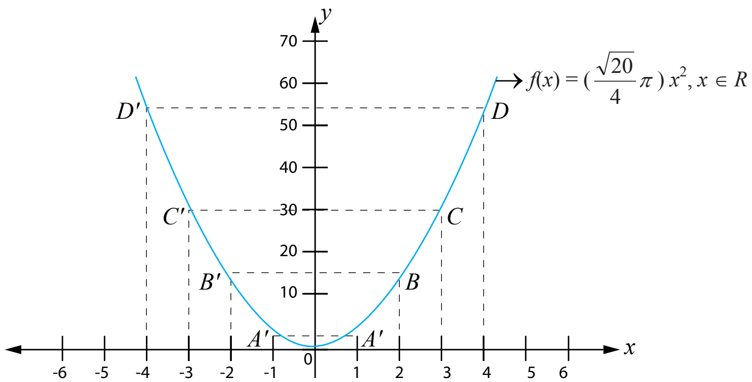
x	0	1	2	3	4
$y = f(x)$	0	3,51	14,04	31,6	56,17

Grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2, x \in R, x \geq 0$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7.12 Grafik Fungsi $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2, x \in R, x \geq 0,$

Dengan mencerminkan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2$, $x \in R$, $x \geq 0$ terhadap sumbu-y, maka diperoleh sebuah parabola berikut.

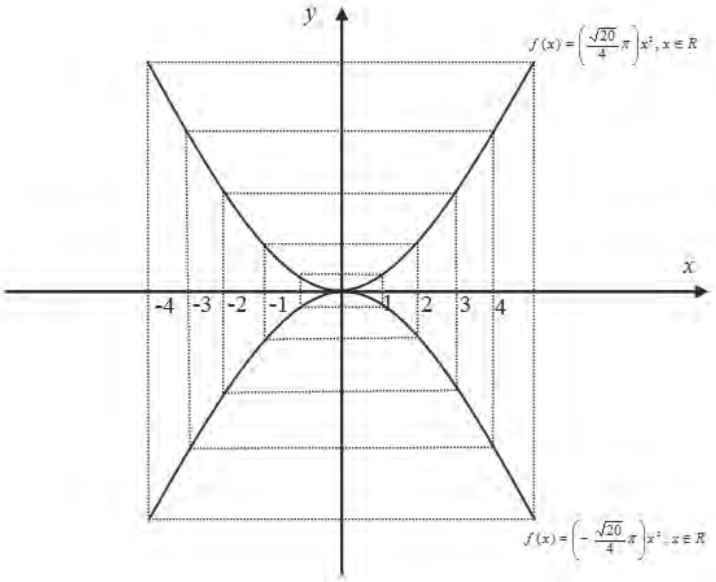


Gambar 7.13 Grafik Fungsi $f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\,x^2, x \in R$

Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$ yang berupa parabola di atas adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah $a = \frac{\sqrt{20}}{4}\pi > 0$
- Kurva terbuka ke atas
- Memiliki titik puncak (titik balik minimum) di titik O (0, 0)
- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua kurva sama besar, yaitu garis $x = 0$ dan nilai minimum $y = f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung sumbu x di titik O(0, 0)
- Cerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$ terhadap sumbu-x dan selidiki sifat-sifat grafik fungsi kuadrat yang ditemukan.

Kita cerminkan grafik fungsi kuadrat $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$ terhadap sumbu-x atau garis $y = 0$. Dengan mengingat kembali sifat-sifat pencerminan bahwa arah benda dengan bayangannya selalu berlawanan arah. Sehingga nilai fungsi kuadrat $y = f(x) = \left(\frac{\sqrt{20}}{4}\pi\right)x^2,\ x \in R$ berubah dari bernilai positif menjadi negatif. Perubahan tersebut diikuti perubahan fungsinya dari $y = f(x) = (\frac{\sqrt{20}}{4}\pi).\ x^2,\ x \in R$ menjadi $y = f(x) = (-\frac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2, x \in R$. Secara lengkap bayangan grafik persamaan fungsi kuadrat $y = f(x)$ setelah dicerminkan terhadap sumbu-x adalah sebagai berikut.



Gambar 7.14 Grafik Fungsi (x) dan grafik pencerminan $f(x)$

Ciri-ciri fungsi kuadrat $y = f(x) = (-\dfrac{\sqrt{20}}{4}\pi)\, x^2,\ x \in R$ dan parabola hasil pencerminan terhadap sumbu-x (Gambar-7.14) adalah sebagai berikut.

- Koefisien x^2 adalah $a = -\dfrac{\sqrt{20}}{4}\pi < 0$
- Kurva terbuka ke bawah
- Memiliki titik puncak (titik balik maksimum) di titik O (0, 0)
- Memiliki sumbu simetri yang membagi dua kurva sama besar, yaitu garis $y = 0$ dan nilai minimum $f(0) = 0$
- Nilai diskriminan, $D = b^2 - 4ac = 0$
- Kurva menyinggung sumbu x di titik O(0, 0)

Apa kesimpulan dari hasil pencerminan tersebut?

Kesimpulan

Misalkan $g(x) = ax^2,\ x \in R$. Jika grafik g dicerminkan terhadap sumbu-x maka diperoleh $g^*(x) = -ax^2,\ x \in$ R dengan sumbu simetri adalah sumbu-y dan memiliki titik puncak O (0, 0).

Masalah-7.8

Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

a. Temukan persamaan garis simetri (sumbu simetri) dan titik puncak grafik fungsi kuadrat tersebut.

b. Temukan grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$, $a \neq 0$.

c. Temukan titik potong grafik dengan sumbu x dan sumbu y.

d. Temukan sifat-sifat grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ terkait nilai koefisien a dan titik puncak parabola.

Untuk memecahkan masalah di atas, cermati beberapa grafik fungsi kuadrat yang telah digambar sebelumnya dan beberapa pertanyaan berikut:

1) Apa yang dimaksud dengan grafik fungsi kuadrat?
2) Apa yang dimaksud dengan persamaan garis sumbu simetri grafik fungsi kuadrat?
3) Apa yang dimaksud dengan titik puncak grafik fungsi kuadrat?
4) Bagaimana menemukan aturan penentuan persamaan garis simetri dan titik puncak grafik fungsi kuadrat?
5) Apa yang dimaksud dengan transformasi geser?
6) Apa kaitan transformasi geser dan sifat-sifatnya untuk memperoleh sebarang grafik fungsi kuadrat dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$, dan $a \neq 0$?
7) Temukan arah pergeseran grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$ untuk mendapatkan grafik fungsi $f(x) = g\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right) + \left(\frac{-D}{4a}\right)$ dan syarat-syarat yang diperlukan!
8) Sifat-sifat apa saja yang kamu simpulkan dari grafik fungsi kuadrat $f(x) = a\left(x - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \left(\frac{-D}{4a}\right)$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$ berkaitan dengan nilai koefisien a dan titik puncak grafik fungsi?
9) Dapatkah kamu memberi beberapa kemungkinan gambaran grafik fungsi kuadrat terkait nilai koefisien a, nilai diskriminan, titik potong terhadap sumbu-x, nilai fungsinya.

Berdasarkan Definisi 7.2, rumus umum fungsi kuadrat adalah $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0 \Leftrightarrow f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}),\ a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}),\ a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a^2})],\ a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2 - 4ac}{4a}),\ a \neq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a(x - (\frac{-b}{2a}))^2 + (\frac{-D}{4a}),\ a \neq 0$$

Misalkan

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = a(x - (\frac{-b}{2a}))^2 + (\frac{-D}{4a}),\ a \neq 0 \\ \text{dan } g(x) = ax^2,\ x \in R,\ a \neq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow f(x) = g(x - (\frac{-b}{2a})) + (\frac{-D}{4a})$$

Grafik fungsi $f(x) = g(x - (\frac{-b}{2a})) + (\frac{-D}{4a})$ adalah grafik fungsi kuadrat $g(x) = ax^2$, $x \in R$ yang digeser sejauh satuan kearah Sumbu-x dan digeser sejauh satuan ke arah Sumbu-y.

Sifat-4

Grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$, memiliki

a. Persamaan sumbu simetri $x = \text{—}$ dan

b. Titik puncak $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Dari beberapa sajian grafik fungsi kuadrat sebelumnya turunkan sifat-sifat grafik fungsi kuadrat dan sajikan beberapa kemungkinan kondisi grafik tersebut terkait dengan koefisien x^2 , nilai diskriminan dan nilai fungsi tersebut.

Dari fungsi kuadrat $f(x) = a(x - (\frac{-b}{2a}))^2 + (\frac{-D}{4a})$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$, dapat diturunkan beberapa sifat.

Sifat-5

Jika $a > 0$, maka grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke atas dan memiliki titik balik minimum $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Sifat-6

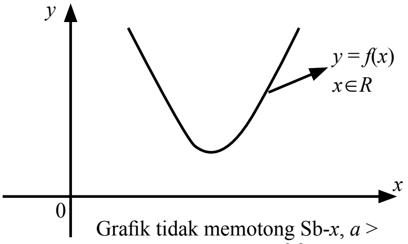
Jika $a < 0$, maka grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan c bilangan real $a \neq 0$ terbuka ke bawah dan memiliki titik puncak maksimum $P(\frac{-b}{2a}, \frac{-D}{4a})$.

Sifat-7

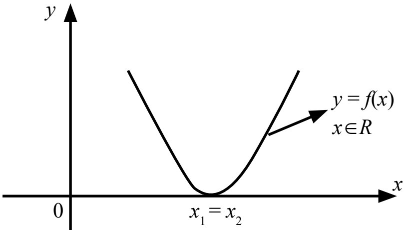
Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c bilangan real dan $a \neq 0$, misalkan $D = b^2 - 4ac$ (D adalah diskriminan)

a. Jika $D > 0$, maka grafik $y = f(x)$ memotong sumbu-x di dua titik berbeda
b. Jika $D = 0$, maka grafik $y = f(x)$ menyinggung sumbu-x di satu titik
c. Jika $D < 0$, maka grafik $y = f(x)$ tidak memotong sumbu-x

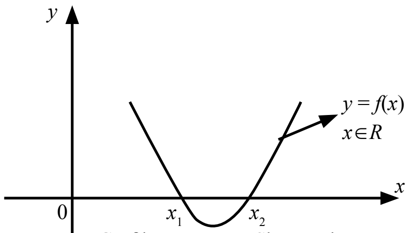
Pada gambar berikut diperlihatkan berbagai kemungkinan letak parabola terhadap sumbu-x



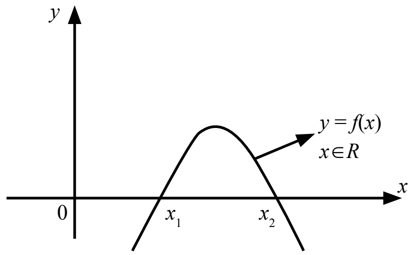
Grafik tidak memotong Sb-x, $a > 0$, $D < 0$, dan $f(x) > 0$, $\forall x \in R$



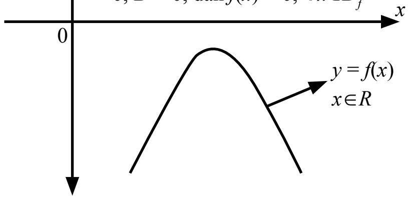
Grafik menyinggung Sb-x, $a > 0$, $D = 0$, dan $f(x) \geq 0$, $\forall x \in R$



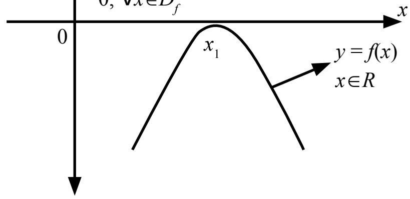
Grafik memotong Sb-x, pada titik, $a > 0$, D > 0, dan $f(x_1) = f(x_2) = 0$



Grafik menyinggung Sb-x, pada dua titik, $a < 0$, D > 0, dan $f(x_1) = f(x_2) = 0$



Grafik tidak memotong Sb-x, $a < 0$, D < 0, dan $f(x) < 0$, $\forall x \in D_f$



Grafik menyinggung Sb-x pada dua titik, $a < 0$, $D = 0$, dan $f(x) \leq 0$, $\forall x \in D_f$

c. Hubungan Persamaan Kuadrat dan Fungsi Kuadrat

Kita cermati konsep persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat sebagai berikut.

- Persamaan kuadrat adalah suatu persamaan aljabar yang dinyatakan dalam bentuk $ax^2 + bx + c = 0$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.
- Fungsi kuadrat adalah suatu fungsi yang dinyatakan dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, c adalah bilangan real dan $a \neq 0$.

Latihan 7.5

Berdasarkan kedua konsep di atas, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut

1. Apakah sebuah persamaan kuadrat dapat diperoleh dari sebuah fungsi kuadrat?
2. Jika disubtitusikan nilai x yang memenuhi persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ ke dalam persamaan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ apa yang kamu dapatkan
3. Dapatkah persamaan fungsi kuadrat dipandang sebuah persamaan kuadrat? Jelaskan.
4. Apa perbedaan konsep fungsi dengan konsep persamaan?

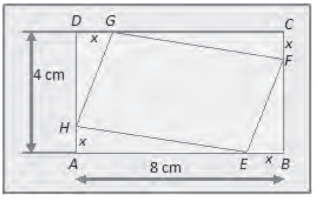
Sifat-8

Untuk setiap nilai sebuah fungsi kuadrat diperoleh sebuah persamaan kuadrat.

Uji Kompetensi 7.4

1. Sebuah fungsi kuadrat mempunyai nilai maksimum -3 pada saat $x = 2$, sedangkan untuk $x = -2$ fungsi bernilai -11. Tentukan rumus fungsi kuadrat tersebut !

2. Tentukan luas minimum segi empat *EFGH* di bawah ini !



3. Gambarlah grafik fungsi kuadrat $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$ dari grafik fungsi kuadrat $g(x) = 4x^2$!

4. Persegi *ABCD* dengan panjang sisinya *a* cm. Titik *E* terletak pada sisi *AB* dengan panjang *AE* adalah *x* cm. Diantara sisi *BC* terdapat titik *F* dengan panjang *BF* = *AE*. Panjang *EB* = *FC*. Tentukan luas minimum *DEF* !

5. Daerah asal fungsi kuadrat $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$ adalah himpunan $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 3, x \in R\}$. Tentukan daerah hasil fungsi f !

6. Gambarkan grafik fungsi kuadrat di bawah ini.(untuk setiap x bilangan real)
   a. $f(x) = 3x^2+5x-4, x \in R.$
   b. $f(x) =-2x^2-3x+7, x \in R.$

Projek

Rancanglah masalah nyata yang melibatkan grafik fungsi kuadrat pada bidang teknik bangunan dan fisika. Buatlah pemecahan masalah tersebut dengan menerapkan berbagai sifat grafik fungsi kuadrat yang telah kamu pelajari. Buat laporan hasil kerjamu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Telah kita temukan konsep dan aturan yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Beberapa hal yang penting sebagai pegangan kita untuk mendalami dan melanjutkan materi pada bahasan berikutnya, dapat dirangkum sebagai berikut.

1. Bentuk umum Persamaan kuadrat adalah
   $ax^2 + bx + c = 0$, dengan $a, b, c \in R$ dan $a \neq 0$.

2. Untuk menentukan akar-akar suatu persamaan kuadrat dapat dilakukan dengan cara berikut.
   a. Memfaktorkan.
   b. Melengkapkan Bentuk Kuadrat Sempurna.
   c. Menggunakan Rumus *abc.*

   Rumus *abc* adalah sebagai berikut.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3. Jumlah dan Hasil Kali Akar-Akar Persamaan Kuadrat
   Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$, berhubungan erat dengan koefisien-koefisien a, b, dan c. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar-akar persamaan kuadrat, maka berlaku.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{dan} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

4. Bentuk persamaan kuadrat dengan akar-akar x_1 dan x_2 adalah $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

5. Karakteristik Grafik Fungsi Kuadrat
   Fungsi kuadrat memiliki bentuk umum dengan $a, b, c \in$ R dan $a \neq 0$. Dari bentuk aljabar tersebut, grafik fungsi kuadrat dapat diilustrasikan sebagi bentuk lintasan lengkung atau parabola dengan karakteristik sebagai berikut.
   a. Jika $a > 0$, maka parabola terbuka ke atas.
   b. Jika $a < 0$, maka parabola terbuka ke bawah.
   c. Jika $D < 0$, maka parabola tidak memotong maupun menyinggung sumbu x.
   d. Jika $D = 0$, maka parabola menyinggung sumbu x.
   e. Jika $D > 0$, maka parabola memotong sumbu x di dua titik.

6. Langkah-langkah yang diperlukan untuk membuat sketsa grafik fungsi kuadrat $y = ax^2 + bx$ adalah sebagai berikut
   a. Menentukan titik potong dengan sumbu x, diperoleh jika $y = 0$.
   b. Menentukan titik potong dengan sumbu y, diperoleh jika $x = 0$.
   c. Menentukan persamaan sumbu simetri $x = -\frac{b}{2a}$.
   d. Menentukan nilai ekstrim grafik $y = \frac{D}{-4a}$.
   e. Koordinat titik balik sebuah grafik fungsi kuadrat adalah $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$.

Kita telah menemukan berbagai konsep dan sifat-sifat yang berlaku pada persamaan dan fungsi kuadrat. Demikian juga, kita telah terapkan dalam berbagai pemecahan masalah nyata. Selanjutnya akan kita bahas tentang geometri terkait kedudukan titik, garis, sudut, dan bidang pada bidang datar dan ruang dimensi tiga. Penguasaan kamu pada materi pada setiap bahasan akan bermanfaat dalam mendalami materi selanjutnya.

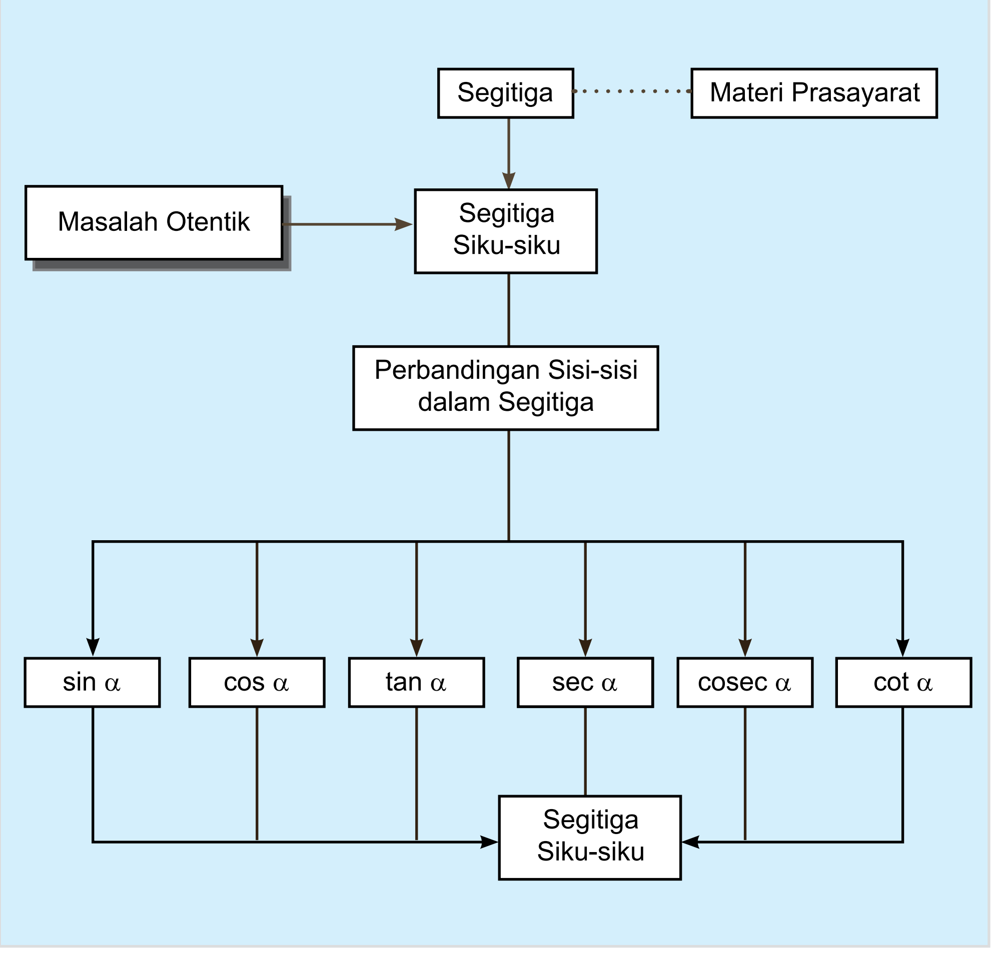
Catatan:

Bab
8
Trigonometri

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percayadiri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 3. Mendeskripsikan konsep perbandingan trigonometri padasegitiga siku-siku melalui penyelidikan dan diskusi tentang hubungan perbandingan sisi-sisi yangbersesuaian dalam beberapa segitigasiku- siku sebangun. 4. Menemukan sifat-sifat dan hubungan antar perbandingan trigonometri dalam segitiga siku-siku. 5. Mendeskripsikan dan menentukan hubungan perbandingan Trigonometri dari sudut disetiap kuadran, memilih dan menerapkan dalam penyelesaian masalah nyata dan matematika. 6. Mendeskripsikan konsep fungsi Trigonometri dan menganalisis grafik fungsinya serta menentukan hubungan nilai fungsi Trigonometri dari sudut-sudut istimewa. 7. Menerapkan perbandingan trigonometri dalam menyelesaikan masalah. 8. Menyajikan grafik fungsi trigonometri.	Melalui pembelajaran materi trigonometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep perbandingan trigonometri melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis dan kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep trigonometri dalam memecahkan masalah otentik. **Istilah Penting** • *Sudut* • *Derajat* • *Radian* • *Kuadran* • *Perbandingan Sudut (sinus, cosinus, tangen, cotangen, cosecan, dan secan)* • *Identitas trigonometri*

B. PETA KONSEP

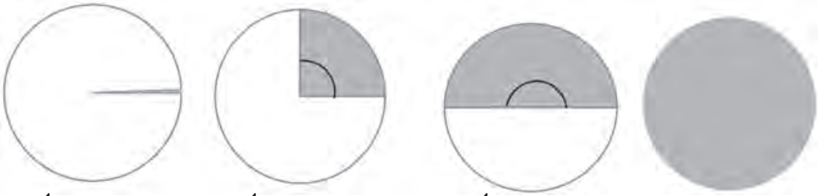


C. MATERI PEMBELAJARAN

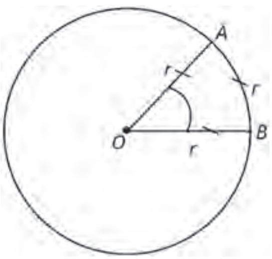
Pernahkah kamu memperhatikan gerakan gelombang laut sampai ke pinggir pantai/dinding suatu pelabuhan? Tahukah kamu bagaimana cara mengukur kedalaman laut/samudera? Phenomena nyata ini merupakan hanya sebagain dari penerapan trigonometri dalam kehidupan nyata. Dalam bidang fisika, teknik, dan kedokteran, trigonometri mengambil peranan penting dalam pengembang teknologi kedokteran dan teori-teori fisika dan teknik. Dalam Matematika, trigonometri digunakan untuk menemukan relasi antara sisi dari sudut pada suatu segitiga.

1. Ukuran Sudut (Derajat dan Radian)

Pada umumnya, ada dua ukuran yang digunakan untuk menentukan besar suatu sudut, yaitu derajat dan radian. Tanda "$^{\circ}$" dan "*rad*" berturut-turut menyatakan simbol derajat dan radian. Singkatnya, satu putaran penuh = 360°, atau 1° didefinisikan sebagai besar sudut yang dibentuk oleh $\frac{1}{360}$ putaran penuh. Cermati gambar berikut ini!



Gambar 8.1 Deskripsi besar rotasi



Gambar 8.2 Ukuran radian

Tentunya, dari Gambar 8.1, kamu dapat mendeskripsikan untuk beberapa satuan putaran yang lain. Sebelum kita memahami hubungan "derajat dengan radian", mari kita pelajari kajian berikut ini.

Satu radian diartikan sebagai ukuran sudut pusat α suatu lingkaran yang panjang busurnya sama dengan jari-jari, perhatikan Gambar 8.2.

Jika besar $\angle AOB = \alpha$, $\overset{\frown}{AB} = OA = OB$ maka $\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{r} = 1$.

Jika panjang busur tidak sama dengan r, maka cara menentukan besar sudut tersebut dalam satuan radian diselesaikan menggunakan definisi perbandingan:

Definisi 8.1

$$\angle AOB = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r}\ rad$$

Lebih lanjut, hubungan satuan derajat dengan satuan radian, bahwa 1 putaran penuh sama dengan 2π *rad*. Seperti dinyatakan dalam definisi berikut

Definisi 8.2

$360^\circ = 2\pi\ rad$ atau $1^\circ = \frac{\pi}{180}\ rad$ atau $1\ rad \approx 57{,}3^\circ$

Perhatikan hubungan secara aljabar antara derajat dengan radian berikut ini.

Contoh 8.1

1. $\frac{1}{4}$ putaran $= \frac{1}{4} \times 360^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow 90^\circ = 90 \times \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{1}{2}\pi\ rad.$
2. $\frac{1}{3}$ putaran $= \frac{1}{3} \times 360^\circ = 120^\circ \Leftrightarrow 120^\circ = 120 \times \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{2}{3}\pi\ rad.$
3. $\frac{1}{2}$ putaran $= \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow 180^\circ = 180 \times \frac{\pi}{180}\ rad = \pi\ rad.$
4. $\frac{2}{3}$ putaran $= \frac{2}{3} \times 360^\circ = 240^\circ \Leftrightarrow 240^\circ = 240 \times \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{4}{3}\pi\ rad.$
5. $\frac{3}{4}$ putaran $= \frac{3}{4} \times 360^\circ = 270^\circ \Leftrightarrow 270^\circ = 270 \times \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{3}{2}\pi\ rad.$

Tentunya dengan mudah kalian mampu mengubah ukuran sudut yang lain.
Pahami contoh berikut ini.

Contoh 8.2

Selesaikan soal-soal ukuran sudut berikut.

1. $\frac{1}{5}\pi$ rad = ... putaran = ...°
2 $\frac{1}{6}$ putaran = ... *rad* = ...°
3. 135° = ... *rad* = ... putaran

4. Berapa radian sudut yang dibentuk jarum jam pada pukul 11.00?
5. Jika suatu alat pemancar berputar 60 putaran dalam setiap menit, maka tentukanlah banyak putaran dalam satu detik.

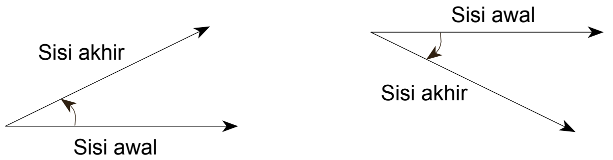
Alternatif Penyelesaian

1. 1 putaran = 360° = 2π *rad*. Jadi, $\frac{1}{2}$ putaran = π *rad*. Oleh karena itu, $\frac{1}{5}\pi\ rad = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{1}{10}$ putaran = $\frac{1}{10} \times 360° = 36°$.
2. Karena 1 putaran = π *rad* $\frac{1}{6}$ putaran = $\frac{1}{6} \times (2\pi\ rad) = \frac{1}{3}\pi\ rad = \frac{1}{3}\pi \times \frac{180}{\pi} = 60°$.
3. $135 = 135 \times \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{3}{4}\pi\ rad = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$ putaran = $\frac{3}{8}$ putaran.
4. Sudut yang terbentuk pada pukul 11.00 adalah 30, $30 = 30 \times \frac{\pi}{180}\ rad = \frac{1}{6}\pi\ rad$.
5. Jika setiap menit, alat tersebut melakukan rotasi sebanyak 60 putaran, maka setiap satu detik pemancar tersebut melakukan 3600 putaran.

> 360° pertama sekali diperkenalkan oleh bangsa Babilonia.
> Hitungan satu tahun pada kalender Babilonia, yaitu sebanyak 365 hari.

2. Konsep Dasar Sudut

Dalam kajian geometris, sudut didefinisikan sebagai hasil rotasi dari sisi awal (*initial side*) ke sisi akhir (*terminal side*). Selain itu, arah putaran memiliki makna dalam sudut. Suatu sudut bertanda *"positif"* jika arah putarannya berlawanan dengan arah putaran jarum jam, dan bertanda *"negatif"* jika arah putarannya searah dengan jarum jam. Arah putaran untuk membentuk sudut juga dapat diperhatikan pada posisi sisi akhir terhadap sisi awal. Untuk memudahkannya, mari kita cermati deskripsi berikut ini.



a. Sudut bertanda positif   b. Sudut bertanda negatif

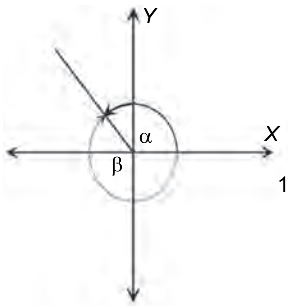
Gambar 8.3 Sudut berdasarkan arah putaran

Dalam bidang koordinat kartesius, jika sisi awal suatu garis berimpit dengan sumbu x dan sisi terminalnya terletak pada salah satu kuadran pada koordinat kartesius itu, disebut sudut *standar* (baku). Jika sisi akhir berada pada salah satu sumbu pada koordinat tersebut, sudut yang seperti ini disebut pembatas kuadran, yaitu 0°, 90°, 180°, 270° dan 360°.

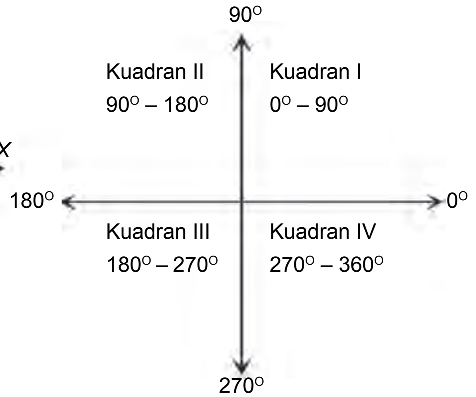
Sebagai catatan, bahwa untuk menyatakan suatu sudut, lazimnya digunakan huruf Yunani, seperti, α (*alpha*), β (*betha*), γ (*gamma*), dan θ (*tetha*), dan juga digunakan huruf-huruf kapital, seperti A, B, C, dan D.

Cermati gambar di bawah ini.

Jika sudut yang dihasilkan sebesar α (sudut standar), maka sudut β disebut sebagai sudut koterminal, sehingga $\alpha + \beta - 360^{\circ}$, seperti gambar berikut.



a. Sudut standar dan sudut koterminal



b. Besar sudut pada setiap kuadran

Gambar 8.4 Sudut secara geometri dan pembatas kuadran

Definisi 8.3

Sudut-sudut koterminal adalah dua sudut standar, memiliki sisi-sisi akhir (*terminal side*) yang berimpit.

Untuk memantapkan pemahaman kamu akan sudut baku dan pembatas kuadran, cermati contoh dan pembahasan di bawah ini.

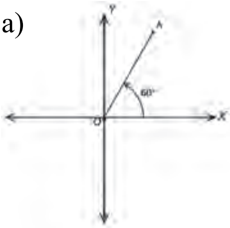
Contoh 8.3

Gambarkanlah sudut-sudut standar di bawah ini, dan tentukan posisi setiap sudut pada koordinat kartesius.

a) 60° b) –45° c) 120° d) 600°

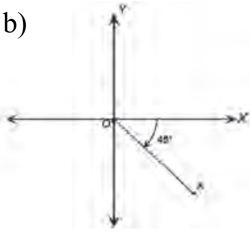
Penyelesaian

a)



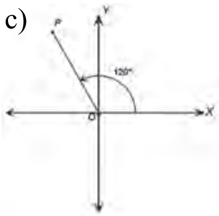
Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi akhir *OA* terletak di kuadran I.

b)



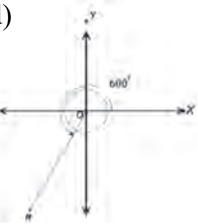
Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi akhir *OA* terletak di kuadran IV.

c)



Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi akhir *OP* terletak di kuadran II.

d)



Sisi awal terletak pada sumbu *X* dan sisi akhir *OR* terletak di kuadran III.

Gambar 8.5 Sudut pada setiap kuadran

Uji Kompetensi 8.1

1. Untuk setiap besar sudut di bawah ini, ubahlah ke bentuk satuan derajat dan radian.
   a. $\frac{1}{6}$ putaran c. $\frac{3}{10}$ putaran
   b. $\frac{2}{5}$ putaran d. 5 putaran
2. Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk radian.
   a. 45° c. 87.4°
   b. 36° d. 0,54°
3. Ubahlah sudut-sudut berikut ke bentuk derajat.
   a. $\frac{\pi}{12}$ *rad* d. $\frac{7\pi}{8}$ *rad*
   b. $\frac{5\pi}{3}$ *rad* e. $\frac{7\pi}{16}$ *rad*
   c. $\frac{3\pi}{5}$ *rad* f. $\frac{8\pi}{15}$ *rad*
4. Tentukanlah sudut komplemen dan suplemen setiap sudut berikut ini.
   a. 15° c. 68°
   b. 105° d. 96°
5. Untuk setiap besar sudut dalam satuan derajat berikut ini, tentukan posisi setiap sudut tersebut.
   a. 90° d. 300°
   b. 135° e. –270°
   c. 225° f. 1200°

   Selanjutnya, nyatakan setiap sudut di atas, dalam satuan radian.
6. Misalkan, sudut θ merupakan sudut lancip dan sudut β adalah sudut tumpul. Perhatikan kombinasi setiap sudut dan kedua sudut tersebut, dan tentukanlah posisinya.
   a. 3θ c. $\theta + \beta$
   b. 2β d. $2\beta - \theta$
7. Jika kita perhatikan jam, berapa kalikah dalam 1 hari terbentuk sudut-sudut di bawah ini.
   a. 90° c. 30°
   b. 180° d. 120°

Projek

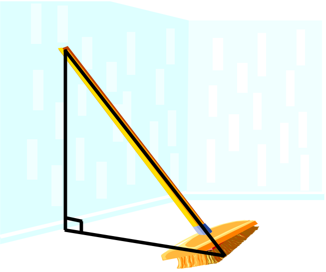
Himpun berbagai informasi penerapan sudut pada bidang fisika dan masalah nyata. Coba rancang pemecahan masalah terkait informasi yang kamu peroleh. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

3. Perbandingan Trigonometri Pada Segitiga Siku-Siku

Pada peradaban kehidupan budaya Dayak, kajian mengenai trigonometri sudah tercermin dari berbagai ikon kehidupan mereka. Misalnya, para arsitekturnya, sudah menerapkan kesetimbangan bangunan pada rumah adat yang mereka ciptakan. Rumah adat tersebut berdiri kokoh sebagai hasil hubungan yang tepat antara besar sudut yang dikaitkan dengan panjang sisi-sisinya. Apakah para Arsitektur tersebut mempelajari trigonometri juga?

Gambar 8.6 Rumah Adat Suku Dayak

Pada sub bab ini, akan dipahami konsep perbandingan trigonometri pada suatu segitiga siku-siku. Dalam kehidupan sehari-hari sering kita jumpai bentuk segitiga siku-siku; misalnya, meletakkan posisi sapu. Perhatikan Gambar 8.7 berikut ini.

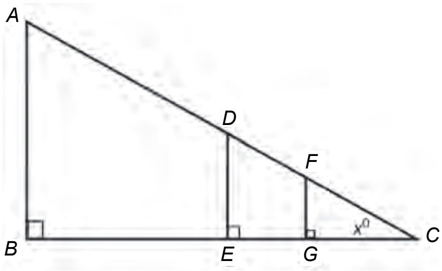


Gambar 8.7 Posisi sapu di dinding

Coba kita pahami deskripsi berikut.

Pak Yahya adalah seorang penjaga sekolah. Tinggi pak Yahya adalah 1,6 m. Dia mempunyai seorang anak, namanya Dani. Dani masih kelas II Sekolah Dasar. Tinggi badannya 1,2 m. Dani adalah anak yang baik dan suka bertanya. Dia pernah bertanya kepada ayahnya tentang tinggi tiang bendera di lapangan itu. Dengan senyum, Ayahnya menjawab 8 m. Suatu sore, disaat dia menemani ayahnya membersihkan rumput liar di lapangan, Dani melihat bayangan setiap benda ditanah. Dia mengambil tali meteran dan mengukur panjang bayangan ayahnya dan panjang bayangan tiang bendera, yaitu 3 m dan 15 m. Tetapi dia tidak dapat mengukur panjang bayangannya sendiri karena bayangannya mengikuti pergerakannya. *Jika kamu sebagai Dani, dapatkah kamu mengukur bayangan kamu sendiri?*

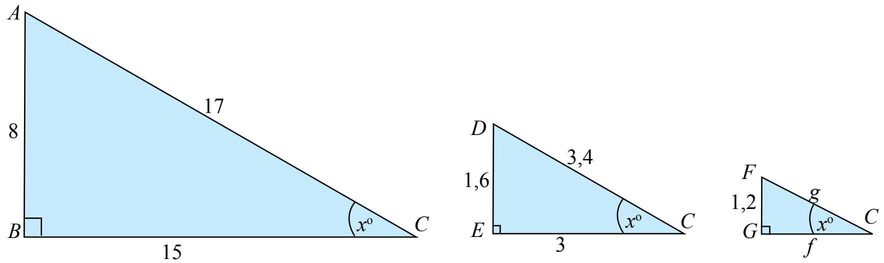
Konsep kesebangunan pada segitiga terdapat pada cerita tersebut. Mari kita gambarkan segitiga sesuai cerita di atas.



Gambar 8.8 Model tiang bendera dan orang

Dimana:
AB = tinggi tiang bendera (8 m)
BC = panjang bayangan tiang (15 m)
DE = tinggi pak Yahya (1,6 m)
EC = panjang bayangan pak Yahya (3 m)
FG = tinggi Dani (1,2 m)
GC = panjang bayangan Dani

Berdasarkan gambar segitiga di atas terdapat tiga segitiga, yaitu ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC sebagai berikut.



Gambar 8.9 Kesebangunan

Karena ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC adalah sebangun, maka berlaku

$\dfrac{FG}{DE} = \dfrac{GC}{EC} = \dfrac{1,2}{1,6} = \dfrac{f}{3}$. Diperoleh $f = 2{,}25$

Dengan menggunakan Teorema Phytagoras diperoleh nilai $FC = g = \sqrt{6{,}5025} = 2{,}55$.
Berdasarkan kesebangunan ΔABC, ΔDEC, dan ΔFGC diperoleh perbandingan sebagai berikut.

a. $$\frac{FG}{DE} = \frac{DE}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1,2}{2,25} = \frac{1,6}{3,4} = \frac{8}{17} = \frac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0{,}47$$

Perbandingan ini disebut sinus sudut C, ditulis sin x^0 atau sin $C = \dfrac{8}{17}$

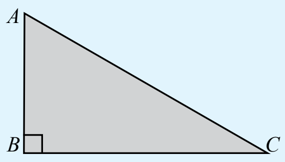
b. $$\frac{GC}{FC} = \frac{EC}{DC} = \frac{BC}{AC} = \frac{2,25}{2,55} = \frac{3}{3,4} = \frac{15}{17} = \frac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}} = 0{,}88$$

Perbandingan ini disebut cosinus sudut C, ditulis cos x^0 atau cos $C = \dfrac{15}{17}$

c. $\dfrac{FG}{GC} = \dfrac{DE}{EC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1{,}2}{2{,}25} = \dfrac{1{,}6}{3} = \dfrac{8}{15} = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}} = 0{,}53$

Perbandingan ini disebut tangen sudut C, ditulis tan x^0 atau tan $C = \dfrac{8}{15}$.

Definisi 8.4



1. *sinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi miring, ditulis sin $C = \dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$.
2. *cosinus suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi disamping sudut dengan sisi miring, ditulis cos $C = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi miring segitiga}}$.
3. *tangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi di samping sudut, ditulis tan C = $\dfrac{\text{sisi di depan sudut}}{\text{sisi di samping sudut}}$.
4. *cosecan suatu sudut* didefinisikan sebagai panjang sisi miring dengan sisi di depan sudut, ditulis cosec $C = \dfrac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di samping sudut}}$ atau cosec $C = \dfrac{1}{\cos C}$.
5. *secan suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan panjang sisi miring dengan sisi di samping sudut, ditulis sec $C = \dfrac{\text{sisi miring segitiga}}{\text{sisi di samping sudut}}$ atau sec $C = \dfrac{1}{\cos C}$.
6. *cotangen suatu sudut* didefinisikan sebagai perbandingan sisi di samping sudut dengan sisi di depan sudut, ditulis cotan $C = \dfrac{\text{sisi di samping sudut}}{\text{sisi di depan sudut}}$ atau cotan $C = \dfrac{1}{\tan C}$.

Jika diperhatikan aturan perbandingan di atas, prinsip matematika lain yang perlu diingat kembali adalah teorema Phytagoras. Selain itu, pengenalan akan sisi miring, sisi di samping sudut, dan sisi di depan sudut tentunya dapat mudah diperhatikan.

Nah, karena yang telah didefinisikan perbandingan sudut untuk sudut lancip C, silahkan Anda rumuskan ke enam jenis perbandingan sudut untuk sudut A.

Contoh 8.4

Diberikan segitiga siku-siku ABC, siku-siku di B. Jika panjang sisi $AB = 3$ satuan, $BC = 4$ satuan, tentukanlah sin A, cos C, dan tan A.

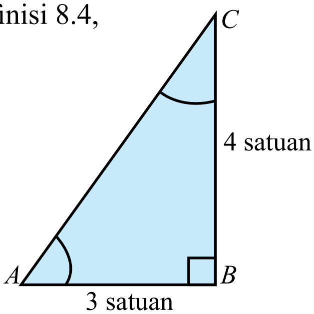
Alternatif Penyelesaian

Untuk segitiga di bawah ini, dengan Teorema Phytagoras diperoleh panjang sisi $AC = 5$ satuan. Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi 8.4, bagian 1, 2,dan 3, maka berlaku:

$$\sin A = \frac{\textit{panjang sisi di depan sudut } A}{\textit{Panjang sisi miring}} = \frac{4}{5}$$

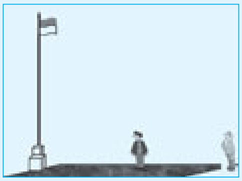
$$\cos C = \frac{\textit{panjang sisi di samping sudut } C}{\textit{Panjang sisi miring}} = \frac{3}{5}$$

$$\tan A = \frac{\textit{panjang sisi di depan sudut } A}{\textit{panjang sisi di samping sudut } A} = \frac{4}{3}$$



Gambar 8.10 Segitiga siku-siku

Masalah-8.1

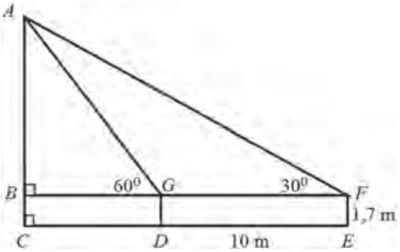

Gambar 8.11 Tiang Bendera

Dua orang guru dengan tinggi badan yang sama yaitu 170 cm sedang berdiri memandang puncak tiang bendera di sekolahnya. Guru pertama berdiri tepat 10 m di depan guru kedua. Jika sudut elevasi guru pertama 60^0 dan guru kedua 30^0 maka dapatkah anda menghitung tinggi tiang bendera tersebut?

Memahami dan Merencanakan Pemecahan Masalah

Sudut elevasi: Sudut yang dibentuk oleh arah horizontal dengan arah pandangan mata pengamat ke arah atas

Misalkan tempat berdiri tegak tiang bendera, dan kedua guru tersebut adalah titik. Ujung puncak tiang bendera dan kepala kedua guru juga diwakili oleh titik, maka dapat diperoleh Gambar 8.12 sebagai berikut.



Gambar 8.12 Model masalah tiang bendera

Dimana:
AC = tinggi tiang bendera
DG = tinggi guru pertama
EF = tinggi guru kedua
DE = jarak kedua guru

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan Gambar 8.12.
Tinggi tiang bendera yaitu $AC = BC + AB$.
Dari segitiga ABG dan ABF, tentunya kamu dapat menemukan antara tan 60^o dan tan 30^o.

- Teruskan kajian tentang penjabaran dan hingga kamu menemukan tinggi tiang bendera.

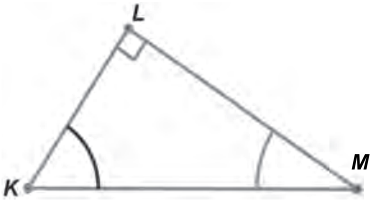
Menentuan nilai tan 60^o dan tan 30^o akan dibahas pada sub bab selanjutnya sehingga tinggi tiang bendera ditemukan.

Contoh 8.5

Perhatikan segitiga siku-siku di samping ini.

Diketahui $\tan M = \dfrac{16}{30}$,

tentukanlah sin M dan cos M!



Gambar 8.13 Segitiga siku-siku *KLM*

Alternatif Penyelesaian

Untuk menjawab contoh ini, kita mulai dari $\tan M = \dfrac{16}{30}$. Artinya, menurut Definisi 8.4, bahwa

$$\tan M = \frac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi di samping sudut } M} = \frac{KL}{LM} = \frac{16}{30}$$

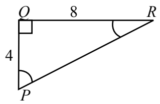
Jadi, panjang sisi $KL = 16$, dan $LM = 30$.
dengan Teorema Phytagoras, diperoleh $KM = 34$,
untuk menentukan nilai sin M dan cos K, menurut Definisi 8.4 diperoleh:

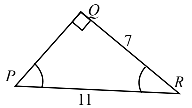
- $\sin M = \dfrac{\text{Panjang sisi di depan sudut } M}{\text{Panjang sisi miring}} = \dfrac{KL}{LM} = \dfrac{16}{34}$
- $\cos M = \dfrac{\text{Panjang sisi di samping sudut } M}{\text{Panjang sisi miring}} = \dfrac{LM}{KM} = \dfrac{30}{34}$.

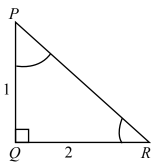
Perlu diketahui, bahwa yang disebut sisi pada suatu segitiga siku-siku tidak selalu miring, tetapi sisi miring selalu di hadapan sudut siku-siku.

Uji Kompetensi 8.2

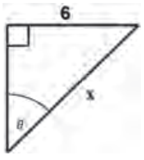
1. Tentukanlah nilai sinus, kosinus, dan tangen untuk sudut P dan R pada setiap segitiga siku-siku di bawah ini. Nyatakanlah jawaban Anda dalam bentuk paling sederhana.

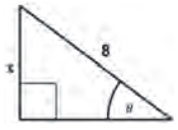
   a) 

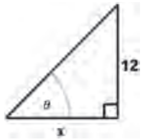
   b) 

   c) 

2. Diketahui suatu segitiga siku-siku, dengan nilai sinus salah satu sudut lancipnya adalah $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tentukanlah nilai cosinus, tangen sudut tersebut.
3. Pada sebuah segitiga KLM, dengan siku-siku di L, berlaku $\sin M = \dfrac{2}{3}$ dan panjang sisi $KL = \sqrt{10}$ cm, tentukanlah panjang sisi segitiga yang lain.
4. Luas segitiga siku-siku RST, dengan sisi tegak RS adalah 20 cm^2. Tentukanlah nilai sinus, cosinus, dan tangen untuk sudut lancip T.
5. Di bawah ini diberikan tiga segitiga siku-siku, diketahui $\sin\theta = \dfrac{2}{5}$. Tentukanlah nilai x.

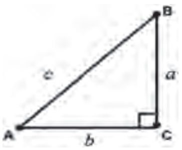
   a) 

   b) 

   c) 

6. Pada segitiga XYZ dengan siku-siku di Y, $\cos Z = \dfrac{20}{24}$, tentukan nilai $\tan X$ dan $\tan Z$.

7. Perhatikan segitiga siku-siku di bawah ini.



Tunjukkan bahwa:

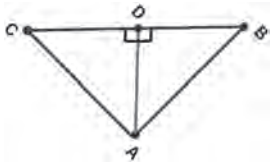
a) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

b. $\tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B}$

c) $\mathrm{cosec}^2 A - \cot\mathrm{an}^2 A = 1$

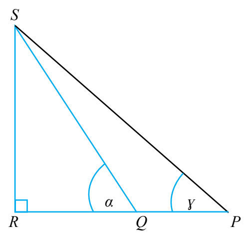
8. Dalam segitiga siku-siku ABC, siku-siku di A diketahui panjang $BC = a$ dan $\cos \angle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Tentukanlah panjang garis tinggi AD.



9. Diketahui $\sin x + \cos x = 3$ dan $\tan x = 1$, tentukanlah nilai $\sin x$ dan $\cos x$!

10. Diketahui segitiga PRS, seperti gambar di bawah. Panjang $PQ = 1$, $\angle RQS = \alpha$ dan $\angle RPS = \gamma$. Tentukanlah panjang sisi RS!



Projek

Rancanglah minimal tiga masalah nyata terkait penerapan perbandingan nilai sisi segitiga dan terkait trigonometri di bidang teknik bangunan dan bidang matematika. Selesaikanlah masalah tersebut dan buat laporannya serta sajikan di depan kelas.

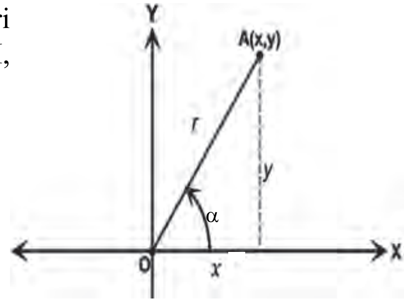
4. Nilai Perbandingan Trigonometri di Berbagai Kuadran

Pada awal subbab ini, akan dikaji nilai sinus, cosinus, tangen dan kebalikannya untuk domain sudut dalam satuan derajat atau radian. Selain itu, nilai semua perbandingan tersebut juga akan kita pelajari pada setiap kuadran dalam koordinat Kartesius. Mari kita pahami melalui pembahasan berikut ini.

Misalkan titik $A\ (x, y)$, panjang $OA = r$ dan sudut $AOX = \alpha$.

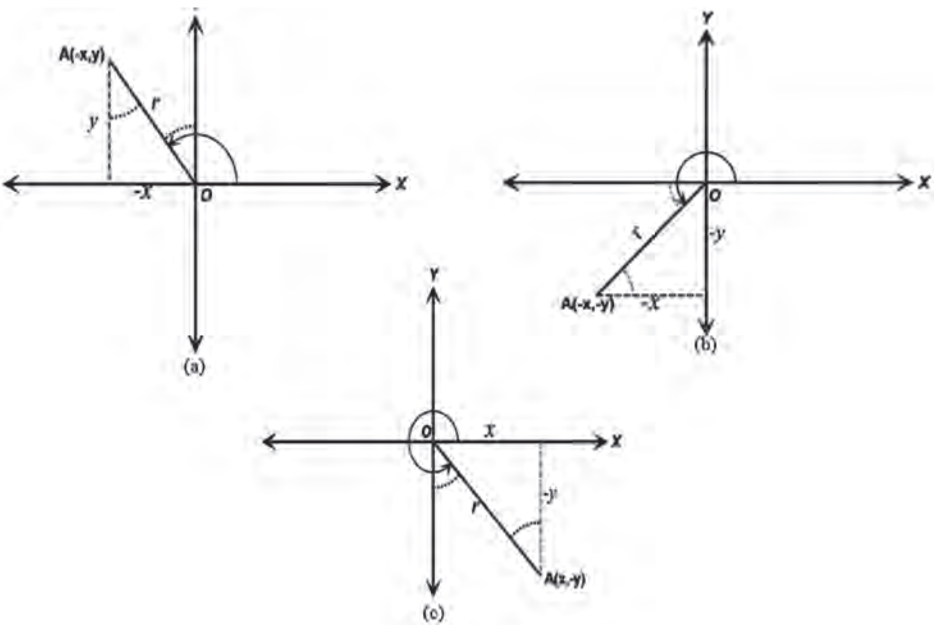
Mari kita perhatikan gambar di samping, dari segitiga siku-siku yang terdapat di kuadran I, berlaku :

- $\sin \alpha = \dfrac{y}{r}$.
- $\cos \alpha = \dfrac{x}{r}$.
- $\tan \alpha = \dfrac{y}{x}$.



Gambar 8.14 Segitiga siku-siku *AOX* yang berada di kuadran I

Dengan mempertimbangkan semua kombinasi koordinat titik pada koordinat Kartesius, kita dapat telusuri perbedaan tanda untuk ketiga perbandingan trigonometri yang utama.



Gambar 8.15 Kombinasi sudut pada koordinat Cartesius

Garis putus-putus pada gambar menyatakan projeksi *OA* ke setiap sumbu, misalnya pada Gambar 8.15(a), garis putus-putus adalah proyeksi sumbu *Y* di kuadran II. Sedangkan garis putus-putus melengkung menyatakan besar sudut yang besarnya sama, misalnya, pada Gambar 8.15 (b), garis putus-putus melengkung menyatakan dua sudut yang besarnya sama.

Contoh 8.6

Misalkan diketahui titik-titik berikut ini:

1. $A\ (-12,5)$ dan $\angle XOA = \alpha$.
2. $B\ (15,-8)$ dan $\angle XOB = \theta$.

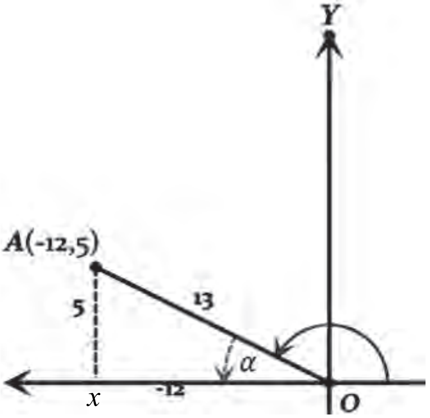
Tentukanlah nilai sin α dan tan α, serta cos θ dan tan θ!

Alternatif Penyelesaian

1. Dengan memperhatikan koordinat titik *A* (–12,5), sangat jelas bahwa titik tersebut terletak di kuadran kedua, karena $x = -12$, dan $y = 5$. Secara geometris, disajikan pada gambar berikut ini.

   Karena $x = -12$, dan $y = 5$, dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh sisi miring, $r = 13$. Oleh karena itu, diperoleh :

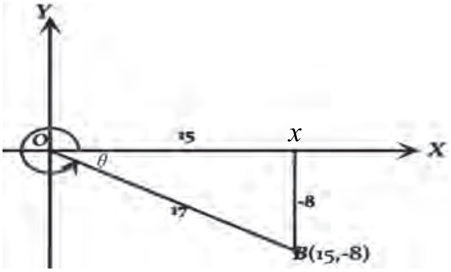
   - $\sin \alpha = \frac{5}{13}$.
   - $\tan \alpha = -\frac{5}{12}$.



Gambar 8.16 Titik *A* (–12,5) pada kuadran II

2. Titik *B* (15, –8), berada di kuadran IV, karena $x = 15$, dan $y = -8$.
   Untuk $x = 15$, $y = -8$, dengan menggunakan teorema Phytagoras diperoleh sisi miring, $r = 17$. Oleh karena itu, berlaku:

   - $\cos \theta = \frac{15}{17}$.
   - $\tan \theta = -\frac{8}{17}$.



Gambar 8.17 Titik *B* (15, –8) pada kuadran IV

Dari contoh di atas, dapat dipahami, ternyata nilai sudut perbandingan trigonometri, dapat bernilai positif juga negatif, tergantung pada letak koordinat titik yang diberikan. Selanjutnya, kebalikan dari kondisi pada Contoh 8.6, dapat diperhatikan pada contoh berikut ini.

Contoh 8.7

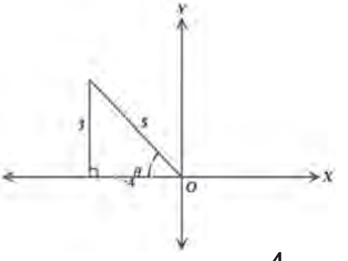
Jika diketahui:

1. $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ dengan $90^o < \theta < 180^o$, tentukan nilai cosec θ dan cotan θ.

2. $\tan\beta = -\dfrac{16}{12}$ dengan $90^o < \beta < 180^o$, tentukan nilai sin β dan cos β.

Alternatif Penyelesaian

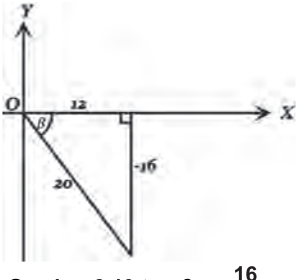
1. Sudut θ yang terletak di kuadran II menjadi penentu tanda nilai perbandingan trigonometri. Dalam koordinat Cartesius, $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$, digambarkan sebagai berikut:
   Dari gambar di samping, mudah kita pahami bahwa:
   - $\text{cosec}\ \theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{5}{3}$
   - $\text{cotan}\ \theta = \dfrac{1}{\tan\theta} = -\dfrac{4}{3}$



Gambar 8.18 $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$

2. Dengan pemahaman yang sama, dapat kita gambarkan $\tan\beta = -\dfrac{16}{12}$, dengan β di kuadran IV sebagai berikut:

   Dengan atribut segitiga siku-siku yang sudah lengkap, seperti pada gambar di samping, dengan mudah kita menentukan:
   - $\sin\beta = -\dfrac{16}{20} = -\dfrac{4}{5}$
   - $\cos\beta = \dfrac{12}{20} = \dfrac{3}{5}$



Gambar 8.19 $\tan\beta = -\dfrac{16}{12}$

Tentunya, dengan pengetahuan dari Gambar 8.20 dan pengalaman pembahasan Contoh 8.5 dan 8.6 di atas, dapat kita merumuskan nilai perbandingan trigonometri di setiap kuadran, yaitu:

Sifat-8.1

a. Jika $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, maka nilai sinus, cosinus, dan tangen bertanda positif.

b. Jika $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, maka nilai sinus bertanda positif dan nilai cosinus dan tangen bertanda negatif.

c. Jika $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, maka nilai tangen bertanda positif dan nilai sinus dan cosinus bertanda negatif.

d. Jika $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, maka nilai cosinus bertanda positif dan nilai sinus dan tangen bertanda negatif.

Dalam kajian trigonometri ada istilah sudut istemewa, yang artinya sudut-sudut yang nilai perbandingan trigonometri dapat ditentukan secara eksak. Misalnya, 30°, 45°, 60°, dan 90° merupakan sudut istimewa di kuadran I. Selanjutnya (120°, 135°, 150°, 180°), (210°, 225°, 240°, 270°), dan (300°, 315°, 330°, 360°) berturut-turut adalah sudut-sudut istimewa di kuadran II, III, dan IV. Pada beberapa referensi yang lain, sudut-sudut istimewa tersebut dinyatakan dalam satuan radian.

Pembahasan selanjutnya, yaitu, bagaimana nilai-nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut istimewa. Pertama kali, akan kita kaji nilai-nilai perbandingan tersebut di kuadran I.

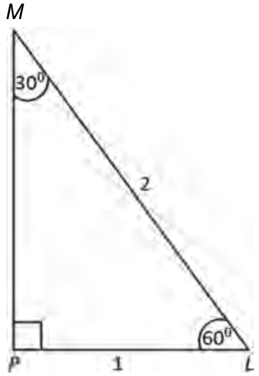
5. Perbandingan Trigonometri untuk Sudut 30°, 45° dan 60°

Mari perhatikan perbandingan sisi-sisi segitiga siku-siku istimewa. Segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku yang mengandung sudut 30°,45°,dan 60°. Perhatikan gambar berikut.

Gambar 8.20 Segitiga siku-siku yang me-muat sudut 30°,45°,dan 60°

Perhatkan Gambar 8.20 (b), segitiga *KLM* adalah segitiga sama sisi. Kita menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk setiap sudut 30° dan 60°.
Selanjutnya fokus kita adalah segitiga *MPL* seperti pada Gambar 8.21.
Dengan teorema phytagoras, diperoleh panjang MP = $\sqrt{3}$. Oleh karena itu berlaku:

- $\sin 30° = \frac{1}{2}$
- $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
- $\cos 60° = \frac{1}{2}$
- $\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$



Gambar 8.21 Segitiga siku-siku *MPL*

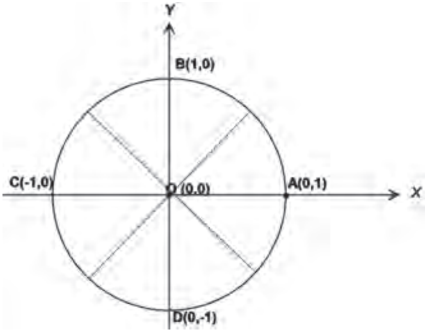
♦ Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri untuk sudut 45°, silahkan diskusikan dan kaji bersama teman-temanmu melalui gambar segitiga *ABC* pada Gambar 8.20(a).

Untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada saat 0° dan 90°, mari kita cermati gambar berikut ini.

Secara umum, dapat ditentukan nilai semua sudut istimewa, yaitu dengan cara menentukan setiap koordinat titik pada lingkaran dengan jari-jari 1.

Misalnya untuk titik *A* (0,1),
- sin 0° = 0
- cos 0° = 1
- tan 0° = 0

dan untuk menentukan nilai perbandingan sudut pada saat sudut 90°, digunakan titik B(1,0).
- sin 90° = 1
- cos 90° = 0
- tan 90° tak terdefinisi



Gambar 8.22 Perbandingan Trigonometri

Selengkapnya, nilai setiap perbandingan trigonometri pada setiap sudut istimewa 0°,30°,45°,60° dan 90°, di sajikan di Tabel 8.1 berikut.

Tabel 8.1 Nilai Perbandingan Trigonometri pada Kuadran Pertama

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tak terdefinisi

- Sekarang, dengan menggunakan Gambar 8.20, dan Tabel 8.1, kamu diskusikan dengan temanmu untuk menentukan nilai perbandingan trigonometri pada sudut-sudut istimewa di kuadran I, II, III, dan IV.

Sebagai pedoman untuk memastikan hasil kerjamu, secara lengkap di bawah ini disajikan nilai perbandingan trigonometri untuk semua sudut-sudut istimewa.

Tabel 8.2 Tabel lengkap Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I, II, III, dan IV

sudut	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	tak terdefinisi
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

sudut	sin	cos	tan
180°	0	–1	0
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	–1	0	tak terdefinisi
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360°	0	1	0

Masalah-8.2

Seorang anak ingin menentukan besar sudut dari sebuah perbandingan trigonometri. Diberikan kepadanya perbandingan sebagai berikut.

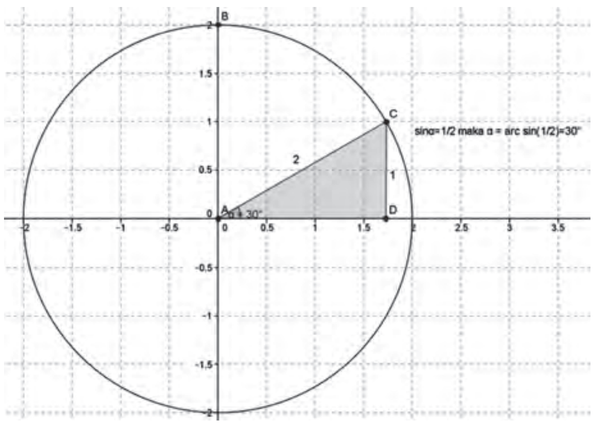
$\sin \alpha = \frac{1}{2}$, tugasnya adalah menentukan nilai α (besar sudut)!

Alternatif Penyelesaian

Penyelesaian I:

Langkah-langkah yang dilakukannya adalah

1. Menggambarkan sebuah segitiga siku-siku dan menerapkan sifat perbandingan sinus. Adapun cara yang dilakukannya adalah menggambarkan sisi di hadapan sudut dengan panjang 1 satuan dan menggambarkan sisi miring sebuah segitiga dengan panjang 2.



Gambar 8.23 Segitiga dalam lingkaran

2. Selanjutnya dia mengukur besar sudut dari segitiga siku-siku yang sudah terbentuk dengan menggunakan busur derajat.
3. Berdasarkan pengukuran yang dilakukan ternyata diperoleh besarnya sudut α adalah 30° dan 150°.

Penyelesaian II:

1. Alternatif penyelesaian yang lain yaitu dengan menggunakan kalkulator. Dengan fasilitas yang dimiliki kalkulator dapat diperoleh invers nilai sin, yaitu

   $\alpha = \sin^{-1}\dfrac{1}{2} = 30°$.
2. $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}$ dituliskan dengan arcsin $\dfrac{1}{2}$.

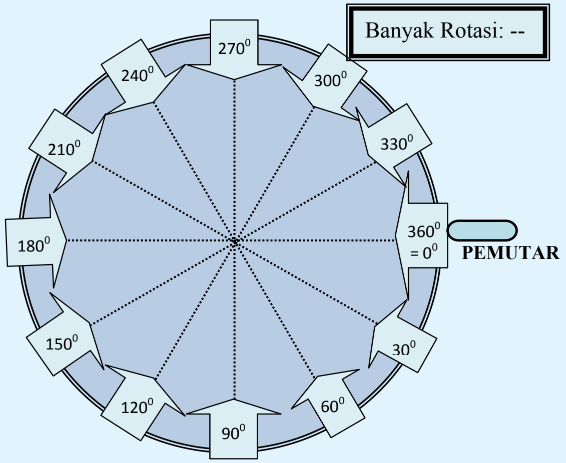
Penyelesaian III:

1. Alternatif yang mungkin dilakukan adalah dengan melihat tabel. Untuk kasus nilai perbandingan trigonometri sudut istimewa pada kuadran I, kuadran II, kuadran III, dan kuadran IV dapat menggunakan Tabel 8.2 dan α =30° dan 150°.

Masalah-8.3

Suatu kelompok belajar remaja yang terdiri dari siswa/i SMA, melakukan permainan lingkaran berputar dalam menentukan pilihan hadiah. Setiap anggota memiliki kesempatan untuk memilih hadiah melalui memutar papan lingkaran. Namun hadiah terbesar, jam tangan, akan muncul jika nilai sinus besar sudut yang dihasilkan putaran adalah $\frac{1}{2}$. Giliran pertama, Edo memutar papan banyak rotasi menunjukkan 3 dan papan lingkaran berhenti 120^o.

Menurut kamu, apakah Edo memperoleh jam tangan?



Gambar 8.24. Permainan lingkaran berputar

Alternatif Penyelesaian

Pertama kali, perlu kamu cermati bahwa jika papan banyak rotasi menunjukkan 3 rotasi dan papan lingkaran berhenti pada 120^o artinya besar sudut yang dihasilkan putaran Edo adalah 1200^o. Selanjutnya, kita akan menentukan sin 1200^0 .

Satu putaran memiliki arti posisi alat pemutar kembali ke posisi awal (0^0). Meskipun angka di papan banyak rotasi menunjukkan 5 atau 8, artinya nilai perbandingan trigonometri (sinus, cosinus, dan tangen) sama dengan nilai nilai perbandingan trigonometri sudut 0^0.

Oleh karena itu, besar sudut 1200^o dapat dinyatakan:

$1200^o = 3 \cdot (360^0) + 120^0$.

Jadi,

$\sin 1200^o = \sin 120^o = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Dengan demikian, Edo memperoleh hadiah jam tangan pada permainan kelompok belajar tersebut.

- Jika Siti, menghasilkan besar sudut 1500^0, selidiki apakah Siti juga memperoleh jam tangan?

Latihan 8.1

1. Tentukan nilai β jika cos $\beta = \frac{1}{2}$.
2. Tentukan nilai θ jika tan θ = 0.

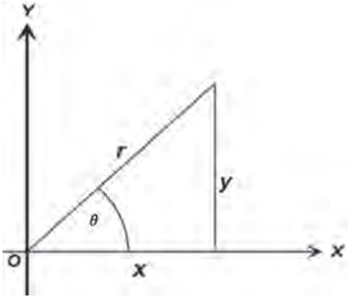
Latihan 8.2

Jika $\tan x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$, dan x tumpul berapakah nilai cos x?

Contoh 8.8

Perhatikan Gambar 8.25!
Tunjukkan bahwa

- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$



Gambar 8.25 Segitiga siku-siku

Alternatif Penyelesaian

Dari Gambar 8.25 berlaku:

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $\cos\theta = \dfrac{x}{r}$.

Nilai perbandingan sin θ dan cos θ dinyatakan sebagai berikut.

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$$

sedangkan tan $\theta = \dfrac{y}{x}$.

sehingga berlaku bahwa:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x} = \tan\theta \Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

Perlu kita kenalkan, bahwa (sin θ)(sin θ) = (sin $\theta)^2$ = $\sin^2\theta$; ($\sin^2\theta$ dibaca sinus kuadrat *tetha*). Tetapi perlu diingat bahwa, $\sin^2\theta \neq \sin\theta^2$.

Tentunya, jika sin $\theta = \dfrac{y}{r}$ maka $\sin^2\theta = (\sin\theta).(\sin\theta) = \left(\dfrac{y}{r}\right).\left(\dfrac{y}{r}\right) = \dfrac{y^2}{r^2}$.

Sama halnya untuk memahami $\cos^2\theta = \dfrac{x^2}{r^2}$, dan $\tan^2\theta = \dfrac{y^2}{x^2}$.

Jumlah dari sinus kuadrat *tetha* dengan cosinus kuadrat *tetha* dinyatakan sebagai berikut:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2+x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

Jadi ditemukan:

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .... (1)

Persamaan ini disebut sebagai persamaan identitas trigonometri.

Dari persamaan ini kita dapat menemukan turunan rumusan dalam trigonometri. Misalnya, jika kedua ruas persamaan tersebut dibagi $\cos^2\theta$, (dengan syarat $\cos^2\theta \neq 0$), maka persamaan (1) berubah menjadi:

$\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta} \Leftrightarrow \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$ .... (2)

Jika kita lanjutkan membagi kedua ruas persamaan (1) dengan $\sin^2 \theta$, maka berlaku:

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} \Leftrightarrow 1 + \text{cotan}^2\theta = \text{cosec}^2\theta \quad \text{.................................} \quad (3)$$

Formula di atas berlaku, untuk semua satuan sudut yang sama. Misalnya, $\alpha = 15°$, maka $2\alpha = 30°$.

Oleh karena itu berlaku:

$$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = \sin^2 30° + \cos^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Ingat kembali bahwa, $\sin^2 30° = \frac{1}{4}$, tetapi $\sin (30°)^2 = \sin 900° = 0$, (sudahkah kamu tahu alasannya?).

Berdasarkan hasil pembahasan Masalah 8.2 dan 8.3 serta Contoh 8.7, dirumuskan sifat berikut ini.

Sifat-8.2

Sifat Perbandingan trigonometri sudut dalam Segitiga siku-siku
Jika Δ *ABC* segitiga siku-siku dengan siku-siku di *B*, *AB* = *x*, *BC* = *y*, *AC* = *r*, dan $\angle BAC = a$ maka:

a. $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$

b. $\text{cotan } a = \dfrac{\cos a}{\sin a}$

c. $(\sin a)^2 = \sin^2 a$ dan $(\cos a)^2 = \cos^2 a$

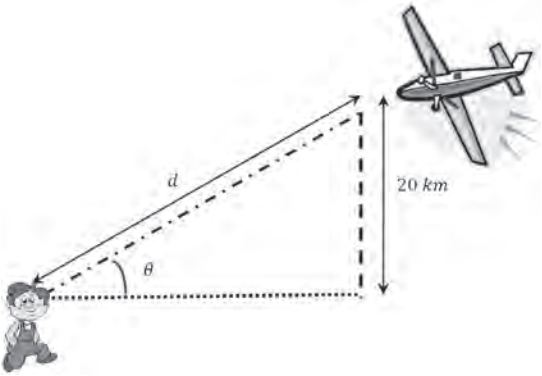
d. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$(identitas trigonometri).
   $\tan^2 a + 1 = \sec^2 a$
   $1 + \text{cotan}^2 a = \text{cosec}^2 a$

Masalah-8.4

Di daerah pedesaan yang jauh dari bandar udara, kebiasan anak-anak jika melihat/mendengar pesawat udara sedang melintasi perkampungan mereka. Bolang, mengamati sebuah pesawat udara, yang terbang dengan ketinggian 20 km. Dengan sudut elevasi pengamat (Bolang) terhadap pesawat adalah sebesar θ, tentukanlah jarak pengamat ke pesawat jika : $\theta = 30°$, $\theta = 90°$, dan $\theta = 120°$.

Alternatif Penyelesaian

Ilustrasi persoalan di atas dapat disajikan pada Gambar 8.26.



Gambar 8.26 Sketsa pengamatan terhadap pesawat udara dengan sudut elevasi *θ*.

Untuk menentukan jarak pengamat terhadap pesawat, dengan diketahui ketinggian terbang pesawat, kita menentukan $\sin\theta$, (kenapa?).

- Untuk $\theta = 30°$, maka $\sin 30° = \dfrac{20}{d} \Leftrightarrow d = \dfrac{20}{\sin 30°} = \dfrac{20}{1/2} = 40$ km.

♦ Kesimpulan apa yang dapat kamu tarik bila sudut elevasi 90°?

♦ Selidiki posisi si Bolang dengan pesawat jika sudut elevasi 120°.

Masalah-8.5

Sebuah perusahaan memproduksi mainan. Hasil penjualan bulanan (dalam satuan ribuan unit) selama 2 tahun diprediksi sebagai berikut

$$S = 23{,}1 + 0{,}442t + 4{,}3\cos\left(\pi t/6\right)$$

dengan t = waktu (bulan)

t = 1 merepresentasikan hasil penjualan bulan Januari tahun 2010.

Tentukanlah prediksi penjualan pada bulan Februari 2010 dan bulan April 2011.

Alternatif Penyelesaian

Jika bulan Januari tahun 2010 menyatakan waktu $t = 1$, maka bulan Februari 2010 menyatakan waktu $t = 2$, dan bulan April 2011 menyatakan $t = 16$.

1. Prediksi penjualan mainan pada bulan Februari 2010, waktu $t = 2$ adalah:

$$S = 23,1 + 0,442.(2) + 4,3\cos\left(t\pi/6\right)$$

$$S = 23,1 + 0,884 + 4,3\cos(60°)$$

$$S = 23,984 + 4,3.\left(\frac{1}{2}\right) = 26,134$$

Jadi mainan yang terjual pada bulan Februari 2010 sebanyak 26.134 unit.

2. Prediksi penjualan mainan pada bulan April 2011, $t = 16$ adalah:

$$S = 23,1 + 0,442.(16) + 4,3 \cos\left(16\pi/6\right)$$

$$S = 23,1 + 0,442.(16) + 4,3 \cos (480^o)$$

$S = 30,172 + 4,3 \cos (120^o)$ (kenapa $\cos (480^o) = \cos (120^o)$?)

$$S = 30,172 + 4,3.\left(-\frac{1}{2}\right) = 28,022$$

Karena jumlah penjualan dalam ribuan unit, maka prediksi penjualan pada bulan April 2011 adalah 28.022 unit.

6. Grafik Fungsi Trigonometri

a. Grafik Fungsi $y = \sin x, x \in [0°, 360°]$.

Dengan menggunakan nilai-nilai sudut yang telah diberikan di atas, mari kita selesaikan persamaan berikut ini.

Contoh 8.9

Tentukanlah nilai x yang memenuhi setiap persamaan di bawah ini:

a) $\sin x = \frac{1}{2}, x \in [0, 2\pi]$

b) $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x, x \in [0, 2\pi]$

Alternatif Penyelesaian

$x \in [0, 2\pi]$ merupakan domain untuk menyelesaikan persamaan pada bagian a).

a) $\sin x = \frac{1}{2}$, hanya berlaku untuk $x = 30°$ dan $x = 150°$, karena perbandingan trigonometri hanya bernilai positif di kuadran I dan II. Sedangkan untuk $x = 210°$ dan $x = 330°$, nilai $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Pasangan nilai x dengan nilai perbandingan sin x merupakan suatu koordinat titik pada grafik fungsi sinus, yaitu koordinat:

$$\left(30°,\frac{1}{2}\right), \left(150°,\frac{1}{2}\right), \left(210°,-\frac{1}{2}\right), \left(240°,-\frac{1}{2}\right)$$

b) Persamaan $\sin x + \sqrt{2} = -\sin x \Leftrightarrow 2\sin x = -\sqrt{2}$ atau $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jika kamu sudah menguasai Tabel 8.2, tentunya dengan mudah, kamu dapat menyebutkan bahwa nilai x yang memenuhi adalah $x = 225°$ dan $x = 315°$. Selain itu juga, kita harus menguasai bahwa nilai $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ pada saat $x = 45°$ dan $x = 135°$.

Oleh karena itu, sekarang kita memiliki pasangan titik:

$$\left(45°,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(135°,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(225°,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(315°,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

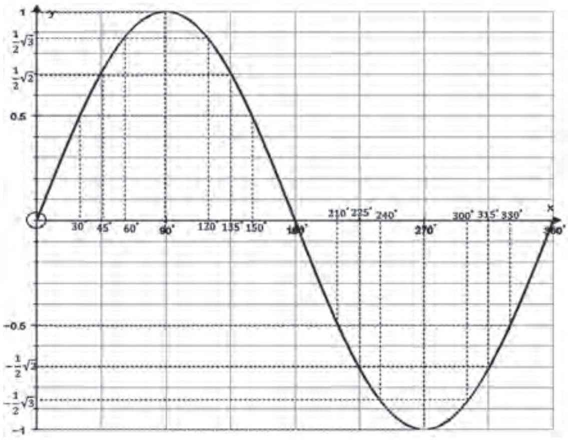
Selain pasangan titik besar sudut dan nilai perbandingan trigonometri di atas, tentunya, masih terdapat pasangan koordinat yang lain, yaitu:

- $\sin x = 0$, untuk $x = 0$, $x = 180°$ dan $x = 360°$.
  Akibatnya diperoleh: (0°,0), (180°,0), (360°,0).
- $\sin x = 1$, untuk $x = 90°$, $\sin x = -1$ untuk $x = 270°$.
  Akibatnya berlaku: (90°,1), (270°,1).

$\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, untuk $x = 60°$, dan $x = 120°$, serta $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ pada saat $x = 240°$, dan $x = 300°$. Oleh karena itu berlaku:

$$\left(60°,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(120°,\frac{1}{2}\sqrt{3}\right), \left(240°,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right),\left(300°,-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right).$$

Secara kumulatif hasil semua pasangan koordinat di atas, kita sajikan pada Gambar 8.27.



Gambar 8.27 Grafik fungsi y = sin x, $x \in [0°,360°]$

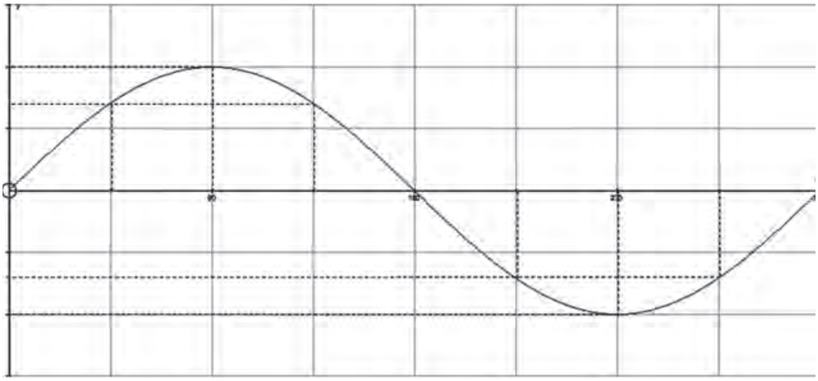
Grafik fungsi $y = \sin x$, $x \in [0°, 360°]$, berbentuk gelombang yang bergerak secara teratur seiring pergerakan x. Keterangan yang diperoleh dari grafik fungsi $y = \sin x$ adalah sebagai berikut:

- Simpangan gelombang = 1 (Simpangan gelombang adalah jarak dari sumbu x ke titik puncak gelombang).
- Periode gelombang = satu putaran penuh.
- Grafik $y = \sin x$ memiliki nilai $y_{max} = 1$ dan $y_{min} = -1$.
- Titik maksimum gelombang adalah (90°, 1) dan titik minimumnya (270°, –1).

Secara manual, grafik di atas dapat kamu gambarkan pada kertas dengan spasi yang jelas.

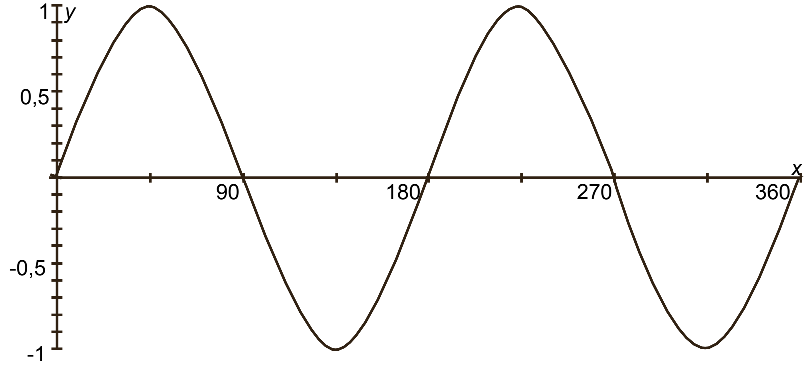
- Tentukan pasangan koordinat titik-titik yang melalui grafik fungsi $y = \text{cosec } x$, $x \in [0°,360°]$. Kemudian sajikan pasangan titik tersebut dalam grafik fungsi.

Perhatikan grafik $y = a \sin x$ di bawah ini. Cermati perbedaannya dengan grafik $y = \sin x$. Misalnya, pilih $a = 2$, sehingga diperoleh grafik di bawah ini. Perubahan nilai konstanta a mengakibatkan perubahan terhadap nilai maksimum dan nilai minimum fungsi $y = a \sin x$.



Gambar 8.28 Grafik fungsi $y = a \sin x$, $x \in [0°,360°]$, $a \in R$

- Cermati grafik $y = a \sin x$ dengan grafik $y = \sin 2x$ berikut ini. Berikan kesimpulan yang kamu temukan!



Gambar 8.29 Grafik fungsi $y = \sin 2x$

Selanjutnya, akan kita bandingkan grafik fungsi di atas dengan grafik fungsi $y = \cos x$, $x \in [0°,360°]$.

b. Grafik Fungsi $y = \cos x$, $x \in [0°,360°]$

Contoh 8.10

Mari cermati beberapa persamaan di bawah ini.

1) $(\cos x)^2 - 2.\cos x = -1$.
2) $\sqrt{8}.\cos x - 2 = 0$.

Alternatif Penyelesaian

1) Persamaan $(\cos x)^2 - 2.\cos x = -1$ merupakan persamaan trigonomteri berbentuk persamaan kuadrat. Tentunya, untuk suatu persamaan kuadrat kita membutuhkan akar-akar persamaan kuadrat tersebut. Oleh karena itu dapat kita tulis:

$$(\cos x)^2 - 2.\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1).(\cos x - 1) = 0$$

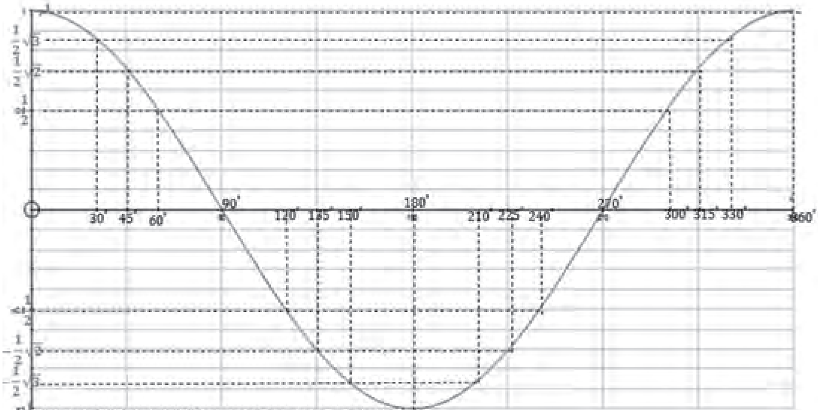
atau $(\cos x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$.
Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = 1$ adalah $x = 0°$ dan $x = 360°$ (kembali sesuaikan dengan Tabel 8.2).
Nilai $\cos x = -1$ berlaku untuk $x = 180°$ dan $\cos x = 0$ untuk $x = 90°$ dan $x = 270°$.
Akibatnya, kita temukan pasangan titik:
$(0°,1)$, $(90°,0)$, $(180°,-1)$, $(270°,0)$ dan $(360°,1)$

2) Persamaan $\sqrt{8}.\cos x - 2 = 0$ dapat kita sederhanakan menjadi:
$2\sqrt{2}.\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.
Nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ adalah untuk $x = 45°$ dan $x = 315°$ (lihat Tabel 8.2). Sedangkan untuk $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ berlaku untuk $x = 135°$ dan $x = 225°$. Oleh karena itu, kita dapat menuliskan pasangan titik-titik berikut:

$$\left(45°,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(135°,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right), \left(225°,-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) \left(315°,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right).$$

- Selanjutnya, silahkan bentuk pasangan-pasangan titik yang lain, dapat kita lihat dari Tabel 8.2.

Jadi, dengan menggunakan semua pasangan-pasangan titik di atas, berikut ini disajikan pada grafik berikut.



Gambar 8.30 Grafik fungsi y = cos *x*, *x* ∈ [0°,360°]

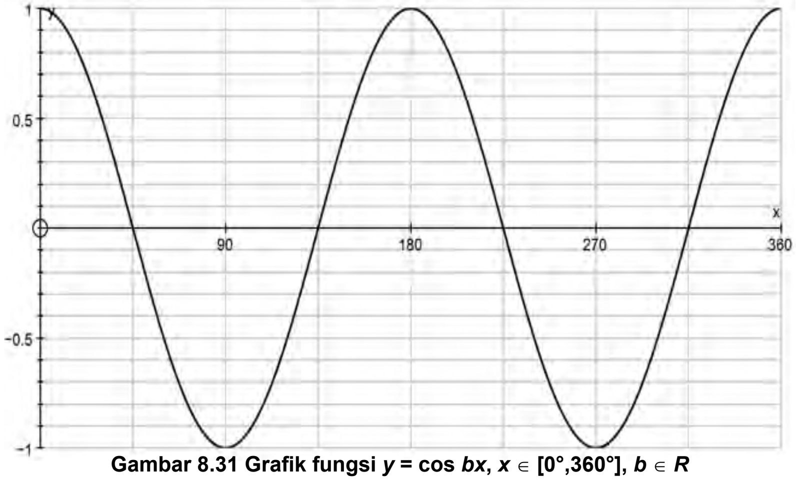
Grafik fungsi $y = \cos x$ berbentuk gelombang yang bergerak secara terartur dari titik mencapai titik hingga titik .

♦ Berikan keterangan lain yang kamu peroleh dari grafik $y = \cos x$.

♦ Selanjutnya, tentukanlah pasangan koordinat titik-titik yang dilalui grafik fungsi $y = \sec x$, untuk $x \in [0°, 360°]$. Kemudian sajikan pasangan titik-titik tersebut dalam grafik fungsi trigonometri.

Gambar 8.31 di bawah ini adalah grafik $y = \cos bx$, $x \in [0°,360°]$, $b \in R$.

Cermati dan tentukan perbedaan dengan grafik $y = \cos x$.

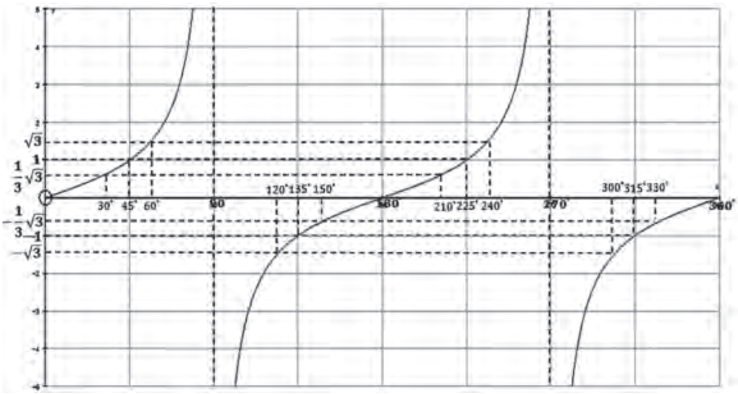


Gambar 8.31 Grafik fungsi *y* = cos *bx*, *x* ∈ [0°,360°], *b* ∈ *R*

- Untuk $x \in [0°, 360°]$, grafik $y = \cos x$ selalu mulai bergerak dari $y = 1$. Kondisi berbeda dengan grafik $y = b \cos x$, untuk $b \in R$, tetapi juga memiliki kesamaan. Temukan perbedaan dan kesamaannya.
- Fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, untuk $x \in [0°,360°]$ akan bernilai sama untuk suatu x. Tentukan x yang memenuhi.

c. Grafik Fungsi $y = \tan x$, $x \in [0°,360°]$.

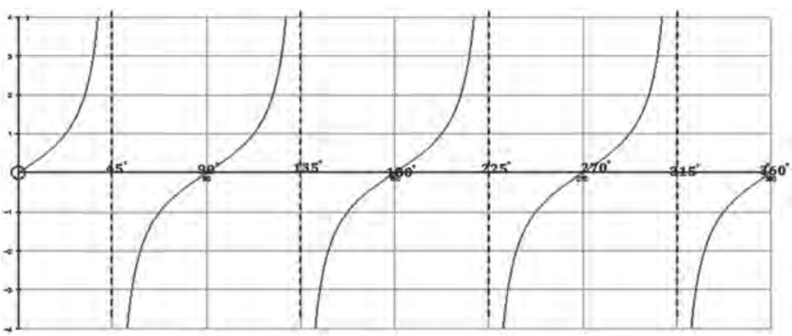
Dengan cara yang sama, menggambarkan grafik fungsi $y = \sin x$ dan $y = \cos x$, grafik fungsi $y = \tan x$, untuk $x \in [0°,360°]$ dapat kita gambarkan sebagai berikut.



Gambar 8.32 Grafik fungsi $y = \tan x$, $x \in [0°,360°]$

Perhatikan nilai fungsi disaat $x \to 90°$ dan $x \to 270°$ (dari kanan), nilai $y = \tan x$ menuju tak terhingga. Sebaliknya, untuk $x \to 90°$ dan $x \to 270°$ (dari kiri), nilai $y = \tan x$ menuju negatif tak terhingga.

- Dengan kondisi ini, apa yang dapat kalian simpulkan dari gambar di atas?



Gambar 8.33 Grafik fungsi $y = \tan ax$, $x \in [0°,360°]$, dan $a \in R$

- Dari grafik $y = \tan x$ dan $y = \tan ax$, untuk $x \in [0°, 360°]$, nilai fungsi dari grafik manakah yang paling cepat bertambah? Berikan alasanmu!

Dari ketiga grafik sinus, cosinus dan tangen yang sudah dikaji di atas, terdapat $x \in [0°, 360°]$ sedemikian nilai fungsi sinus sama dengan nilai fungsi cosinus, atau pasangan fungsi yang lain.

Mari kita cermati contoh berikut ini.

Contoh 8.11

Tentukan nilai x yang memenuhi:

a. $\sin 2x = \cos x$

b. $\cos x = \cos 2x$

c. $\tan 2x = \sqrt{2} \cos 2x$

Untuk $x \in [0°, 360°]$.

Alternatif Penyelesaian

a. Dengan mencermati kembali grafik $y = \sin 2x$ dan $y = \cos x$, ditemukan nilai x yang memenuhi persamaan $\sin 2x = \cos x$, yaitu pada saat $x = 30°$.

   - Coba temukan nilai x yang lain yang memenuhi kesamaan tersebut.

b. Dengan menggunakan Tabel 8.2, dapat ditentukan nilai x yang memenuhi persamaan $\cos x = \cos 2x$. Nilai $x = 0°$dan $x = 120°$ memenuhi persamaan tersebut.

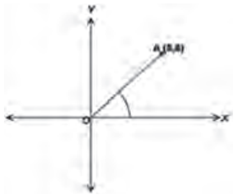
   - Menurut kamu, masih adakah nilai x yang memenuhi persamaan tersebut? Jika ada, tentukan; jika tidak ada berikan alasannya.

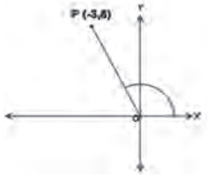
c. Adanya $\sqrt{2}$ pada ruas kanan pada persamaan $\tan 2x = \sqrt{2} \cos 2x$ merupakan petunjuk untuk menemukan nilai x yang memenuhi, yaitu pada saat $x = 22{,}5°$.

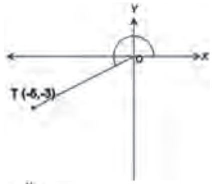
   - Temukan nilai x lainnya yang memenuhi persamaan tersebut! Bandingkan hasil kerjamu dengan temanmu.

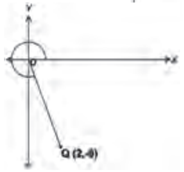
Uji Kompetensi 8.3

1. Perhatikan setiap gambar di bawah ini, tentukanlah nilai sinus, cosinus, tangen, secan, cosec, dan cotangen setiap sudut yang dinyatakan.

   a. 

   b. 

   c. 

   d. 

2. Tentukanlah nilai sinus, cosinus dan tangen untuk setiap titik yang disajikan berikut:
   a. $P(5,12)$
   b. $Q(–5.2,7.2)$
   c. $R(–5,–2)$
   d. $T(3.5,–7.75)$

3. Periksalah kebenaran setiap pernyataan berikut. Berikan alasanmu.
   a. sec x dan sin x selalu memiliki nilai tanda yang sama di keempat kuadran.
   b. Di kuadran I, nilai sinus selalu lebih besar daripada nilai cosinus.
   c. Untuk $30° < x < 90°$, dan $120° < y < 150°$, maka nilai $2.\sin x < \cos 2y$

4. Di bawah ini disajikan tabel yang menjelaskan tanda nilai beberapa perbandingan trigonometri.

sin α > 0	cos α > 0
sin α < 0	cos α < 0
tan α < 0	sin α > 0

   Tentukanlah letak sudut α untuk setiap kondisi tanda nilai perbandingan.

5 Diberikan $\tan \alpha = -\dfrac{8}{15}$ dengan $\sin \alpha > 0$, tentukanlah:
   a. cos α
   b. sec α
   c. (sin α).(cos α)
   d. $\dfrac{\text{cosec } \alpha}{\text{cotan } \alpha}$

6. Diketahui $\pi/2 \le \beta \le 3\pi/2$, dan nilai cotan β tidak terdefinisi.
   Tentukanlah :
   a. sin β
   b cos β

c. $\dfrac{\sin\beta}{\tan\beta+1}$

d. $\dfrac{2\sec\beta}{\tan\beta-1}$

7. Sederhanakanlah bentuk persamaan berikut ini.
   a. $\cos x.\text{cosec } x.\tan x$
   b. $\cos x.\text{cotan } x + \sin x$

8. Diketahui β berada di kuadran III, dan $\cos\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, tentukanlah:
   a. $\dfrac{\sec\beta-\tan^2\beta}{\tan\beta}+\sec\beta$
   b. $\dfrac{\sec^2\beta+\tan^2\beta}{2\sin^2\beta+2\cos^2\beta}$

9. Jika $\alpha = 2040^o$, hitunglah nilai:
   a. $\dfrac{\sin\alpha}{(\cos\alpha)^2}$
   b. $\dfrac{\tan\alpha}{\cos\alpha+\sin\left(\dfrac{\alpha}{4}\right)}$
   c. $2\sin\alpha-\cos(2\alpha)$
   d. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sqrt{3}$

10. Sederhanakanlah bentuk ekspresi berikut.
   a. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{\sin A}{1-\cos A}$
   b. $(\sin B + \cos B)^2 + (\sin B - \cos B)^2$
   c. $(\text{cosec } A - \text{cotan } A).(1 + \cos A)$

10. Jika diketahui $Y_1 = a \sin bx$, dan $Y_2 = a \cos bx$, $x \in [0°,360°]$, a, $b \in R$. Tentukanlah nilai maksimum dan minimum kedua fungsi, dan gambarkanlah gambar kedua fungsi.

11. Lukislah grafik fungsi:
   a. $y = 2 \cos 2x$
   b. $y = -3\sin 3x$
   c. $y = \cos (x\text{-}30^o)$
   d. $y = -2\sin (x + 60^o)$

12. Hitunglah nilai maksimum dan nilai minimum untuk semua fungsi di bawah ini:
   a. $y = 3\cos 2x - 2$
   b. $y = 5 \sin x + \cos 2x$
   c. $y = \dfrac{4}{\sin 3x}$
   d. $y = \dfrac{7}{\sin x-\cos x}$

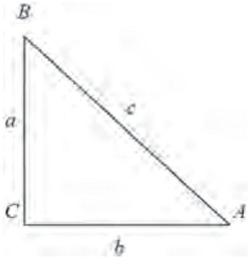
13. Dengan menggunakan Tabel 8.2 atau grafik trigonometri, tentukanlah nilai x yang memenuhi kesamaan berikut ini:
   a. $\sqrt{2}\sin 2x = \tan 2x$
   b. $\cos x + \sin x = 1$
   c. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Projek

Himpunlah informasi penerapan grafika fungsi trigonometri dalam bidang fisika dan teknik elektro serta permasalahan di sekitarmu. Buatlah analisis sifat-sifat grafik sinus, cosinus, dan tangen dalam permasalahan tersebut. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

1. Pada segitiga siku-siku ABC berlaku jumlah kuadrat sisi siku-siku sama dengan kuadrat sisi miringnya atau secara simbolik ditulis $a^2 + b^2 = c^2$ dengan c merupakan panjang sisi miring dan a serta b panjang sisi-sisi yang lain dari segitiga siku-siku tersebut.



2. Pada gambar segitiga siku-siku ABC dengan sudut siku-siku di C, maka berlaku perbandingan trigonometri berikut.

   a. $\sin A = \dfrac{a}{c}$

   b. $\cos A = \dfrac{b}{c}$

   c. $\tan A = \dfrac{a}{b}$

3. Nilai perbandingan trigonometri pada tiap kuadran berlaku sebagai berikut.
   a. Pada kuadran I, semua nilai perbandingan trigonometri bernilai positif, termasuk kebalikan setiap perbandingan sudut tersebut.
   b. Pada kuadran II, hanya sin α dan cosec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.

c. Pada kuadran III, hanya tan α dan cotan α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.
d. Pada kuadran IV, hanya cos α dan sec α yang bernilai positif, selainnya bertanda negatif.

4. Nilai perbandingan trigonometri pada kuadran I adalah sebagai berikut.

Sudut	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	tidak terdefinisi

Catatan:

Bab 9

Geometri

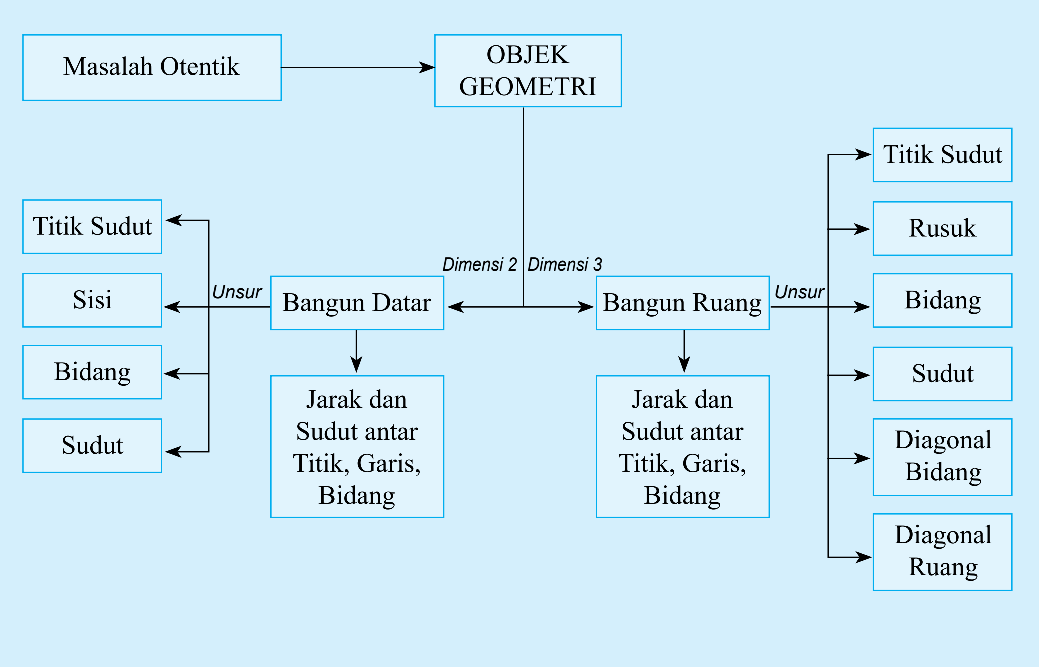
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percayadiri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2 Mendeskripsikan konsep jarak dan sudut antar titik, garis dan bidang melalui demonstrasi menggunakan alat peraga atau media lainnya. 3 Menggunakan berbagai prinsip bangun datar dan ruang serta dalam menyelesaikan masalah nyata berkaitan dengan jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang.	Melalui pembelajaran materi geometri, siswa memperoleh pengalaman belajar: • menemukan konsep dan prinsip geometri melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip bangun datar dan ruang dalam geometri untuk memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Titik*
- *Garis*
- *Bidang*
- *Ruang*
- *Jarak*
- *Sudut*
- *Diagonal*

B. PETA KONSEP

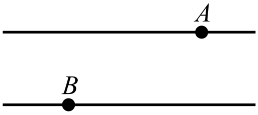


C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Jarak Titik, Garis, dan Bidang

a. Kedudukan Titik

Gambar 9.1a Burung

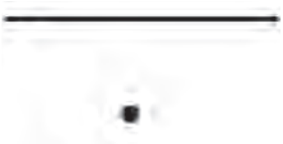


Gambar 9.1b Titik pada garis

Perhatikan Gambar 9.1a dan Gambar 9.1b. Apa yang dapat kamu lihat? Misalkan kabel listrik adalah suatu garis dan burung adalah titik, maka dapat dikatakan bahwa tempat hinggap burung pada kabel listrik merupakan sebuah titik yang terletak pada suatu garis, yang dapat dilihat pada Gambar 9.1b.

Gambar berikut akan mencoba pemahaman kamu terhadap kedudukan titik dengan garis.

Gambar 9.2a Jembatan penyeberangan



Gambar 9.2a Garis dan titik

Jika dimisalkan jembatan penyeberangan merupakan suatu garis dan lokomotif kereta adalah suatu titik. Kita dapat melihat bahwa lokomotif tidak terletak atau melalui jembatan penyeberangan. Artinya jika dihubungkan dengan garis dan titik maka dapat dikatakan bahwa contoh di atas merupakan suatu titik yang tidak terletak pada garis.

Untuk lebih melengkapi pemahaman kedudukan titik terhadap garis, perhatikan pula Gambar 9.3a dan Gambar 9.3b.

Gambar 9.3a Bola di lapangan

Gambar 9.3b Dua titik *A* dan *B*

Gambar di atas merupakan ilustrasi contoh kedudukan titik terhadap bidang, dengan bola sebagai titik dan lapangan sebagai bidang. Sebuah titik dikatakan terletak pada sebuah bidang jika titik itu dapat dilalui bidang seperti terlihat pada titik *A* pada gambar dan sebuah titik dikatakan terletak di luar bidang jika titik itu tidak dapat dilalui bidang.

Perhatikan dua permasalahan di bawah ini!

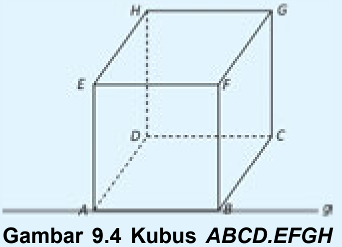
Masalah-9.1

Sebuah kardus berbentuk kubus *ABCD.EFGH*. Perhatikanlah kubus tersebut. Segmen atau ruas garis *AB* sebagai wakil garis *g*.

Pertanyaan:

a. Tentukan titik sudut kubus yang terletak pada garis *g*!

b. Tentukan titik sudut kubus yang berada di luar garis *g*!



Gambar 9.4 Kubus *ABCD.EFGH* dan garis *g*

Alternatif Penyelesaian

Pandang kubus *ABCD.EFGH* dan garis g dari gambar di atas, dapat diperoleh:

a. titik sudut kubus yang terletak pada garis *g* adalah titik *A* dan *B*,

b. titik sudut kubus yang berada di luar garis g adalah titik *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, dan *H*.

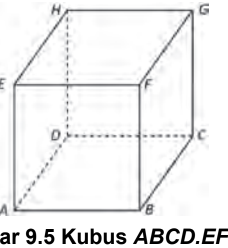
Contoh 9.1

Perhatikan kubus *ABCD.EFGH* pada Gambar 9.5!

Terhadap bidang *DCGH*, tentukanlah:

a. titik sudut kubus apa saja yang terletak pada bidang *DCGH*!

b. titik sudut kubus apa saja yang berada di luar bidang *DCGH*!



Gambar 9.5 Kubus *ABCD.EFGH*

Alternatif Penyelesaian

Pandang kubus *ABCD.EFGH*, pada bidang *DCGH* dapat diperoleh:

- Titik sudut yang berada di bidang *DCGH* adalah *D*, *C*, *G*, dan *H*.
- Titik sudut yang berada di luar bidang *DCGH* adalah *A*, *B*, *E*, dan *F*.

Pertanyaan Kritis

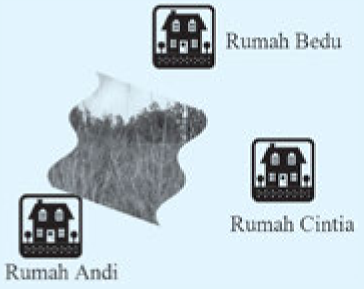
Jika suatu titik dilalui oleh garis atau bidang, apakah titik tersebut memiliki jarak terhadap garis dan apakah titik memiliki jarak terhadap bidang?

Definisi 9.1

1) Jika suatu titik dilalui garis, maka dikatakan titik terletak pada garis tersebut.
2) Jika suatu titik tidak dilalui garis, maka dikatakan titik tersebut berada di luar garis.
3) Jika suatu titik dilewati suatu bidang, maka dikatakan titik itu terletak pada bidang.
4) Jika titik tidak dilewati suatu bidang, maka titik itu berada di luar bidang.

b. Jarak antara Titik dan Titik

Masalah-9.2

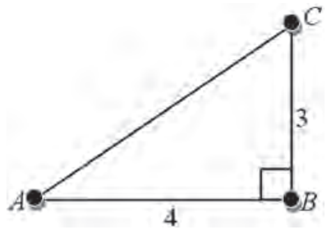


Gambar-9.6 Peta rumah

Rumah Andi, Bedu, dan Cintia berada dalam satu pedesaan. Rumah Andi dan Bedu dipisahkan oleh hutan sehingga harus menempuh mengelilingi hutan untuk sampai ke rumah mereka. Jarak antara rumah Bedu dan Andi adalah 4 km sedangkan jarak antara rumah Bedu dan Cintia 3 km. Dapatkah kamu menentukan jarak sesungguhnya antara rumah Andi dan Cintia?

Alternatif Penyelesaian

Misalkan rumah Andi, Bedu, dan Cintia diwakili oleh tiga titik yakni *A*, *B*, dan *C*. Dengan membuat segitiga bantu yang siku-siku maka ilustrasi di atas dapat digambarkan menjadi:



Gambar 9.7 Segitiga siku-siku

Selanjutnya gunakan prinsip teorema Phytagoras, pada segitiga siku-siku ACB, untuk memperoleh panjang dari titik A dan C

Masalah-9.3

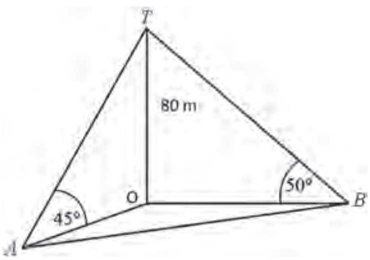
Seorang satpam sedang mengawasi lalu lintas kendaraan dari atap suatu gedung apartemen yang tingginya 80 m mengarah ke lapangan parkir. Ia mengamati dua buah mobil yang sedang melaju berlainan arah. Terlihat mobil *A* sedang bergerak ke arah Utara dan mobil *B* bergerak ke arah Barat dengan sudut pandang masing-masing sebesar 50° dan 45°.
Berapa jarak antar kedua mobil ketika sudah berhenti di setiap ujung arah?

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Misalkan: Mobil A = titik A, memiliki sudut pandang 50°
Mobil B = titik B, memiliki sudut pandang 45°.
Tinggi gedung = 80 m

Ditanya: Jarak antara kedua mobil sesudah berhenti?
Perhatikan ilustrasi masalah dalam gambar berikut.

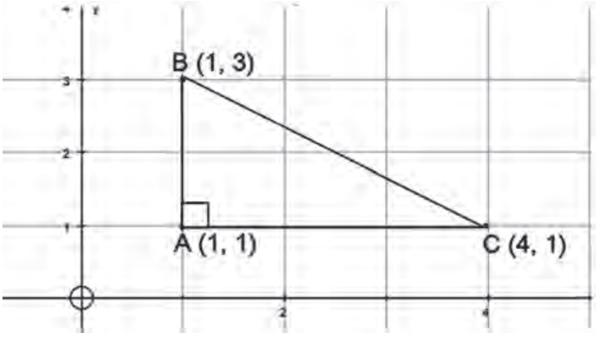


Gambar 9.8 Posisi mobil dari gedung

Dari Gambar 9.8, kita memfokuskan perhatian terhadap segitga AOT dan segitiga BOT. Perhatikan segitiga TAO, kemudian tentukan panjang AO dengan menggunakan perbandingan tangen (Definisi 8.4 tentang perbandingan trigonometri). Selanjutnya untuk menentukan BO gunakan juga perbandingan tangen. Jarak antara kedua mobil dapat diperoleh dengan menerapkan teorema Phytagoras.

Contoh 9.2

Perhatikan posisi titik titik berikut ini!



Gambar 9.9 Koordinat titik *A*, *B*, dan *C*

Jarak antara titik A (1,1) dan C (4,1) dapat ditentukan melalui formula,

$$AC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-1)^2} = 3.$$

Dengan cara yang sama, kamu dapat menunjukkan panjang segmen garis AB dan BC, yaitu 2 dan $\sqrt{13}$.
Tentunya panjang ketiga segmen AB, BC, dan AC memenuhi Teorema Phytagoras. (Silahkan tunjukkan!).
Dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan.

Rumus 9.1

Titik A, B, dan C adalah titik-titik sudut segitiga ABC dan siku-siku di A, maka jarak antara titik B dan C adalah:

$$BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2}$$

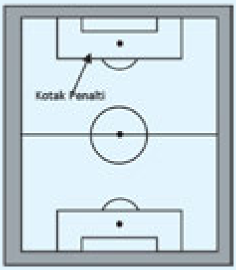
c. Jarak Titik ke Garis

Seperti diuraikan di awal bab ini, kamu pasti sudah mengetahui kedudukan titik terhadap garis. Terdapat dua kemungkinan titik pada garis, yaitu titik terletak pada garis atau titik berada di luar garis. Titik dikatakan terletak pada garis, jika titik tersebut dilalui oleh garis. Dalam hal ini, jarak titik ke garis adalah nol. Dari Gambar 9.10, kita dapat melihat bahwa titik *A* dan *B* terletak pada garis *g*. Titik *A* dan titik *B* dikatakan sebagai titik yang segaris atau *kolinear*.

Gambar 9.10 Titik terletak pada garis

Untuk selanjutnya mari kita cermati kemungkinan jarak titik yang tidak terletak pada suatu garis, dengan kata lain kita akan mengkaji jarak titik terhadap garis dengan kegiatan dan permasalahan berikut.

Masalah-9.4

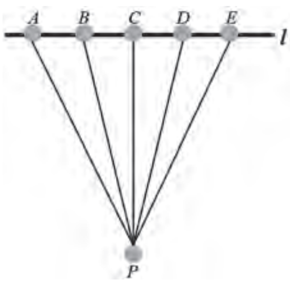


Gambar 9.11 Lapangan sepakbola

Bentuklah tim kelompokmu, kemudian pergilah ke lapangan sepakbola yang ada di sekolahmu. Ambil alat ukur sejenis meteran yang digunakan untuk mengukur titik penalti terhadap garis gawang. Ukurlah jarak antara titik penalti terhadap titik yang berada di garis gawang, lakukan berulang-ulang sehingga kamu menemukan jarak minimum antara titik penalti dengan garis gawang tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Jika dimisalkan titik penalti adalah titik *P* dan garis gawang merupakan garis lurus *l*. Tentukanlah beberapa titik yang akan diukur, misalkan titik-titik tersebut adalah *A*, *B*, *C*, *D*, dan *E*. Kemudian ambil alat ukur sehingga kamu peroleh jarak antara titik *P* dengan kelima titik tersebut. Isilah hasil pengukuran kamu pada tabel yang tersedia.

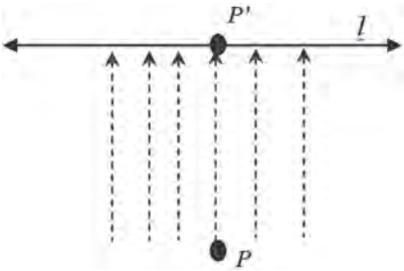


Gambar 9.12 Jarak titik

Tabel 8.1 Jarak Titik Penalti

Titik	Jarak
P dan *A*	
P dan *B*	
P dan *C*	
P dan *D*	
P dan *E*	

Apakah panjang ruas garis PA, PB, PC, PD, PE, adalah sama? Menurutmu, bagaimana menentukan jarak dari titik P ke garis l? Apa yang dapat kamu simpulkan?



Gambar 9.13 Projeksi titik *P* pada garis *l*

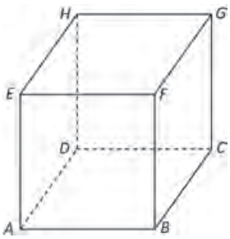
Sekarang, coba kamu bayangkan ada cahaya yang menyinari titik P tepat di atasnya. Tentu saja akan diperoleh bayangan titik P pada garis, yaitu P'. Untuk itu kita dapat mengatakan bahwa panjang PP' merupakan jarak titik P ke garis l . Sedangkan, P' merupakan projeksi titik P pada garis l. Jadi, jarak titik P ke garis l adalah PP'.

Contoh 9.3

Diketahui kubus $ABCD.EFGH$. Tentukan projeksi titik A pada garis

a. CD!

b. BD!

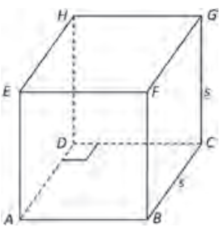


Gambar 9.14 Kubus *ABCDEFGH*

Alternatif Penyelesaian

a. Projeksi titik A pada garis CD

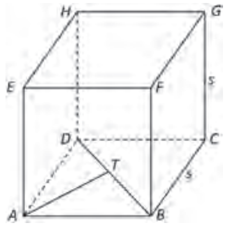
Jika dari titik A ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis CD maka diperoleh titik D sebagai hasil projeksinya ($AD \perp CD$).



Gambar 9.15 Projeksi titik *A* pada garis *CD*

b. Proyeksi titik A pada garis BD

Jika dari titik A ditarik garis yang tegak lurus terhadap segmen garis BD maka diperoleh titik T sebagai hasil proyeksinya ($AT \perp BD$).



Gambar 9.16 Proyeksi titik *A* pada garis *BD*

Contoh 9.4

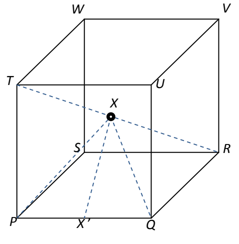
Sebuah kubus $PQRS.TUVW$, panjang rusuknya 4 cm. Titik X terletak pada pusat kubus tersebut, seperti yang disajikan pada Gambar 9.17.

♦ Mintalah penjelasan dari gurumu tentang arti titik pusat kubus (bangun ruang).

Hitunglah:

i. Jarak antara titik R dan X

ii. Jarak antara titik X dan garis PQ



Gambar-9.17: Kubus *PQRS.TUVW* dengan *X* titik tengah *TR*

Alternatif Penyelesaian

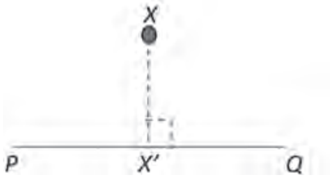
Diketahui panjang rusuk kubus $a = 4$ cm.

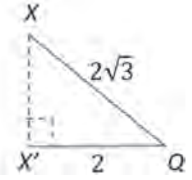
i. Karena X adalah titik tengah ruas garis RT, maka jarak $RX = \frac{1}{2}RT$. RT merupakan diagonal ruang kubus sehingga berdasarkan sifat kubus, panjang diagonal ruang kubus adalah $a\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ sehingga,

$$
\begin{aligned}
RX &= \frac{1}{2}RT \\
&= \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Diperoleh, jarak titik R ke X adalah $2\sqrt{3}$ cm.

ii. Perhatikan gambar berikut.





Jarak antara X dan PQ adalah panjang ruas garis XX'. Dengan menggunakan segitiga siku-siku $XX'Q$, kita akan menentukan panjang XX'.

$X'Q = \frac{1}{2}PQ = 2$, sementara $XQ = \frac{1}{2}QW = 2\sqrt{3}$ sehingga

$$
\begin{aligned}
XX' &= \sqrt{(XQ)^2 - (X'Q)^2} \\
&= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} \\
&= \sqrt{12 - 4} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Jadi, jarak antara titik X ke PQ adalah $2\sqrt{2}$cm.

d. Jarak Titik Ke Bidang

Dalam satu bidang, kita dapat menemukan titik-titik dan membentuk garis. Mari kita cermati masalah berikut ini yang terkait dengan masalah jarak titik terhadap suatu bidang.

Masalah-9.5

Perhatikan gambar berikut ini.

Gambar 9.18 Seorang pemanah sedang melatih kemampuan memanah

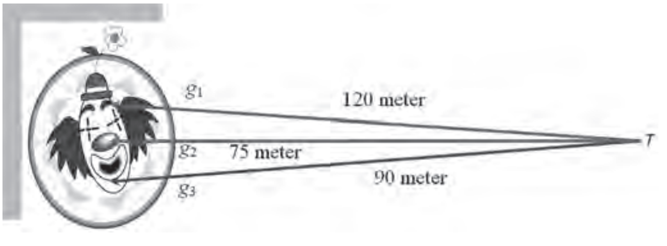
Edo, seorang atlet panahan, sedang mempersiapkan diri untuk mengikuti satu pertandingan besar tahun 2012. Pada satu sesi latihan di *sport center*, mesin pencatat kecepatan menunjukkan, kecepatan anak panah 40 m/det, dengan waktu 3 detik, tetapi belum tepat sasaran.

Oleh karena itu, Edo, mencoba mengganti jarak posisi tembak semula terhadap papan target sedemikian sehingga mampu menembak tepat sasaran, meskipun kecepatan dan waktu berubah sesuai dengan perubahan jarak.

Berapakah jarak minimal posisi Edo terhadap target?

Alternatif Penyelesaian

Tentunya, lintasan yang dibentuk anak panah menuju papan target berupa garis lurus. Keadaan tesebut dapat kita ilustrasikan sebagai berikut.



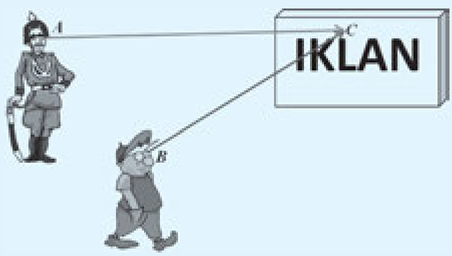
Kondisi awal, jarak antara posisi Edo terhadap papan target dapat diperoleh dari rumusan berikut.

$$s = v.t \Leftrightarrow 3 \times 40 = 120 \text{ m}.$$

Dari dua hasil pergantian posisi, pada tembakan ketiga, dengan posisi 75 m, Edo berhasil menembak pusat sasaran pada papan target.
Posisi Edo, dapat kita sebut sebagai posisi titik T, dan papan target kita misalkan suatu bidang yang diletakkan dengan p satuan jarak dari titik T.
Cermati garis g_1, walaupun panjang garis tersebut adalah 120 meter, tidak berarti garis tersebut menjadi jarak titik T terhadap papan target. Sama halnya dengan garis g_3, tidak berarti jarak Edo terhadap papan target sebesar 90 meter. Tetapi panjang garis g_2, merupakan jarak titik T terhadap papan target.
Jadi, metode menghitung jarak antara satu objek ke suatu bidang harus membentuk lintasan garis lurus yang tegak lurus terhadap bidang.

Ilustrasi 1

Suatu perusahaan iklan, sedang merancang ukuran sebuah tulisan pada sebuah spanduk, yang akan dipasang sebuah perempatan jalan. Tulisan/ikon pada spanduk tersebut diatur sedemikian sehingga, setiap orang (yang tidak mengalami gangguan mata) dapat melihat dan membaca dengan jelas spanduk tersebut. Ilustrasi keadaan tersebut diberikan pada Gambar 9.19 berikut ini.

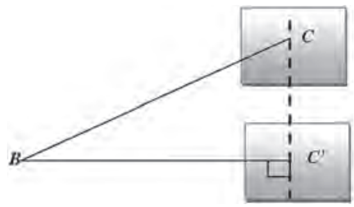


Gambar 9.19 Sudut pandang dua orang terhadap suatu spanduk

Pada Gambar 9.19, jarak titik A terhadap spanduk adalah panjang garis AC, karena garis AC tegak lurus terhadap bidang spanduk. Panjang garis BC bukanlah jarak sesungguhnya jarak si B terhadap spanduk. Untuk menentukan jarak si B terhadap bidang (spanduk), diilustrasikan pada gambar berikut.

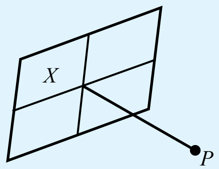
Titik C' merupakan projeksi titik C pada bidang yang sama (spanduk). Jadi jarak sebenarnya titik B terhadap spanduk sama dengan jarak titik B terhadap titik C'.

Jelasnya untuk keadaan ini, teorema Phytagoras berperan untuk menyelesaikan masalah jarak.



Gambar 9.20 Jarak titik *B* ke titik *C*

Definisi 9.2

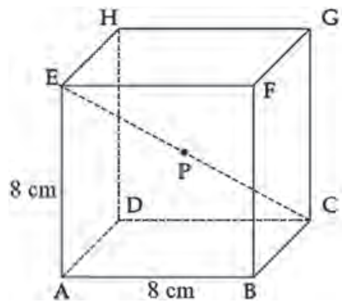


Misalkan X adalah suatu bidang datar dan titik P merupakan sebuah titik yang berada di luar bidang X. Jarak titik P terhadap bidang X merupakan panjang garis tegak lurus dari titik P ke bidang X.

Contoh 9.5

Perhatikan kubus di samping.
Kubus *ABCD.EFGH*, memiliki panjang rusuk 8 cm. Titik P merupakan titik tengah EC.

Hitunglah
a) Jarak antara titik B ke P!
b) Jarak antara titik P ke BC!



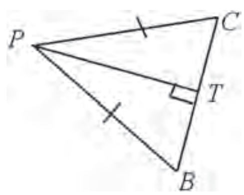
Gambar 9.21 Kubus *ABCD.EFGH* titik *P* titik tengah *EC*

Alternatif Penyelesaian

Cermati gambar kubus di atas. Tentunya, dengan mudah kamu dapat menentukan bahwa panjang $AC = 8\sqrt{2}$ cm , dan panjang diagonal ruang $CE = 8\sqrt{3}$ cm.

a) Karena P merupakan titik tengah EC, maka panjang segmen garis $BP = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}CE = 4\sqrt{3}$ cm.

b) Jarak titik P terhadap BC, berarti kita akan menghitung jarak titik terhadap garis. Lebih jelas kondisi tersebut, cermati segitiga sama kaki BPC pada Gambar 9.22



$PB = PC = 4\sqrt{3}$
$BC = 8$ cm

Gambar 9.22 Segitiga sama kaki *BPC*

Dari Gambar 9.22 di atas berlaku:

$PT^2 = PB^2 - BT^2$

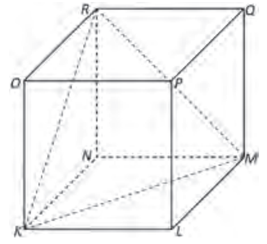
$PT^2 = \left(5\sqrt{3}\right)^2 - (4)^2 = 32$

$PT = 4\sqrt{2}$ cm

- Tentukan jarak titik P terhadap garis BC, dengan menggunakan cara lain. Pastikan hasil yang kamu peroleh sama dengan hasil perkerjaan di atas!

Contoh 9.6

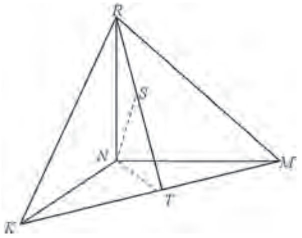
Sebuah kubus *KLMN.OPQR* memiliki panjang rusuk 6 cm. Perhatikan segitiga *KMR*, tentukanlah jarak titik *N* ke bidang *KMR*



Gambar 9.23 Kubus ***KLMN.OPQR***

Alternatif Penyelesaian

Untuk memudahkan kita menyelesaikan persoalan di atas, ada baiknya kita mendeskripsikan sebagai berikut.



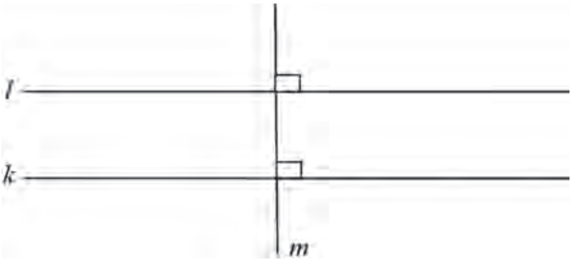
$$KM = 6\sqrt{2}\text{ cm}$$
$$RT = 3\sqrt{6}\text{ cm}$$
$$NT = 3\sqrt{2}\text{ cm}$$

Sekarang, cermati bahwa segitiga *NTR* menjadi bidang penghubung menentukan panjang titik *N* ke bidang *KMR*, yaitu *NS*. Dengan menggunakan perbandingan panjang rusuk segitiga, maka berlaku:

$$NT.NR = RT.NS \Leftrightarrow 3\sqrt{2}.6 = 3\sqrt{6}.NS, \text{ sehingga diperoleh: } NS = 2\sqrt{3}\text{ cm.}$$

e. Jarak antara Dua Garis dan Dua Bidang yang Sejajar

Mari kita cermati gambar berikut ini.



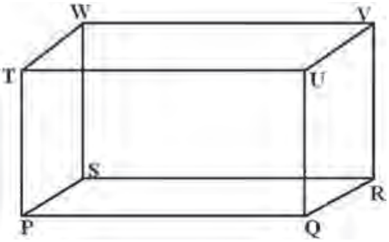
Gambar 9.24 Dua garis sejajar, *k* dan *l* dipotong secara tegak lurus oleh garis *m*

Garis *k* dan *l* dikatakan sejajar jika jarak antara kedua garis tersebut selalu sama (konstan), dan jika kedua garis tidak berhimpit, maka kedua garis tidak pernah berpotongan meskipun kedua garis diperpanjang. Sekarang kita akan memperhatikan rusuk-rusuk yang sejajar dalam suatu bangun ruang.

Misalnya, Balok *PQRS.TUVW* pada Gambar 9.25, semua rusuk pasangan rusuk yang sejajar pasti sama panjang. Misalnya, rusuk *PQ* sejajar dengan *RS*, yang terletak pada bidang *PQRS*.

Lebih lanjut, bidang *PSTW* sejajar dengan bidang *QRVU*, dan jarak antara kedua bidang tersebut adalah panjang rusuk yang menghubungkan kedua bidang.

Rusuk *PQ* memotong rusuk *QU* dan *QR* secara tegak lurus, maka sudut segitiga *PQR* adalah 90°.



Gambar 9.25 Balok *PQRS.TUVW*

Uji Kompetensi 9.1

1 Diketahui kubus *PQRS.TUVW* dengan panjang rusuk 5 cm. Titik *A* adalah titik tengah RT. Hitunglah jarak antara
   a. titik *V* dan titik *A*!
   b. titik *P* dan *A*!
   c. titik *A* dan garis *SQ*!
   d. titik *Q* dan garis *RW*!
   e. titik *P* dan garis *RT*!

2. Diketahui balok *ABCD.EFGH* dengan *AB* = 4 cm, *BC* = 8 cm, dan *BF* = 10 cm. Hitunglah jarak antara
   a. titik *B* dan bidang *ACGE*!
   b. titik *G* dan bidang *CDEF*!

3. Garis *AB* dan *CD* sejajar dan berjarak 4 satuan. misalkan *AD* memotong *BC* di titik *P* di antara kedua garis. Jika *AB* = 4 satuan luas dan *CD* =12 satuan, berapa jauh titik *P* dari garis *CD*?

4. Diberikan persegi panjang *PQRS*. titik *Q* terletak di dalam *PQRS* sedemikian rupa sehingga *OP* = 3 cm, *OQ* = 12 cm. panjang *OR* adalah …

5. Tentukan jarak antara titik R dengan bidang *PWU* pada kubus *PQRS.TUVW*! Panjang rusuk kubus 12 cm.

6. Balok *ABCD.PQRS* memiliki rusuk alas *AB* = 4 cm, *BC* = $3\sqrt{2}$ cm, dan rusuk tegak *AP* = $2\sqrt{6}$ cm. Tentukan
   a. jarak antara *QR* dan *AD*!
   b. jarak antara *AB* dan *RS*!

7. Pada balok *ABCD EFGH*, *X* merupakan jarak *C* ke *BD* dan α merupakan sudut antara bidang *BDG* ke bidang *ABCD*. Tentukanlah jarak *C* terhadap bidang *BDG*!

8. Diberikan sebuah Bangun bidang empat beraturan *T.PQR* dengan panjang rusuk 4 cm dan titik *A* merupakan titik tengah TC, dan titik *B* merupakan titik tengah *PQ*. Tentukan panjang *AB*!

9. Diberikan sebuah kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 6 cm. T merupakan titik tengah BC. Tentukanlah jarak titik T ke garis AH!

10. Diberikan sebuah kubus $PQRS.TUVW$ dengan panjang rusuknya 4 cm. tentukan panjang proyeksi QV pada bidang $PRVT$!

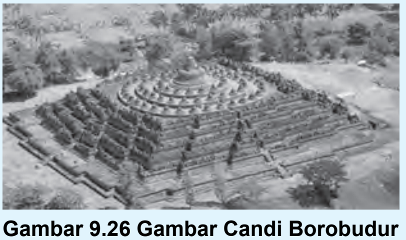
Projek

Himpunlah permasalahan teknik bangunan, ekonomi, dan masalah nyata di sekitarmu yang melibatkan titik, garis, bangun datar dan bangun ruang. Selidikilah sifat-sifat geometri di dalam permasalahan tersebut dan ujilah kebenarannya. Buatlah laporan hasil kerja kelompokmu dan sajikan di depan kelas.

2. Menemukan Konsep Sudut pada Bangun Ruang

Jika kita memperhatikan sudut yang dibentuk oleh rusuk-rusuk pada kubus dan balok, semua sudut yang terbentuk adalah sebesar 90°, atau sudut siku-siku. Selanjutnya, pada subbab ini, kita akan mengkaji sudut yang terbentuk pada bangun lain misalnya limas atau kerucut.
Mari kita cermati masalah di bawah ini.

Masalah-9.6



Gambar 9.26 Gambar Candi Borobudur

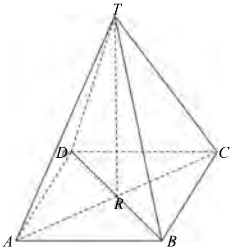
Candi Borobudur merupakan salah satu aset budaya Indonesia yang berharga dan terkenal. Mungkin, tujuan parawisata ini bukanlah sesuatu hal yang baru bagi kamu. Tetapi, tahukah kamu ukuran candi tersebut? Ternyata, luas bangunan candi adalah 123 m × 123 m dengan tinggi bangunan 34,5 m dan memiliki 1460 relief, 504 Arca Buddha, serta 72 stupa. Candi Borobudur memiliki 10 tingkat (melambangkan sepuluh tingkatan *Bodhisattva* yang harus dilalui untuk mencapai kesempurnaan menjadi Buddha) terdiri dari 6 tingkat berbentuk bujur sangkar, 3 tingkat berbentuk bundar melingkar, dan sebuah stupa utama sebagai puncaknya. Tentukan besar sudut yang dibentuk sisi miring dari dasar ke puncak candi.

Alternatif Penyelesaian

Jika kita mengamati kerangkanya, candi tersebut berbentuk limas persegi, seperti yang diilustrasikan berikut ini.

Karena alas Candi Borobudur berbentuk persegi, maka panjang $AB = BC = CD = AD = 123$ m, dan tinggi candi, yaitu 34,5 m atau $TR = 34,5$ m.

Garis tinggi TR memotong diagonal AC dan DB secara tegak lurus. Oleh karena itu, pada segitiga TAR berlaku $TR^2 + AR^2 = TA^2$, dengan $AR = \dfrac{123\sqrt{2}}{2}$ m dan $TR = 34,5$ m, sehingga diperoleh:



Gambar 9.27 Limas *T.ABCD*

$$TA^2 = \left(\frac{123\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (34,5)^2$$

$$TA^2 = 11346.75 + 1190,25 = 12537$$

$$TA = \sqrt{12537} = 111,968 \approx 112 \text{ m.}$$

Karena bidang $ABCD$ merupakan persegi, berlaku bahwa $TA = TB = TC = TD = 112$ m. Selanjutnya, untuk menentukan besar sudut yang dibentuk oleh TA terhadap bidang alas, mari kita perhatikan segitiga TAR. Dengan menggunakan perbandingan cosinus, berlaku

$$\cos A = \frac{AR}{TA} = \frac{61,5\sqrt{2}}{112} = 0,77.$$

Dengan menggunakan kalkulator atau tabel trigonometri, nilai arccos $A = 39,5°$.
Jelasnya besar sudut TAR, TBR, TCR , dan TDR adalah sama besar, yaitu 39,5°.
Jadi, sudut kemiringan yang dibentuk sisi miring dari dasar candi ke puncak candi adalah sebesar 39,5°.
Sedangkan besar sudut yang terbentuk di puncak candi, dapat kita tentukan dengan menentukan besar sudut ATR pada segitiga siku-siku TAR. Dengan menggunakan perbandingan tangen, dinyatakan

$$\tan \angle ATR = \frac{AR}{TR} = \frac{61,5\sqrt{2}}{34,5} = 2,52.$$

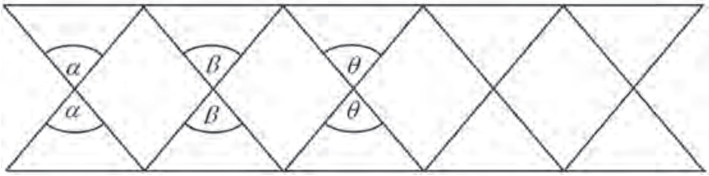
Nilai arctan $\angle ATR = 68,35°$.
Jelasnya, besar $\angle BTR = \angle CTR = \angle DTR \approx 68,35°$.
Jadi besar sudut dipuncak candi merupakan $\angle ATC$ atau besar $\angle BTD$, yaitu sebesar $2.(\angle ATR) = 136,7°$.

Perhatikan Ilustrasi berikut!

Gambar di samping menunjukkan kondisi sebuah jembatan dengan kerangka besi.

Susunan besi-besi pada jembatan membentuk sudut-sudut. Jika keadaan tersebut, ditungkan dalam kajian geometris, sudut-sudut terbentuk diilustrasikan sebagai berikut.

Gambar 9.28 Jembatan dengan tiang penyangga besi

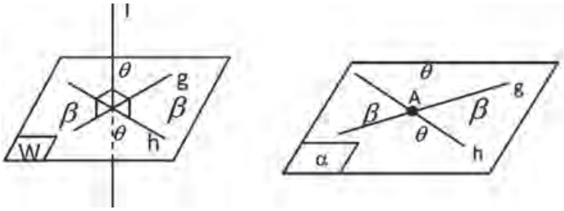


Gambar 9.29 Ilustrasi beberapa dua garis berpotong menghasilkan sudut yang sama besar

Pada satu bidang, hasil perpotongan dua garis, menghasilkan dua sudut yang masing-masing besarnya sama. Hubungan kedua sudut yang sama besar ini disebut dua sudut yang bertolak belakang.

Secara umum, dapat kita tuliskan sifat-sifat sudut yang dihasilkan dua garis dalam bidang sebagai berikut.

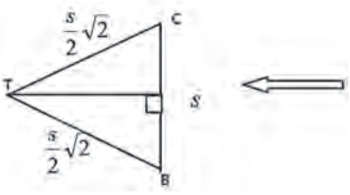
> **Sifat dua garis dalam satu bidang yang sama**
> Misalkan garis *k* dan garis *l* berpotongan pada bidang yang sama, maka pasangan sudut yang dihasilkan (ada dua pasang) besarnya sama.

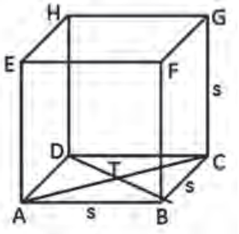


Contoh 9.7

Tentukanlah besar sudut yang dibentuk diagonal bidang *ABCD* pada suatu kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *s* cm.

Alternatif Penyelesaian





Cermati segitiga BTC, dengan menggunakan perbandingan sinus (Definisi 8.4)bahwa:

$$\sin B = \frac{TS}{TB} = \frac{\frac{1}{2}s}{\frac{s}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Maka arcsin $B = 45°$, artinya besar sudut $B = 45°$. Karena $TB = TC$, maka besar sudut $C = 45°$. Akibatnya, besar sudut $BTC = 90°$.

Meskipun terdapat 4 segitiga yang terbentuk pada bidang alas kubus $ABCD.EFGH$, kondisinya berlaku sama untuk setiap sudut yang terkait titik perpotongan diagonal bidang $ABCD$.

a. Sudut antara Dua Garis dalam Ruang

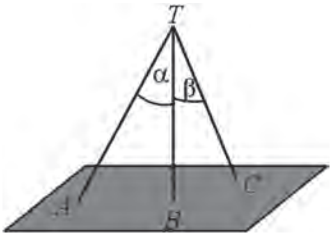
Ilustrasi 2

Satu tim pramuka membuat tiang bendera dari tiga tongkat dan tali pandu. Tiang bendera tersebut disambung dan diikat menjadi sebuah tiang. Tiang tersebut berdiri tegak dengan bantuan tali yang diikat pada tongkat dan ditarik dengan kuat ke pasak yang sudah ditancapkan ke tanah ketiga arah. Perhatikan Gambar 9.30.

Gambar 9.30 Tiang bendera

Mari kita misalkan tiang bendera dan tali tersebut adalah sebuah garis. Gambar di atas dapat kita sketsa kembali dengan lebih sederhana. Perhatikan Gambar 9.31.

TB adalah tiang bendera dengan TC dan TA adalah tali pandu. Dari Gambar 9.31, jelas kita lihat bahwa sudut yang dibentuk oleh *TB* dan *TA* adalah α dan sudut yang dibentuk oleh *TB* dan *TC* adalah β.

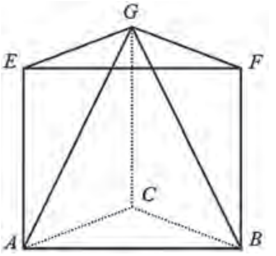


Gambar 9.31 Sudut antar 2 garis

Contoh 9.8

Sebuah prisma segitiga *ABC.EFG* dengan alas berupa segitiga sama sisi *ABC* dengan sisi 6 cm dan panjang rusuk tegak 10 cm. Tentukanlah besar sudut yang dibentuk:

a. Garis *AG* dan garis *BG*!
b. Garis *EG* dan garis *GF*!



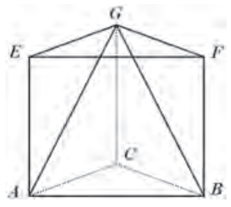
Gambar 9.32 Prisma segitiga *ABC.EFG*

Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan Gambar 9.31

$AB = BC = AC = 6$ cm

$AE = BF = CG = 10$ cm



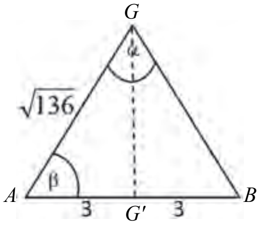
Perhatikan segitiga *AEG* siku-siku di *E* sehingga dengan teorema Phytagoras:

$$AG = \sqrt{AE^2 + EG^2}$$

$$AG = \sqrt{100 + 36}$$

$$AG = \sqrt{136}$$

Perhatikan segitiga sama kaki *AGB*.



Dengan perbandingan nilai cosinus, diperoleh:

$$\cos\beta = \frac{AG'}{AG} = \frac{3}{\sqrt{136}}$$

$$= 0{,}257247878$$

$$\beta = \arccos 0{,}257247878$$

$$\approx 75{,}09°$$

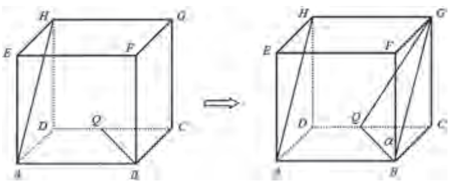
Karena Δ*ABG* adalah segitiga sama kaki, maka nilai α adalah sebagai berikut.

$\angle AGB = \alpha = 180 - 2\ \angle GAB$
$= 180 - 2\beta$
$= 180 - 2(75{,}09)$
$= 180 - 150{,}18$
$\approx 29{,}82$

Berarti besar sudut α adalah 29,82°.
Sebagai latihanmu kerjakanlah butir (b).

Contoh 9.9

Perhatikan gambar! Pada balok *ABCD.EFGH*, titik *Q* di tengah *CD*. Jika panjang *AB* = 12 cm, *BC* = 8 cm dan *CG* = 8 cm. Berapakah besar sudut antara garis *AH* dan *BQ*?



Gambar 9.33 Kubus ***ABCD.EFGH***

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar!

Untuk mendapatkan sudut yang dibentuk oleh garis *AH* dan *BQ*, kita perlu menggeser garis *AH* sepanjang rusuk *EF* sehingga garis *AH* dapat diwakili garis *BG*. Sudut yang dibentuk adalah α.

Perhatikan segitiga *BCQ*, siku-siku di *C*; $BC = 8$; $CQ = 6$ sehingga dengan teorema Phytagoras diperoleh.

$$BQ = \sqrt{BC^2 + CQ^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

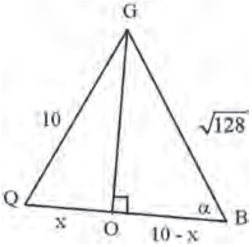
Perhatikan segitiga *BFG*, siku-siku di *F*; $BF = 8$; $FG = 8$ sehingga dengan teorema Phytagoras diperoleh.

$$BG = \sqrt{BF^2 + FG^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128}$$

Perhatikan segitiga *QCG*, siku-siku di *C*; $CG = 8$; $CQ = 6$ sehingga dengan teorema Phytagoras diperoleh.

$$QG = \sqrt{QC^2 + CG^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

Perhatikan segitiga *QBG* dengan α adalah sudut garis *QB* dan *BG*.
Dengan teorema phytagoras pada segitiga siku-siku *QOG* dan *BOG*,



$$\sqrt{QG^2 - QO^2} = \sqrt{BG^2 - BO^2}$$
$$\sqrt{100 - x^2} = \sqrt{128 - (10 - x)^2}$$
$$100 - x^2 = 128 - (10 - x)^2$$
$$100 - x^2 = 128 - 100 + 20x - x^2$$
$$100 = 28 + 20x$$
$$72 = 20x \text{ atau } x = 3,6$$

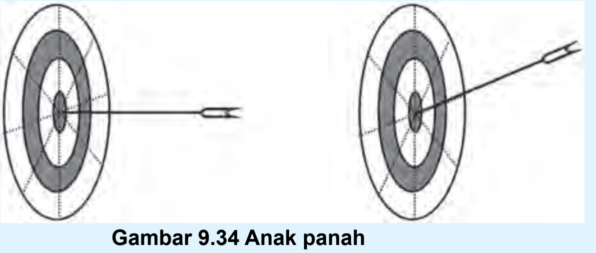
Perhatikan segitiga *BOG* siku-siku di *O*, sehingga:

$$\cos\alpha = \frac{10 - x}{\sqrt{128}} = \frac{6,4}{\sqrt{128}} \approx 0,57 \text{ atau } \alpha = \text{arccos } (0,57) = 55,55^{\circ}.$$

b. Sudut antara Garis dan Bidang pada Bangun Ruang

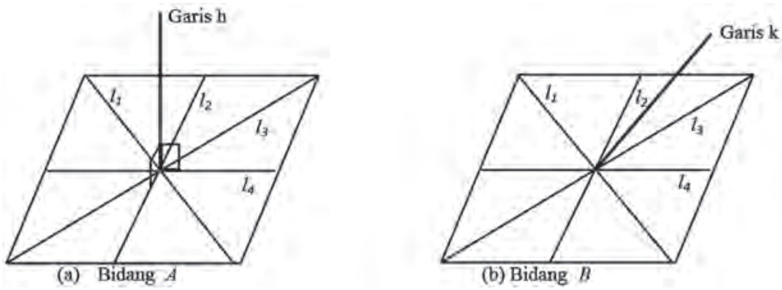
Ilustrasi 3

Dua orang pemanah sedang latihan memanah di sebuah lapangan. Kedua pemanah tersebut berhasil memanah tepat pada sasaran. Masing-masing anak panah menancap tepat di pusat sebuah bidang sasaran seperti pada Gambar 9.34 berikut!



Gambar 9.34 Anak panah

Bagaimana pengamatanmu? Tentu, kita mengatakan kedua anak panah menancap tepat pada sasaran. yaitu pada pusat bidang. Tetapi, coba kamu perhatikan posisi kedua anak panah tersebut terhadap bidang. Posisi kedua anak panah tersebut tentu sangat berbeda. Mari kita misalkan anak panah tersebut adalah sebuah garis dan papan target anak panah adalah sebuah bidang (sebut bidang *A* dan *B* serta garis *h* dan *k*) sehingga kita ilustrasikan kembali posisi anak panah tersebut seperti gambar berikut.

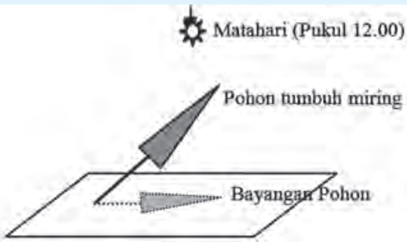


Gambar 9.35 Perpotongan garis dengan bidang di satu titik

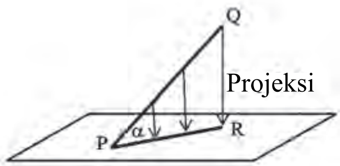
Dengan demikian, anak panah yang menancap pada bidang adalah sebuah ilustrasi bahwa sebuah garis dapat memotong sebuah bidang di satu titik. Perhatikan Gambar 9.35 (a), garis h selalu tegak lurus terhadap semua garis yang ada pada bidang, sehingga garis h disebut tegak lurus terhadap bidang. Garis yang tegak lurus pada bidang, kita sebut membentuk sudut 90° terhadap bidang. Perhatikan Gambar 9.35 (b). Garis k tidak tegak lurus terhadap bidang atau garis k tidak membentuk sudut 90° terhadap bidang tetapi membentuk sudut yang lain dengan bidang. Dapatkah kamu menentukan besar sudut yang tersebut? Mari kita pelajari ilustrasi berikut.

Ilustrasi 4

Perhatikan gambar!



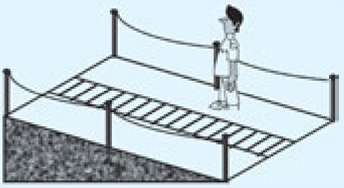
Gambar 9.36 Bayangan pohon miring



Gambar 9.37 Proyeksi *PQ* ke bidang

Sebuah pohon tumbuh miring di sebuah lapangan. Pada siang hari pada pukul 12.00, matahari akan bersinar tepat di atas pohon tersebut sehingga bayangan pohon tersebut merupakan projeksi orthogonal pada lapangan. Misalkan garis PQ adalah pohon sehingga projeksi PQ adalah PR seperti gambar. Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh PQ dengan bidang adalah sudut yang dibentuk oleh garis PQ dengan proyeksinya pada bidang tersebut yaitu sudut QPR. Pada Gambar 9.37 disebut sudut α.

Masalah-9.7



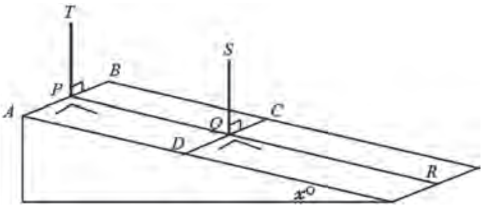
Gambar 9.38 Bidang miring

Perhatikan tangga berikut. Seorang bapak sedang berdiri di tangga dengan kemiringan x^0. Dapatkah kamu tentukan sudut yang dibentuk oleh badan bapak tersebut dengan bidang miring?

Alternatif Penyelesaian

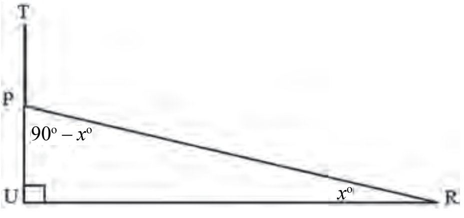
Mari kita sederhanakan sketsa bidang miring tersebut.

Misalkan *PT* atau *QS* adalah tinggi badan bapak tersebut. Kita ambil garis *AB* sehingga *PT* tegak lurus dengan *AB* dan garis *DC* sehingga *QS* tegak lurus dengan *DC*.



Gambar 9.39 Sketsa sederhana bidang miring 1

Perhatikan juga bahwa garis *PR* terletak pada bidang sehingga *PR* tegak lurus dengan *PT* ataupun pada *QS*. Dengan demikian garis *PR* akan mewakili bidang miring tersebut. Sudut yang dibentuk badan bapak tersebut dengan permukaan bidang miring akan diwakili oleh sudut yang dibentuk oleh garis *PT* dengan garis *PR*. Kita sederhanakan kembali sketsa di atas.



Gambar 9.40 Sketsa sederhana bidang miring

Perhatikan segitiga *PUR* dengan siku-siku di *U* atau sudut *U* adalah 90°.

$\angle UPR + \angle PUR + \angle PRU = 180°$

$\angle UPR + 90° + x° = 180°$

$\angle UPR = 90° - x°$

Perhatikan bahwa sudut *TPR* adalah pelurus dengan sudut *UPR* sehingga:

$\angle TPR + \angle UPR = 180°$

$\angle TPR + 90° - x° = 180°$

$\angle TPR = 90° + x°$

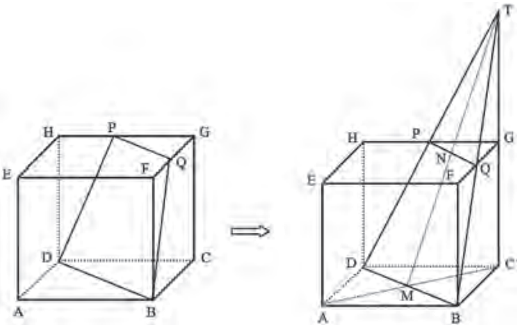
Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh badan bapak tersebut dengan permukaan bidang miring adalah $90° + x°$.

Contoh 9.10

Pada kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk 12 cm. Titik *P* di tengah rusuk *GH* dan titik *Q* di tengah *FG*. Tentukanlah sudut antara garis *CG* dengan bidang *BDPQ*.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar di bawah ini!



Gambar 9.41 Kubus *ABCD.EFGH*

Jika kita perpanjang garis *BQ*, *CG*, dan *DP* maka ketiga garis akan berpotongan di satu titik *T*. Perhatikan segitiga sama kaki *TBD*. *TM* adalah garis tinggi.
Kamu tentu masih ingat konsep kesebangunan bukan. Perhatikan kesebangunan antara segitiga *TBC* dengan segitiga *TQG*, yaitu:

$$\frac{TG}{TC}=\frac{GQ}{CB} \text{ atau } \frac{TG}{TG+GC}=\frac{GQ}{CB} \Leftrightarrow \frac{TG}{TG+12}=\frac{6}{12}$$

$$\Leftrightarrow 2TG = TG + 12$$

$$\Leftrightarrow TG = 12$$

Perhatikan segitiga ABC, siku-siku di B

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2} \quad \text{atau} \quad AC = \sqrt{12^2+12^2}$$

$$AC = \sqrt{12^2\times 2}$$

$$AC = 12\sqrt{2}$$

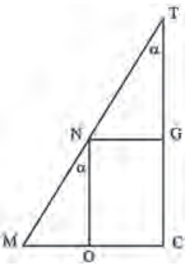
$$\text{sehingga } CM=\frac{AC}{2}=6\sqrt{2}$$

Perhatikan segitiga *TCM*, siku-siku di *C*

$$TM = \sqrt{TC^2 + CM^2} \text{ atau } TM = \sqrt{(24)^2 + (6\sqrt{2})^2}$$

$$TM = \sqrt{576 + 72}$$

$$TM = \sqrt{648}$$



Perhatikan segitiga *TBD* berpotongan dengan garis *TC* di titik *T* sehingga sudut yang dibentuk *TBD* dan garis *TC* adalah α. Kemudian perhatikan segitiga *TCM*, tan $\alpha = \dfrac{MO}{ON} = \dfrac{CM}{TC} \tan\alpha = \dfrac{6\sqrt{2}}{24} = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}$.

Dengan menggunakan kalkulator maka

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) = 19{,}5°$$

Selain dicari dengan tan, coba kamu cari dengan sin dan cos, apakah hasilnya sama?

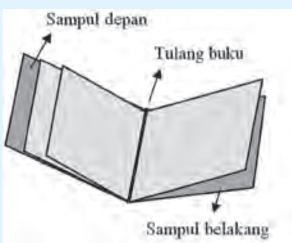
c. Sudut antara Dua Bidang pada Bangun Ruang

Pada sub-bab ini, kita akan mencoba menemukan konsep sudut antara dua bidang pada bangun ruang. Marilah kita mengamati dan mempelajari ilustrasi berikut.

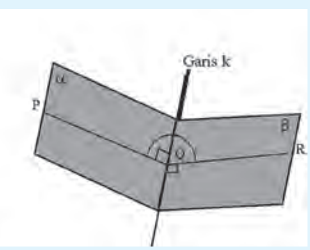
Ilustrasi 5

Perhatikan gambar buku berikut. Sebuah buku terdiri dari beberapa halaman terbuka seperti Gambar 9.42. Kumpulan tersebut sering disebut dengan berkas. Halaman per halaman merupakan bentuk dari sebuah bidang. Misalkan saja, kita ambil sampul buku depan dengan sampul belakang. Kita sebut sampul buku depan adalah bidang α dan sampul buku belakang adalah bidang β. Tentu saja anda sudah mengerti bahwa buku memiliki tulang buku, dan tulang buku tersebut dimisalkan dengan sebuah garis *k*.

Perhatikan gambar.



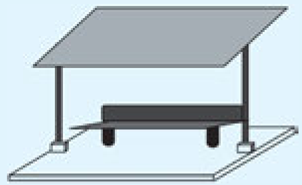
Gambar 9.42 Buku



Gambar 9.43 Berkas atau buku

Berdasarkan gambar di atas, kedua sampul buku berpotongan di tulang buku atau bidang α dan bidang β berpotongan di garis k. Perhatikan bahwa garis PQ tegak lurus dengan garis k dan garis RQ tegak lurus juga dengan garis k. Dengan demikian, sudut yang dibentuk oleh bidang α dan bidang β adalah sudut yang dibentuk oleh garis PQ dan RQ.

Masalah-9.8

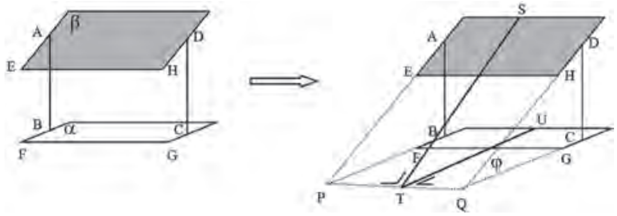


Gambar 9.44 Halte

Sebuah halte berbentuk seperti Gambar 9.44. Jika atap halte dibuat tidak sejajar dengan lantai maka dapatkah anda tentukan sudut yang dibentuk oleh atap dan lantai halte tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Mari kita sederhanakan sketsa gambar tersebut.



Gambar 9.45 Sketsa sederhana halte

Pengamatan kita terfokus pada bidang atap dan lantai. Kita sebut saja bidang lantai adalah bidang α dan bidang β. Karena bidang atap tidak dibangun sejajar maka sudah pasti bahwa kedua bidang pasti berpotongan dan membentuk sudut walaupun secara visual, kedua bidang tidak bersentuhan. Untuk mendapatkan garis perpotongan kedua bidang maka kita dapat memperpanjang rusuk-rusuk kedua bidang. Perhatikan gambar di sebelah kanan anda.

Rusuk AE diperpanjang menjadi AP

Rusuk BF diperpanjang menjadi BP

Rusuk DH diperpanjang menjadi DQ

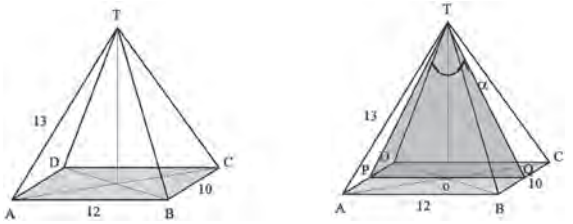
Rusuk CG diperpanjang menjadi CQ

Dari gambar dapat kita lihat, garis PQ adalah perpotongan kedua bidang. Garis ST tegak lurus dengan PQ dan garis UT juga tegak lurus dengan PQ. Dengan demikian, sudut antara bidang α dan bidang β adalah φ.

Contoh 9.11

Sebuah limas $T.ABCD$, dengan panjang $TA = 13$, $AB = 12$, $CD = 10$. Jika α adalah sudut yang dibentuk oleh bidang TAD dengan bidang TBC, tentukanlah besar α.

Alternatif Penyelesaian

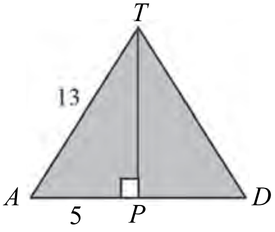


Gambar 9.46 Limas *T*.ABCD

Bidang TAD dan bidang TBC berpotongan pada titik T. Garis tinggi TAD adalah TP dan garis tinggi TBC adalah TQ sehingga sudut yang dibentuk oleh bidang TAD dan bidang TBC diwakili oleh garis tinggi TP dan TQ sehingga sudut yang dibentuk oleh kedua bidang adalah sudut α.

Kemudian, kita akan mencari besar sudut α sebagai berikut.

Perhatikan segitiga TAD.



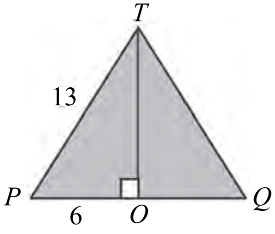
Dengan menggunakan teorema Phytagoras, maka:

$$TP = \sqrt{TA^2 - AP^2}$$

$$TP = \sqrt{13^2 - 5^2}$$

$$TP = \sqrt{144} = 12$$

Perhatikan segitiga TPQ.



Dengan menggunakan perbandingan sinus, maka:

$$\sin \beta = \frac{PO}{TP} = \frac{6}{12}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{2} \text{ atau } \beta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$$

Dengan demikian sudut $\alpha = 2\beta$ atau $\alpha = 60°$.

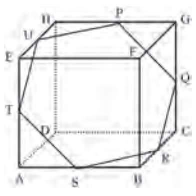
Uji Kompetensi 9.2

1 Sebuah kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *p* cm. Tentukanlah sudut antar bidang *ACH* dengan bidang *ACF*.

2. Pada kubus *ABCD.EFGH*. Jika *AP* adalah perpanjangan rusuk *AB* sehingga *AB* : *BP* = 2 : 1 dan *FQ* adalah perpanjangan *FG* sehingga *FP* : *FG* = 3 : 2 maka tentukanlah jarak antara titik *P* dan *Q*.

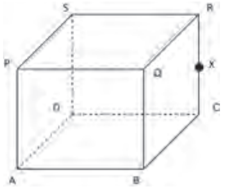
3. Pada kubus *ABCD.EFGH* dengan panjang rusuk *a* cm. Tentukanlah jarak bidang *ACH* dengan bidang *BEG*.

4. Perhatikan gambar berikut.



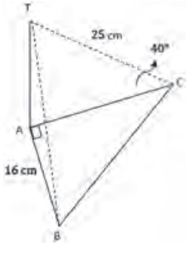
Tentukanlah besar sudut yang dibentuk oleh bidang *PQRSTU* dengan alas *ABCD*. (Rusuk kubus *p* cm, untuk *p* bilangan real positif).

5. Sebuah kubus dengan panjang rusuk 12 cm. Titik *X* berada di tengah rusuk *CR*. Hitunglah:



a. Panjang *AX*
b. Besar sudut antara *AX* dan bidang alas
c. Besar sudut *PXA*
d. Besar sudut antara *BS* dan bidang alas

6. Segitiga *ABC* adalah segitiga yang terletak pada sebuah bidang datar, dengan sudut *BAC* = 90° dan panjang *AB* =16 cm. Titik T terletak tepat di atas titik *A*. Sudut yang terbentuk antara *TC* dan *AC* adalah 40°, panjang *TC* adalah 25 cm.

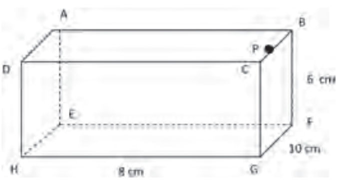


Hitunglah:

a. Sudut yang terbentuk antara TB dan AB
b. Panjang AT
c. Panjang BC

7. Sebuah balok $ABCD.EFGH$ memiliki panjang rusuk-rusuk $AB = 6$ cm, $AD = 8$ cm, $BD = 10$ cm, dan $DH = 24$ cm. Hitunglah
   a. Panjang HB
   b. Besar sudut BDC
   c. Besar sudut antara HB dan bidang $CDHG$
   d. Besar sudut antara HB dan bidang $ABCD$

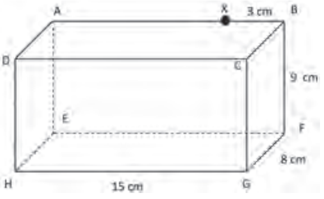
8. Perhatikan gambar balok berikut



Hitunglah :

a. Panjang HP jika P adalah tengah-tengah BC
b. Besar sudut antara HP dan $EFGH$
c. Besar sudut antara HP dan FG
d. Besar sudut antara DF dan bidang $EFGH$

9. Gambar di bawah ini merupakan balok dengan alas $EFGH$, dengan panjang $HG = 15$ cm, $GF = 8$ cm dan $BF = 9$ cm. Titik X berada pada rusuk AB yang berjarak 3 cm dari titik B. Hitunglah besar sudut HXG dan $ABFE$.



10. Sebuah limas berdiri setinggi 26 cm di atas bidang datar dengan alas berbentuk bidang segi enam beraturan yang memiliki panjang rusuk 12 cm. Hitunglah
    a. Panjang rusuk dari piramid
    b. Besarnya sudut antara rusuk piramid dengan alas.

11. Jika diketahui balok $ABCD.EFGH$ dengan $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$ dan $BF = 5$. Tentukanlah besar sudut yang dibentuk bidang $ADHE$ dan bidang BDHF.

12. Pada limas beraturan $T.ABCD$, $TA = TB = TC = TD = \sqrt{3}$ dm dan $ABCD$ adalah persegi dengan sisi dm. Tentukanlah besar sudut antara bidang TAB dan bidang TCD.

13. Seorang pengamat mengamati dua buah perahu dari menara merkusuar. Perahu A bergerak ke arah Barat dengan sudut depresi 35° dan perahu B bergerak ke arah Utara dengan sudut depresi 40°. Jika tinggi merkusuar adalah 85 m dari permukaan laut, tentukan jarak antara kedua perahu tersebut.

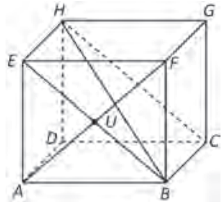
14. Seorang lelaki berdiri di titik B, yang berada di Timur menara OT dengan sudut elevasi 40°. Kemudian ia berjalan 70 m ke arah Utara dan menemukan bahwa sudut elevasi dari posisi yang baru ini, C adalah 25°. Hitunglah panjang OB dan tinggi menara tersebut.

Projek

Perhatikan berbagai objek yang kamu temui di sekelilingmu. Pilihlah minimal tiga objek dan rancang masalah yang pemecahannya menerapkan sifat dan rumus jarak titik ke garis atau jarak titik ke bidang. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Pada kubus *ABCD.EFGH*, berlaku.



1. Titik *E* terletak pada garis *AE*, *EF*, dan *EH*.
2. Garis *EF* terletak pada bidang *ABFE* dan *EFGH*.
3. Titik *E* terletak pada bidang *ABFE*, *AEHD*, *EFGH* yang memuat garis *AE*, *EF*, dan *EH*.
4. Garis *EF* dan garis *CD* adalah dua garis yang sejajar.
5. Garis *AF* dan garis *BE* adalah dua garis yang bersilangan.
6. Garis *EF* dan *CG* adalah dua garis yang saling tegak lurus.
7. Garis *EF* sejajar dengan salah satu garis pada bidang *CDHG*, maka garis *EF* sejajar dengan bidang *CDGH*.
8. Garis *EF* tegak lurus dengan salah satu garis pada bidang *BCGF*, maka garis *EF* tegak lurus dengan bidang *BCGF*.
9. Bidang *ADHE* berpotongan dengan bidang *BCHE*.
10. Bidang *ABFE* berpotongan tegak lurus dengan bidang *ABCD*.
11. Bidang *ABFE* sejajar dengan bidang *CDHG*.
12. Garis *AF* merupakan diagonal bidang *ABFE*
13. Garis *BH* merupakan diagonal ruang kubus *ABCD*, *EFGH*.
14. Bidang *BCHE* merupakan bidang diagonal.
15. $\angle AUE = \angle BUF$ dan $\angle AUB = \angle EUF$.
16. Jarak antara dua titik adalah panjang ruas garis terpendek yang menghubungkan dua titik tersebut.
17. Jarak antara sebuah titik ke sebuah garis adalah jarak titik ke proyeksinya pada garis.
18. Jarak antara sebuah titik ke sebuah bidang adalah jarak titik ke proyeksinya pada bidang.
19. Jarak antara dua garis sejajar adalah jarak salah satu titik di salah satu garis ke garis yang lain.

20. Jarak dua garis bersilangan adalah panjang ruas garis yang tegak lurus pada kedua garis tersebut.
21. Jarak antara dua bidang yang sejajar adalah jarak dari salah satu titik pada bidang yang satu ke bidang yang lain.
22. Sudut antar garis adalah sudut yang terbentuk akibat perpotongan dua garis pada satu titik.
23. Sudut antara garis dengan bidang adalah sudut antara garis tersebut dengan projeksinya pada bidang.
24. Sudut antar bidang adalah sudut yang terbentuk akibat perpotngan dua bidang pada satu garis.

Kita telah mempelajari materi geometri tentang jarak dan sudut antara titik, garis dan bidang serta penerapannya dalam pemecahan masalah nyata. Selanjutnya kita akan membahas materi tentang limit fungsi. Dalam bahasan ini kita akan mempelajari sifat-sifat limit fungsi aljabar yang selanjutnya akan diuraikan dalam pemecahan masalah dan penyelesaian beberapa masalah dengan menggunakan beberapa sifat limit fungsi yang dipelajari.

Bab 10

Limit Fungsi

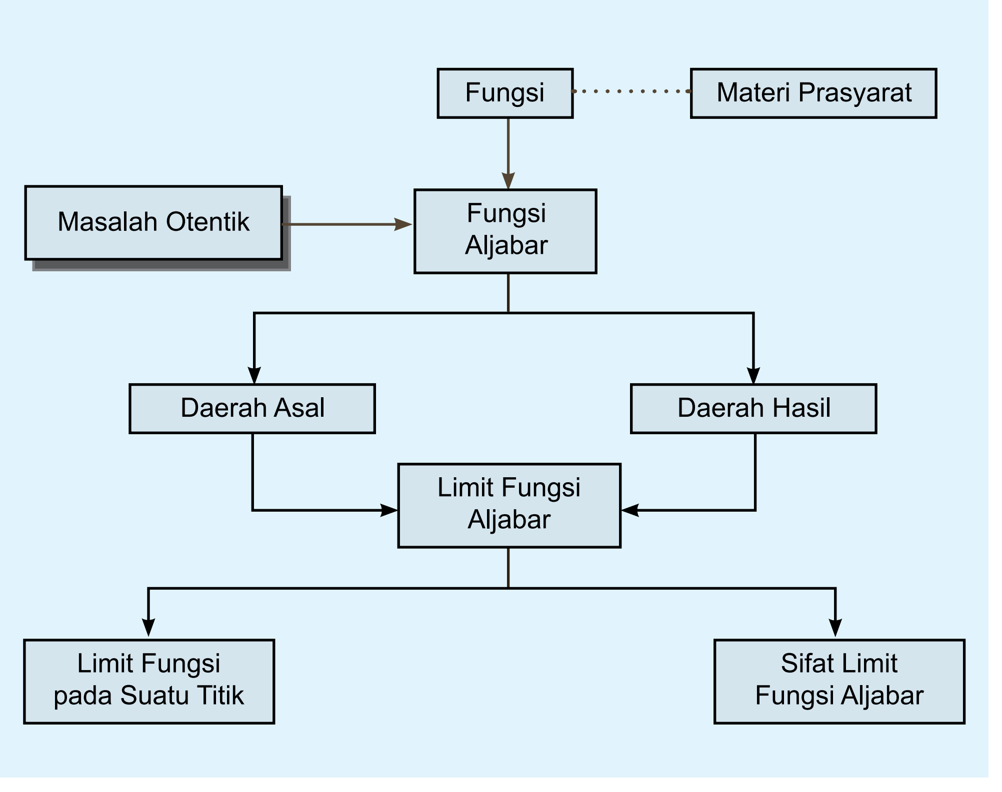
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran limit fungsi, siswa mampu: 1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnya. 2. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 3. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, kritis, dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 4. Menunjukkan sikap bertanggung-jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 5. Mendeskripsikan konsep limit fungsi aljabar dengan menggunakan konteks nyata dan menerapkannya. 6. Merumuskan aturan dan sifat limit fungsi aljabar melalui pengamatan contoh-contoh. 7. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata tentang limit fungsi aljabar.	Melalui pembelajaran materi limit fungsi, siswa memperoleh pengalaman belajar: • berpikir kreatif dan kritis dalam mengamati berbagai permasalahan nyata yang berkaitan dengan limit fungsi. • kerjasama yang solid dalam tim untuk menemukan solusi permasalahan terkait limit fungsi. • menerapkan konsep limit fungsi dalam kehidupan sehari-hari. • Memodelkan permasalahan nyata yang dijumpai dalam kehidupan sehari - hari.

Istilah Penting

- *Limit fungsi*
- *Pendekatan (kiri dan kanan)*
- *Bentuk tentu dan tak tentu*
- *Perkalian sekawan*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Dalam kehidupan sehari-hari, berbagai permasalahan yang kita hadapi dapat melahirkan berbagai konsep matematika. Berdasarkan konsep umum matematika yang diperoleh dari permasalahan tersebut, kita mampu menyelesaikan kembali permasalahan yang serupa. Sebagai contoh, kita melakukan pengamatan terhadap respon tubuh yang sedang alergi terhadap suatu zat dengan tingkat dosis obat antibiotik. Dari data yang kita peroleh, kita dapat memodelkan batas dosis pemakaian antibiotik tersebut. Dengan demikian, masalah alergi yang serupa dapat diatasi bila kembali terjadi. Percobaan yang kita lakukan adalah sebuah konsep pendekatan terhadap solusi permasalahan tersebut. Jadi, konsep dapat kita peroleh dengan mengamati, menganalisis data dan menarik kesimpulan. Perhatikan dan amatilah contoh ilustrasi berikut.

Ilustrasi

Gambar 10.1 Jalan tol

Seorang satpam berdiri mengawasi mobil yang masuk lewat pintu jalan tol. Ia berdiri sambil memandang mobil yang melintas masuk jalan tersebut. Kemudian dia memandang terus mobil sampai melintas di kejauhan jalan tol. Dia melihat objek seakan-akan semakin mengecil seiring dengan bertambah jauhnya mobil melintas. Akhirnya dia sama sekali tidak dapat melihat objek tersebut.

♦ Coba kamu perhatikan Gambar 10.1. Kita melihat bahwa bukan hanya ukuran mobil di kejauhan yang seakan-akan semakin kecil, tetapi lebar jalan raya tersebut juga seakan-akan semakin sempit. Kemudian coba kamu analisis kembali gambar tersebut, secara visual, apakah perbandingan ukuran lebar jalan dengan ukuran mobil tersebut tetap? Berikan komentarmu!

Jika kita analisis lebih lanjut, untuk pendekatan berapa meterkah jauhnya mobil melintas agar penjaga pintu masuk jalan tol sudah tidak dapat melihatnya lagi? Berdiskusilah dengan teman-temanmu!

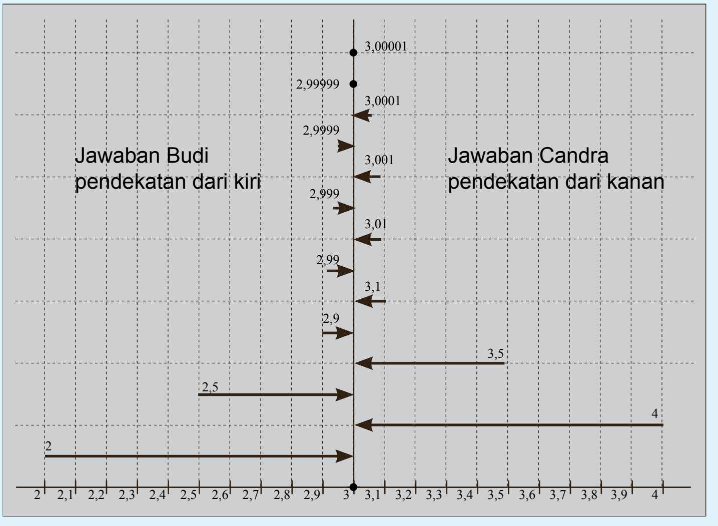
1. Menemukan Konsep Limit Fungsi

Kita akan mencoba mencari pengertian atau konsep pendekatan suatu titik ke titik yang lain dengan mengamati dan memecahkan masalah.

Masalah-10.1

Tiga anak (sebut nama mereka: Ani, Budi dan Candra) sedang bermain tebak angka. Ani memberikan pertanyaan dan kedua temannya akan berlomba memberikan jawaban yang terbaik. Perhatikanlah percakapan mereka berikut.

Ani : Sebutkanlah bilangan real yang paling dekat ke 3?
Budi : 2
Candra : 4
Budi : 2,5
Candra : 3,5
Budi : 2,9
Candra : 3,1
Budi : 2,99
Candra : 3,01
Budi : 2,999
Candra : 3,001
Budi : 2,9999
Candra : 3,0001



Gambar 10.2 Ilustrasi limit sebagai pendekatan nilai

Kedua teman Ani berlomba memberikan jawaban bilangan terdekat ke 3, seperti pada Gambar 10.2. Pada awalnya Budi dan Candra mengambil bilangan yang terdekat ke 3 dari kiri dan kanan sehingga mereka menjawab 2 dan 4. Ternyata masih ada bilangan real lain yang terdekat ke 3, sehingga Budi harus memberi bilangan yang lebih dekat lagi ke 3 dari kiri, maka Budi menyebut 2,5. Hal ini membuat Candra ikut bersaing untuk mencari bilangan lain, sehingga ia menjawab 3,5. Demikianlah mereka terus-menerus memberikan jawaban sebanyak mungkin sampai akhirnya mereka menyerah untuk mendapatkan bilangan-bilangan terdekat ke 3.

Berdasarkan pemahaman kasus ini, ternyata ketidakmampuan teman-teman Ani untuk menyebutkan semua bilangan tersebut telah membuktikan bahwa begitu banyak bilangan real di antara bilangan real lainnya. Jika dimisalkan x sebagai variabel yang dapat menggantikan jawaban-jawaban Budi maka x akan disebut bilangan yang mendekati 3 dari kiri (secara matematika, dituliskan $x \to 3^-$) dan jika

x sebagai variabel yang menggantikan jawaban-jawaban Candra maka x akan disebut bilangan yang mendekati 3 dari kanan (secara matematika, dituliskan $x \to 3^+$). Secara umum, kedua jawaban mereka disebut mendekati 3 atau $x \to 3$.

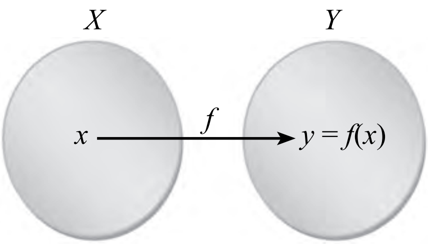
Masalah-10.2

Gambar a　　Gambar b　　Gambar c

Gambar 10.3 Jembatan layang

Sebuah jembatan layang dibangun pada sebuah kota untuk mengatasi masalah kemacetan jalan raya. Setelah pondasi yang kokoh dibangun (Gambar 10.3a), beberapa badan jembatan yang telah dibentuk dengan ukuran tertentu diangkat dan disambungkan satu sama lain pada setiap pondasi yang telah tersedia (Gambar 10.3b) sehingga terbentuk sebuah jembatan layang yang panjang (Gambar 10.3c). Tentu saja kedua badan jembatan yang terhubung mempunyai garis pemisah (Gambar 10.3b).

Jika setiap pondasi merupakan titik-titik pada himpunan X dan badan jembatan merupakan kurva yang dipenuhi oleh fungsi $y = f(x)$ maka hubungan antara pondasi dan badan jembatan merupakan sebuah pemetaan atau fungsi.



Gambar 10.4 Pemetaan

Ingat kembali pengertian sebuah fungsi pada bab V. Misalkan X dan Y adalah himpunan yang tidak kosong, $x \in X$, $y \in Y$, sebuah fungsi f memetakan setiap anggota himpunan X ke tepat satu anggota himpunan Y.

Pilih salah satu pondasi sebagai titik yang akan didekati. Lihat Gambar 10.3b. Kita anggap garis pemisah pada persambungan kedua badan jembatan sebagai ilustrasi $x \neq c$.

Diskusi

Menurut kamu, apakah kedua badan jembatan tersebut mempunyai limit pada persambungan tersebut? Berikanlah komentar kamu! Diskusikanlah komentar kamu tersebut dengan teman kelompok dan gurumu!

Masalah-10.3

Perhatikan masalah berikut.

Gambar 10.5 Lebah

Seekor lebah diamati sedang hinggap di tanah. Pada suatu saat, lebah tersebut diamati terbang membentuk sebuah lintasan parabola. Setelah terbang selama 1 menit, lebah tersebut telah mencapai ketinggian maksimum sehingga ia terbang datar setinggi 5 meter selama 1 menit.
Pada menit berikutnya, lebah tersebut terbang menukik lurus ke tanah sampai mendarat kembali pada akhir menit ketiga.

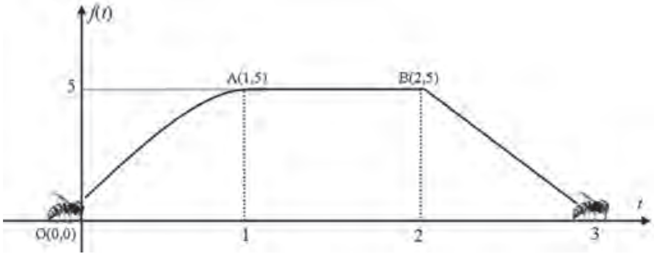
- Coba kamu modelkan fungsi lintasan lebah tersebut!

  Petunjuk:
  - Model umum kurva parabola adalah $f(t) = at^2 + bt + c$, dengan a, b, c bilangan real. (ingat kembali pelajaran fungsi kuadrat pada Bab VII)
  - Model umum kurva linear adalah $f(t) = mt + n$ dengan m, n bilangan real. (ingat kembali pelajaran persamaan linear pada Bab II)
- Amatilah model yang kamu peroleh. Tunjukkanlah pola lintasan terbang lebah tersebut?

  Petunjuk:
  Pilihlah strategi numerik untuk menunjukkan pendekatan, kemudian bandingkan kembali jawaban kamu dengan strategi yang lain.
- Cobalah kamu tunjukkan grafik lintasan terbang lebah tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar dari ilustrasi Masalah 10.3



Gambar 10.6 Ilustrasi gerakan lebah

Jadi, model fungsi lintasan lebah tersebut berdasarkan gambar di atas adalah:

$$f(t)=\begin{cases} at^2+bt+c & \text{jika} \quad 0\le t<1 \\ 5 & \text{jika} \quad 1\le t<2 \\ mt+n & \text{jika} \quad 2\le t\le 3 \end{cases} \quad \text{..............................} \quad (1)$$

dengan a, b, c, m, n bilangan real.
Dari ilustrasi, diperoleh data sebagai berikut.

- Misalkan posisi awal lebah pada saat hinggap di tanah adalah posisi pada waktu $t = 0$ dengan ketinggian 0, disebut titik awal $O(0,0)$,
- Kemudian lebah terbang mencapai ketinggian maksimum 5 meter pada waktu $t = 1$ sampai $t = 2$, di titik $A(1,5)$ dan $B(2,5)$.
- Pada akhir waktu $t = 2$, lebah kembali terbang menukik sampai hinggap kembali di tanah dengan ketinggian 0, di titik $C(3,0)$.

Berdasarkan data tersebut, kita akan menentukan fungsi lintasan lebah, dengan langkah-langkah berikut.

1. Substitusi titik $O(0,0)$ ke fungsi kuadrat $f(t)= at^2 + bt + c$ diperoleh $c = 0$.
2. Substitusi titik $A(1,5)$ ke fungsi kuadrat $f(t)= at^2 + bt + c$ diperoleh $a + b + c = 5$, karena $c = 0$, maka $a + b = 5$.
3. Karena fungsi kuadrat mencapai maksimum pada saat $t = 1$ maka $\dfrac{-b}{2a} = 1$ atau $b = -2a$.
4. Dengan mensubstitusi $b = -2a$ ke $a + b = 5$ maka diperoleh $a = -5$ dan $b = 10$.
5. Jadi, fungsi kuadrat tersebut adalah $f(t) = -5t^2 + 10t$.
6. Lebah tersebut terbang konstan pada ketinggian 5 maka fungsi lintasan tersebut adalah $f(t) = 5$.
7. Substitusi titik $B(2,5)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $5 = 2m + n$.
8 Substitusi titik $C(3,0)$ ke fungsi linear $f(t) = mt + n$, diperoleh $0 = 3m + n$ atau $n = -3m$.

9. Dengan mensubstitusi $n = -3m$ ke $5 = 2m + n$ maka diperoleh $m = -5$ dan $n = 15$.
10. Fungsi linear yang dimaksud adalah $f(t) = -5t + 15$.

Dengan demikian, model fungsi lintasan lebah tersebut adalah:

$$f(t) = \begin{cases} -5t^2 + 10t & \text{jika } 0 \le t \le 1 \\ 5 & \text{jika } 1 \le t \le 2 \\ -5t + 15 & \text{jika } 2 \le t \le 3 \end{cases} \quad .... \quad (2)$$

Selanjutnya limit fungsi pada saat $t = 1$ dan $t = 2$ dapat dicermati pada tabel berikut.

Tabel 10.1 Nilai pendekatan *y* = *f*(*t*) pada saat *t* mendekati 1

t	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
$f(t)$	4,55	4,80	4,95	4,9995	5	...	5	...	5	5	5	5	5

Tabel 10.2 Nilai pendekatan *y* = *f*(*t*) pada saat *t* mendekati 2

t	1,7	1,8	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,2	2,3
$f(t)$	5	5	5	5	5	...	5	...	4,995	4,95	4,5	4	3,5

Dari pengamatan pada tabel, dapat kita lihat bahwa y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 1 dan y akan mendekati 5 pada saat t mendekati 2.
Perhatikan strategi lainnya. Mari perhatikan nilai fungsi pada t mendekati 1 dari kiri dan kanan, sebagai berikut:

I. Untuk t mendekati 1

$\lim_{t \to 1^-} (5t^2 + 10t) = 5$ (makna $t \to 1^-$ adalah nilai t yang mendekati 1 dari kiri)

$\lim_{t \to 1^+} 5 = 5$ (makna $t \to 1^+$ adalah nilai t yang mendekati 1dari kanan)

Ternyata saat t mendekati 1 dari kiri , nilai fungsi $y = f(t) = -5t^2 + 10t$ mendekati 5. Demikian saat t mendekati 1 dari kanan, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Kita menulisnya $\lim_{t \to 1^-} (5t^2 + 10t) = 5 = \lim_{t \to 1^+} 5$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 1, baik dari kiri maupun kanan.

II. Untuk t mendekati 2

$\lim_{t \to 2^-} 5 = 5$ (makna $t \to 2^-$ adalah nilai t yang mendekati 2 dari kiri)

$\lim_{t \to 2^+} (-5t + 15)$ (makna $t \to 2^+$ adalah nilai t yang mendekati 2 dari kanan)

Ternyata saat t mendekati 2 dari kiri, nilai fungsi $f(t) = 5$ mendekati 5. Demikian juga saat t mendekati 2 dari kanan, nilai fungsi $y = f(t) = -5t + 15$ mendekati

5. Hal ini dapat dinyatakan $\lim_{t \to 2^-} 5 = 5 = \lim_{t \to 2^+} (-5t + 15)$. Dengan demikian fungsi lintasan lebah mempunyai limit sebesar 5 pada saat t mendekati 2, baik dari kiri maupun kanan.

Berdasarkan masalah dan contoh di atas, kita tetapkan pengertian limit fungsi, sebagai berikut.

Definisi 10.1

Misalkan f sebuah fungsi $f : R \to R$ dan misalkan L dan c bilangan real.

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $f(x)$ mendekati L untuk semua x mendekati c.

Catatan:

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ dibaca limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati c sama dengan L.

Kita menyatakan bahwa f mendekati L ketika x mendekati c yang terdefinisi pada selang/interval yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri.

Seperti yang telah dijelaskan di awal bab ini, sebuah pengamatan pada permasalahan akan melahirkan pengertian dan konsep umum. Tetapi ada baiknya kita harus menguji kembali konsep tersebut. Mari kita amati kembali konsep limit fungsi tersebut dengan mengambil strategi numerik, dengan langkah-langkah pengamatan sebagai berikut.

1. Tentukanlah titik-titik x yang mendekati c dari kiri dan kanan!
2. Hitung nilai $f(x)$ untuk setiap nilai x yang diberikan?
3. Kemudian amatilah nilai-nilai $f(x)$ dari kiri dan kanan.
4. Ada atau tidakkah suatu nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati c tersebut?

Contoh 10.1

Misalkan fungsi $f(x) = x + 1$ untuk $x \in R$. Kita menentukan x mendekati 2, kemudian kita tentukan nilai y oleh fungsi $y = f(x)$ pada tabel berikut. Kemudian amatilah tabel berikut.

Tabel 10.3 Nilai fungsi $f(x) = x + 1$ pada saat x mendekati 2

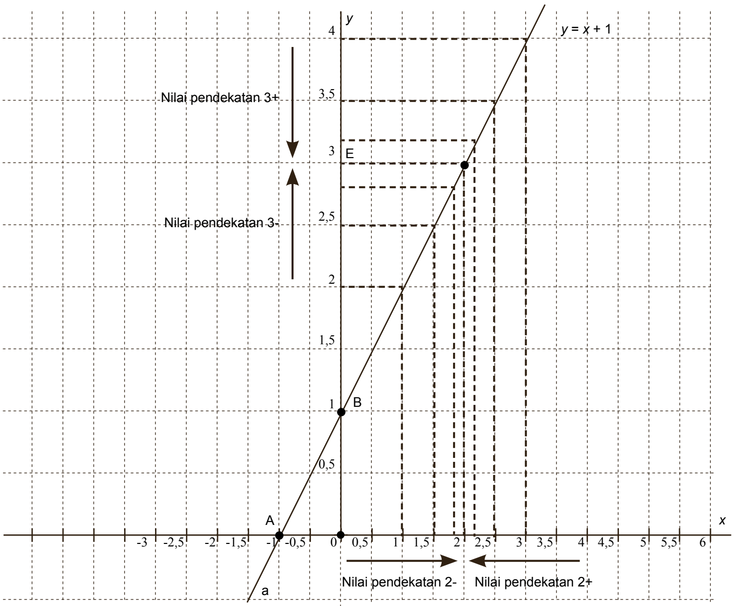
x	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	…	2	…	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3
y	2	2,5	2,7	2,9	2,99	2,999	…	?	…	3,001	3,01	3,1	3,5	3,7	4

Apakah pengamatanmu? Perhatikanlah tabel tersebut. Kita dapat memberikan beberapa pengamatan sebagai berikut.

- Ada banyak bilangan real yang dapat ditentukan yang mendekati 2.
- Setiap titik x mempunyai peta di y oleh fungsi yang diberikan.
- Setiap peta x juga mendekati peta 2.
- Tampak bahwa pendekatan ada dari kiri dan kanan tabel.

Menurut kamu, apa yang terjadi jika y hanya mendekati dari sebelah kiri atau kanan saja? Apakah ada fungsi yang demikian

Perhatikan sketsa berikut:



Gambar 10.7 Nilai pendekatan 2 dari kiri dan kanan pada fungsi $f(x) = x + 1$

Secara matematik, fungsi $f(x) = x + 1$ mendekati 3 pada saat x mendekati 2 dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 2} \left(x + 1 \right) = 3$$

Jika kita perhatikan tabel dan gambar, nilai limit mendekati 3 pada saat x mendekati 2, kemudian $f(2) = 3$. Ini berarti, fungsi mempunyai limit di x mendekati 2 dan fungsi terdefinisi pada $x = 2$. Bagaimana dengan fungsi $f(x)$ yang tidak terdefinisi pada titik pendekatannya? Perhatikan contoh berikut ini!

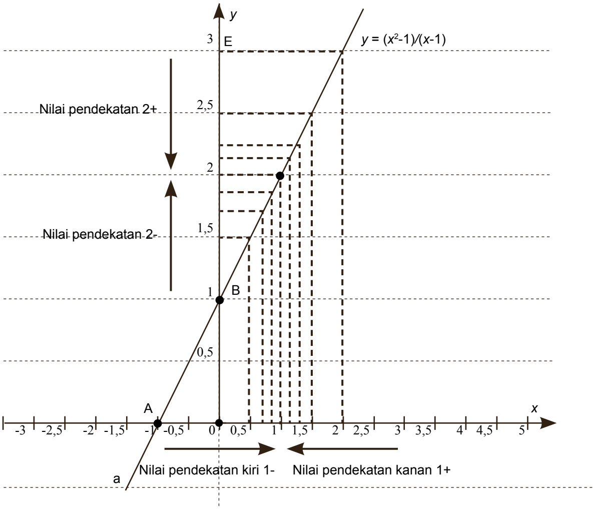
Contoh 10.2

Jika fungsi $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ untuk $x \in R$, $x \neq 1$. Misal $y = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$ untuk $x \neq 1$. Nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x yang mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 10.4 Nilai fungsi $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ mendekati 2, pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	1	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	?	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Berdasarkan nilai tabel di atas, dapat dilihat nilai $f(x)$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dan fungsi tidak terdefinisi pada x = 1. Secara geometri dapat diperlihatkan sebagai berikut.



Gambar 10.8 Nilai pendekatan 1 dari kiri dan kanan pada fungsi

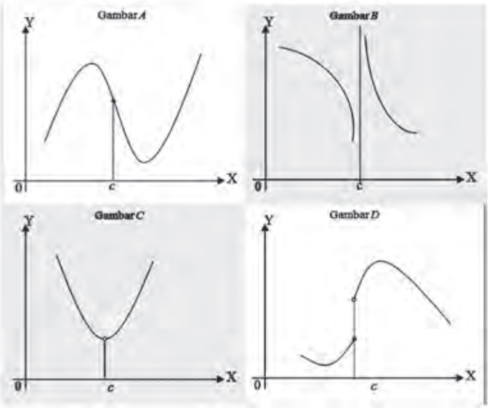
$f(x)\ \dfrac{x^2-1}{x-1}$ **dengan** $x \neq 1$

Secara matematik, fungsi $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$ dengan $x \neq 1$ akan mendekati 2 pada saat x mendekati 1 (kanan dan kiri) dituliskan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

Diskusi

Coba kamu diskusikan kasus berikut!
Ajaklah temanmu memperhatikan dan mengamati beberapa gambar berikut! Gambar manakah yang menunjukkan bentuk fungsi yang mempunyai limit pada saat *x* mendekati *c*? Jelaskanlah jawabanmu?



Gambar 10.9 Grafik fungsi *f*(*x*) terkait nilai limit pada *x* mendekati *c*

Contoh 10.3

Perhatikan fungsi berikut:

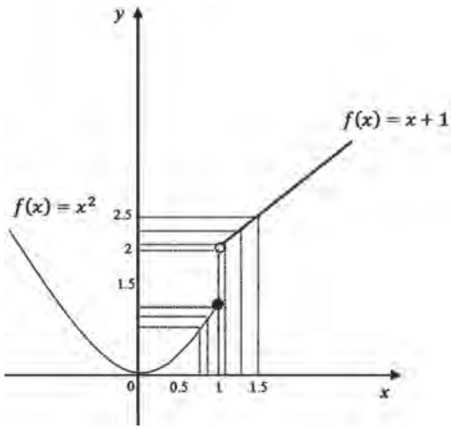
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$$

Jika $y = f(x)$ maka nilai-nilai pendekatan $f(x)$ untuk nilai-nilai x mendekati 1 dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 10.5 Nilai fungsi $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$ **mendekati 2, pada saat *x* mendekati 1**

x	0	0,5	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7	2
y	0	0,25	0,49	0,81	0,98	0,998	...	?	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,7	3

Berdasarkan tabel di atas, $f(x)$ akan mendekati 1 pada saat x mendekati 1 dari kiri sementara $f(x)$ mendekati 2 pada saat x mendekati 1 dari kanan. Hal ini mengakibatkan $f(x)$ tidak mempunyai limit pada saat x mendekati 1. Secara geometris dapat diperlihatkan sebagai berikut.



Gambar 10.10 Grafik fungsi $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$

Dengan demikian fungsi $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \le 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x > 1 \end{cases}$ tidak memiliki limit pada saat x mendekati 1

Diskusi

Menurut kamu, mengapa fungsi di atas tidak memiliki limit di x = 1? Dapatkah kamu berikan contoh lain untuk fungsi yang tidak memiliki limit di titik tertentu?

2. Sifat-Sifat Limit Fungsi

Berdasarkan Contoh 10.1, Contoh 10.2 dan Contoh 10.3 di atas, secara induktif diperoleh sifat berikut

Sifat-10.1

Misalkan f suatu fungsi dengan f: $R \to R$ dan L, c bilangan real.

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

Kita akan merumuskan sifat – sifat limit fungsi aljabar melalui pengamatan pada beberapa contoh berikut. Kamu diminta untuk memperhatikan, mengamati dan menemukan sifat – sifat limit fungsi.

Contoh 10.4

a. Jika $f(x) = 2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut. Diberikan beberapa nilai-nilai x yang mendekati 1.

Tabel 10.6 Nilai pendekatan *f*(*x*) = 2, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	2	2	2	2	2	2	...	?	...	2	2	2	2	2	2

Apa yang kamu peroleh dari Tabel 10.6?

Kita dapat amati, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2. Secara matematika ditulis $\lim\limits_{x \to 1^-} 2 = 2 = \lim\limits_{x \to 1^+} 2$ atau $\lim\limits_{x \to 1} 2 = 2$

(berdasarkan Sifat 10.1)

b. Jika $f(x) = 4$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 ditunjukkan pada tabel berikut. Diberikan beberapa nilai x yang mendekati 1

Tabel 10.7 Nilai pendekatan *f*(*x*) = 4, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	4	4	4	4	4	4	...	?	...	4	4	4	4	4	4

Kita dapat amati, $\lim\limits_{x \to 1^-} 4 = 4 = \lim\limits_{x \to 1^+} 4$ atau $\lim\limits_{x \to 1} 4 = 4$ (berdasarkan Sifat 10.1).

c. Jika $f(x) = k$ dengan k bilangan real maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 ditunjukkan pada tabel berikut. Diberikan beberapa nilai x yang mendekati 1.

Tabel 10.8 Nilai pendekatan, *f(x)* = *k* pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	*k*	*k*	*k*	*k*	*k*	*k*	...	?	...	*k*	*k*	*k*	*k*	*k*	*k*

Kita dapat amati, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati k. Hal ini dapat kita tuliskan secara matematika, $\lim\limits_{x \to 1^-} k = k = \lim\limits_{x \to 1^+} k$ dengan $\lim\limits_{x \to 1} k = k$ atau (berdasarkan Sifat 10.1).

Secara umum, dapat disimpulkan sifat berikut:

Sifat-10.2

Misalkan $f(x) = k$ adalah fungsi konstan dan c bilangan real, maka $\lim_{x \to c} k = k$.

Contoh 10.5

Perhatikan limit fungsi $f(x) = x$ pada contoh 10.5a, 10.5b berikut dengan pendekatan x yang berbeda.

a. Jika $f(x) = x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ ada saat x mendekati 1 ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.9 Nilai pendekatan *f*(*x*) = *x*, pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	...	?	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2

Kita amati pergerakan nilai - nilai x dan $f(x)$ pada tabel. Perhatikan, jika x mendekati 1 dari kiri dan kanan maka nilai y akan mendekati 2. Hal ini dapat ditulis secara matematika dengan $\lim_{x \to 1^-} x = 1 = \lim_{x \to 1^+} x$ atau $\lim_{x \to 1} x = 1$ (berdasarkan Sifat 10.1).

Coba kamu tunjukkan kembali nilai limit fungsi tersebut dengan gambar?

b. Jika $f(x) = x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 2 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.10 Nilai pendekatan *f*(*x*), pada saat *x* mendekati 2

x	1	1,2	1,5	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,8	3
y	1	1,2	1,5	1,9	1,99	1,999	...	?	...	2,001	2,01	2,1	2,5	2,8	3

Kita dapat amati $\lim_{x \to 2^-} x = 2 = \lim_{x \to 2^+} x$ atau $\lim_{x \to 2} x = 2$ (berdasarkan sifat 10.1).

Dapatkah kamu menunjukkan kembali nilai limit fungsi tersebut dengan gambar? Secara umum, dari contoh tersebut diperoleh sifat berikut:

Sifat-10.3

Misalkan $f(x) = x$, adalah adalah fungsi dan c bilangan real, maka $\lim_{x \to c} x = c$

Contoh 10.6

a. Jika $f(x) = 2x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.11 Nilai pendekatan *f(x)* = 2*x* pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,4	1,0	1,8	1,98	1,998	…	?	…	2,001	2,02	2,2	2	2	2

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-} 2x = 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x$ atau $\lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$

Jika di uraikan maka:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 2x &= (2)\lim_{x\to 1}(x)\\ &= (2)(1) \qquad \text{(lihat \textbf{Contoh 10.5a}: } \lim_{x\to 1} x = 1\text{)}\\ &= 2\end{aligned}$$

b. Jika $f(x) = 4x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.12 Nilai pendekatan *f(x)* = 4*x* pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	2
y	0	0,8	2,0	3,6	3,96	3,996	…	?	…	4,004	4,04	4,4	6,0	7,2	8

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-} 4x = 4 = \lim\limits_{x\to 1^+} 4x$ atau $\lim\limits_{x\to 1} 4x = 4$

Jika diuraikan maka:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 4x &= (4)\lim_{x\to 1}(x)\\ &= (4)(1) \qquad \text{(lihat \textbf{Contoh 10.5a}: } \lim_{x\to 1} x = 1\text{)}\\ &= 4\end{aligned}$$

Secara umum, dari contoh tersebut diperolah sifat berikut:

Sifat-10.4

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c, dengan c adalah bilangan real, $\lim\limits_{x\to c}\left[kf(x)\right] = k[\lim\limits_{x\to c} f(x)]$

Contoh 10.7

a. Jika $f(x) = x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.13 Nilai pendekatan *f(x)* = *x*² pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	3
y	0	0,04	0,25	0,81	0,98	0,99	…	?	…	1,00	1,02	2,21	2,25	2,50	3

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2$ atau $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$

Jika diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$, maka:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} x^2 &= \lim_{x\to 1}(x)(x)\\ &= (\lim_{x\to 1} x)(\lim_{x\to 1} x) \qquad \text{(lihat \textbf{Contoh 10.5a}: } \lim_{x\to 1} x = 1 \text{)}\\ &= (1)(1)\\ &= 1\end{aligned}$$

b. Jika $f(x) = 2x^2$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.14 Nilai pendekatan *f(x)* = 2 *x*² pada saat *x* mendekati 1

x	0	0,2	0,5	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,8	3
y	0	0,08	0,5	1,62	1,96	2,00	…	?	…	2,00	2,04	2,42	2	2,50	3

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-} 2x^2 = 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x^2$ atau $\lim\limits_{x\to 1} 2x^2 = 2$. Bila diuraikan prosesnya dengan kaitannya terhadap $\lim\limits_{x\to 1} 2 = 2$ dan $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$. Perhatikan ke 3 uraian berikut.

Uraian 1	Uraian 2	Uraian 3
$\lim\limits_{x\to 1} (2)(x)\,(x)$ $= (\lim\limits_{x\to 1} 2)(\lim\limits_{x\to 1} x)(\lim\limits_{x\to 1} x)$ $= 2 \times 1 \times 1$ $= 2$ karena: $\lim\limits_{x\to 1} 2 = 2$ (**contoh 10.4a**) dan $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ (**contoh 10.5a**)	$\lim\limits_{x\to 1} (2)(x^2)$ $= (\lim\limits_{x\to 1} 2)(\lim\limits_{x\to 1} x^2)$ $= 2 \times 1$ $= 2$ karena: $\lim\limits_{x\to 1} 2 = 2$ (**contoh 10.4a**) dan $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$ (**contoh 10.7a**)	$\lim\limits_{x\to 1} (2x)(x)$ $= (\lim\limits_{x\to 1} 2x)(\lim\limits_{x\to 1} x)$ $= 2 \times 1$ $= 2$ karena: $\lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$ (**contoh 10.6a**) dan $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ (**contoh 10.5a**)

Berdasarkan contoh di atas, maka dapat diperoleh sifat berikut:

Sifat-10.5

Misalkan f, g adalah dua fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c.

$\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = [\lim_{x \to c} f(x)][\lim_{x \to c} g(x)]$

Contoh 10.8

a. Jika $f(x) = 2x^2 - x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.15 Nilai pendekatan $f(x) = 2x^2 - x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	0	0,72	0,97	0,99	...	?	...	1,00	1,03	1,32	3	6

Kita dapat amati $\lim_{x \to 1^-} [2x^2 - x] = 1 = \lim_{x \to 1^+} [2x^2 - x]$ atau $\lim_{x \to 1} [2x^2 - x] = 1$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya pada $\lim_{x \to 1} 2x^2 = 2$ dan $\lim_{x \to 1} x = 1$ maka,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1} [2x^2 - x] &= \lim_{x \to 1} [(2x^2) - (x)] \\ &= \lim_{x \to 1} (2x^2) - \lim_{x \to 1} (x) \\ &= (2) - (1) \\ &= 1\end{aligned}$$

(lihat **Contoh 10.7b**: $\lim_{x \to 1} 2x^2 = 2$ dan **Contoh 10.5a**: $\lim_{x \to 1} x = 1$)

b. Jika $f(x) = x^2 - 4x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.16 Nilai pendekatan $f(x) = x^2 - 4x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	-1,7	-2,79	-2,98	-3,00	...	?	...	-3,00	-3,00	-3,01	-3,19	-3,75

Kita dapat amati $\lim_{x \to 1^-} [x^2 - 4x] = -3 = \lim_{x \to 1^+} [x^2 - 4x]$ atau $\lim_{x \to 1} [x^2 - 4x] = -3$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya pada $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$ dan $\lim_{x \to 1} 4x = 4$ maka,

$$\lim_{x\to 1}\left[x^2 - 4x\right] = \lim_{x\to 1}\left[(x^2) - (4x)\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2) - \lim_{x\to 1}(4x)$$ (lihat **Contoh 10.7a**: $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ dan **Contoh 10.5b**: $\lim_{x\to 1} 4x = 4$)

$$= (1) - (4)$$

$$= -3$$

c. Jika $f(x) = 2x^2 + x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.17 Nilai pendekatan $f(x) = 2x^2 + x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	1	2,52	2,95	3	...	?	...	3,01	3,05	3,52	6	10

Kita dapat amati $\lim_{x\to 1^-} [2x^2 + x] = 3 = \lim_{x\to 1^+} [2x^2 + x]$ atau $\lim_{x\to 1} [2x^2 + x] = 3$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya pada $\lim_{x\to 1} 2x^2 = 2$ dan $\lim_{x\to 1} x = 1$ maka,

$$\lim_{x\to 1}\left[2x^2 + x\right] = \lim_{x\to 1}\left[(2x^2) + (x)\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}(2x^2) + \lim_{x\to 1}(x)$$ (lihat **Contoh 10.7b**: $\lim_{x\to 1} 2x^2 = 2$ dan **Contoh 10.5b**: $\lim_{x\to 1} 4x = 4$)

$$= (2) + (1)$$

$$= 3$$

d. Jika $f(x) = x^2 + 4x$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.18 Nilai pendekatan $f(x) = x^2 + 4x$ pada saat x mendekati 1

x	0	0,5	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	2
y	0	2,25	4,41	4,94	4,99	...	?	...	5,01	5,06	5,61	8,25	12

Kita dapat amati $\lim_{x\to 1^-} [x^2 + 4x] = 5 = \lim_{x\to 1^+} [x^2 + 4x]$ atau $\lim_{x\to 1} [x^2 + 4x] = 5$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya pada $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ dan $\lim_{x\to 1} 4x = 4$ maka,

$$\lim_{x\to 1}\left[x^2 + 4x\right] = \lim_{x\to 1}\left[(x^2) + (4x)\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2) + \lim_{x\to 1}(4x)$$ (lihat **Contoh 10.7a**: $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$ dan **Contoh 10.6b**: $\lim_{x\to 1} 4x = 4$)

$$= (1) + (4)$$

$$= 5$$

Berdasarkan contoh di atas maka dapat diperoleh sifat berikut:

Sifat-10.6

Misalkan f, g adalah dua fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c, dengan c adalah bilangan real,

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\pm g(x)\right]=[\lim_{x\to c} f(x)]\pm[\lim_{x\to c} g(x)]$$

Contoh 10.9

a. Jika $f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - x}$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.19 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{2}{2x^2 - x}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	–25	7,14	2,78	2,06	2,01	…	?	…	1,99	1,94	1,52	0,67	0,49

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2}{2x^2-x}=2=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2}{2x^2-x}$ atau $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{2x^2-x}=2$

Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x\to 1} 2 = 2$ dan $\lim\limits_{x\to 1}[2x^2 - x]$ maka,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2}{2x^2-x} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} 2}{\lim\limits_{x\to 1}\left[2x^2-x\right]}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 1} 2}{\lim\limits_{x\to 1}\left[2x^2-x\right]}$$ (lihat **Contoh 10.4a**: $\lim\limits_{x\to 1} 2 = 2$ dan **Contoh 10.8a**: $\lim\limits_{x\to 1}[2x^2 - x] = 1$)

$$= \frac{2}{1}$$

$$= 2$$

b. Jika $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.20 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	3,42	1,96	1,75	1,67	1,67	...	?	...	1,67	1,66	1,59	1,38	1,30

Kita dapat amati $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 4x}{2x^2 + x} = 1,67 = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ atau $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x}{2x^2 + x} = 1,67$

Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x \to 1} [x^2 + 4x] = 5$ dan $\lim\limits_{x \to 1} [2x^2 + x] = 3$ maka,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x}{2x^2 + x} = \frac{\lim\limits_{x \to 1}(x^2 + 4x)}{\lim\limits_{x \to 1}(2x^2 + x)}$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$= 1,67$$

(lihat **Contoh 10.8d**: $\lim\limits_{x \to 1} [x^2 + 4x] = 5$ dan

Contoh 10.8c: $\lim\limits_{x \to 1} [2x^2 + x] = 3$

Latihan 10.1

Tunjukkan dengan pendekatan numerik, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 4}{2x} = \dfrac{(\lim\limits_{x \to 2} x)^2 + (\lim\limits_{x \to 2} 4)}{(\lim\limits_{x \to 2} 2)(\lim\limits_{x \to 2} x)}$

Berdasarkan contoh di atas maka dapat diperoleh sifat berikut:

Sifat-10.7

Misalkan f, g adalah dua fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c, dengan c adalah bilangan real dan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$, maka

$$\lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$$

Contoh 10.10

a. Jika $f(x) = 8x^3$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.21 Nilai pendekatan $f(x) = 8x^3$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	0,01	2,74	5,83	7,76	7,98	…	?	…	8,02	8,24	10,65	27	39,30

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-} 8x^3 = 8 = \lim\limits_{x\to 1^+} 8x^3$ atau $\lim\limits_{x\to 1} 8x^3 = 8$.

Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x\to 1} 2x = 2$ maka,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} 8x^3 &= \lim_{x\to 1} (2x)^3 \\ &= \lim_{x\to 1} (2x)(2x)(2x) \\ &= (\lim_{x\to 1} 2x)(\lim_{x\to 1} 2x)(\lim_{x\to 1} 2x) \\ &= (\lim_{x\to 1} 2x)^3 \\ &= (2)^3 \\ &= 8\end{aligned}$$

b. Jika $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ maka nilai pendekatan $f(x)$ pada saat x mendekati 1 dapat ditunjukkan pada tabel berikut.

Tabel 10.22 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ pada saat x mendekati 1

x	0,1	0,7	0,9	0,99	0,999	…	1	…	1,001	1,01	1,1	1,5	1,7
y	400	8,16	4,94	4,08	4,01	…	?	…	3,99	3,92	3,31	1,78	1,38

Kita dapat amati $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{4}{x^2} = 4 = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{4}{x^2}$ atau $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4}{x^2} = 4$. Bila diuraikan proses dengan kaitannya dengan $\lim\limits_{x\to 1} 2 = 2$ dan $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ maka,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{4}{x^2} &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x}\right)^2 \\ &= \lim_{x\to 1} \left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{2}{x}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{4}{x^2} &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x}\right)^2 \\
&= \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x}\right)\left(\frac{2}{x}\right) \\
&= \left(\lim_{x\to 1}\frac{2}{x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\lim\limits_{x\to 1} 2}{\lim\limits_{x\to 1} x}\right)^2 \\
&= (2)^2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

Latihan 10.2

Tunjukkan dengan pendekatan numerik, $\lim\limits_{x\to 2} x = \lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^3$

Sifat-10.8

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c, dengan c adalah bilangan real dan n adalah bilangan positif.

$$\lim_{x\to c}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to c} f(x)\right]^n$$

Latihan 10.3

Coba kamu lakukan percobaan untuk menunjukkan sifat $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$

Sifat-10.9

Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai limit bila x mendekati c, dengan c adalah bilangan real, dan n adalah bilangan bulat positif dan $\lim\limits_{x \to c} f(x) \geq 0$

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$$

Latihan 10.4

a. Tunjukkan dengan menggunakan pendekatan numerik nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}}{\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}}$ pada saat x mendekati 2 dengan melengkapi tabel di bawah ini.

Lengkapi tabel berikut!

Tabel 10.23: Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}}{\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}}$ pada saat x mendekati 2

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	...	2	...	2,0001	2,001	2,01
$8-x^2$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt{3x^2-4x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt[3]{2x^2+3x-6}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt[3]{3x+2}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$\dfrac{\sqrt{8-x^2}.\sqrt{3x^2-4x}}{\sqrt[3]{2x^2+3x-6}+\sqrt[3]{3x+2}}$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

b. Tunjukkan dengan menggunakan sifat – sifat limit fungsi di atas, nilai pendekatan $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{8 - x^2} . \sqrt{3x^2 - 4x}}{\sqrt[3]{2x^2 + 3x - 6} + \sqrt[3]{3x + 2}}$ pada saat x mendekati 2 dengan melengkapi tabel berikut dan memanfaatkan nilai pendekatannya.

Tabel 10.24: Nilai pendekatan fungsi *y* = *x*, *y* = 2, dan *y* = 3 pada saat *x* mendekati 1

x	1,9	1,99	1,999	1,9999	....	2	....	2,0001	2,001	2,01
$y = x$										
$y = 2$										
$y = 3$										

Contoh 10.11

Sebuah bidang logam dipanaskan di bagian tengah dan memuai sehingga mengalami pertambahan luas sebagai fungsi waktu $f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$ (cm)^2. Tentukan kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit.

Alternatif Penyelesaian

Kecepatan perubahan pertambahan luas adalah besar pertambahan luas dibandingkan dengan besar selisih waktu. Perhatikan tabel!

Tabel 10.25: Nilai pendekatan $f(x) = 0{,}25\ t^2 + 0{,}5t$ pada saat *t* mendekati 5

t	$\Delta t = t - 5$	$\Delta f = f(t) - f(5)$	$\Delta f/\Delta t$
1	–4	–8	2
2	–3	–6,75	2,25
3	–2	–5	2,5
4	–1	–2,75	2,75
4,5	–0,5	1,4375	2,875
4,9	–0,1	–0,2975	2,975
4,99	–0,01	–0,029975	2,9975
4,999	–0,001	–0,00299975	2,99975
4,9999	–0,0001	–0,000299997	2,999975
5	0,0000	0	?
5,0001	0,0001	0,000300002	3,000025

5,001	0,001	0,00300025	3,00025
5,01	0,01	0,030025	3,0025
5,1	0,1	0,3025	3,025
5,5	0,5	1,5625	3,125
6	1	3,253,25	3,25

Dengan melihat tabel di atas, pada saat t mendekati 5 maka Δt mendekati 0 dan $f(t)$ akan mendekati 3 (cm^2/menit).

Alternatif Penyelesaian lainnya

$f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$

$f(5) = 0{,}25(5)^2 + 0{,}5(5) = 8{,}75$

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 5}\frac{f(t)-f(5)}{t-5} &= \lim_{t\to 5}\frac{(0,25t^2+0,5t)-f(5)}{t-5} \\
&= \lim_{t\to 5}\frac{0,25t^2+0,5t-8,75}{t-5} \\
&= \lim_{t\to 5}\frac{0,5(0,5t^2+t-17,5)}{t-5} \\
&= \lim_{t\to 5}\frac{0,5(0,5t+3,5)(t-5)}{t-5} \qquad \text{karena } t \neq 5 \\
&= \lim_{t\to 5} 0,5(0,5t+3,5) \\
&= 0{,}5(0{,}5 \times 5 + 3{,}5) \\
&= 3
\end{aligned}$$

- Jika $t - 5$ diganti menjadi T, maka dapatkah kamu menunjukkan kembali proses limit di atas?

3. Menentukan Limit Fungsi

Pada bagian ini, kita akan menentukan limit dengan menggunakan pendekatan numerik, memanfaatkan faktorisasi dan perkalian sekawan. Coba kita pelajari permasalahan yang dihadapi oleh grup diskusi berikut.

Lina dan Wati adalah teman satu kelompok belajar di kelasnya. Suatu hari mereka mendapat tugas dari guru untuk menggambar beberapa grafik fungsi dengan mencari sebanyak mungkin titik-titik yang dilalui fungsi tersebut. Pada saat mereka menentukan beberapa nilai di daerah asalnya, mereka mendapatkan kesulitan untuk menentukan nilai pada fungsi-fungsi berikut.

1. Untuk $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 1$ dan $x = -1$ karena jika disubstitusi nilai 1 atau -1 ke fungsi, nilai $f(1)$ dan $f(-1)$ berbentuk $\frac{0}{0}$.
2. Untuk $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$, mereka sulit mendapatkan nilai fungsi untuk $x = 0$ karena jika nilai 0 disubstitusi maka mereka memperoleh $f(0)$ berbentuk $\frac{1}{0} - \frac{1}{0}$.

Menurut kamu, apakah penyebab permasalahan mereka?

Jika kita pelajari lebih teliti, Lina dan Wati sedang menghadapi permasalahan bentuk tak tentu suatu limit. Coba kita tampilkan kembali sifat suatu limit. Misalkan f suatu fungsi dengan $f : R \to R$ dan L, c bilangan real, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$.

Nilai L yang kita maksud adalah bentuk tentu limit. Jadi, jika kita substitusikan nilai c ke fungsi $f(x)$ sehingga $f(c)$ adalah bentuk-bentuk tak tentu seperti $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^∞, dan lain-lain maka bentuk tersebut gagal menjadi nilai limit fungsi tersebut. Oleh karena itu, misi kita dalam limit fungsi adalah mencari bentuk tentu dari limit fungsi, dengan langkah-langkah berikut:

1. Substitusikan $x = c$ ke fungsi sehingga diperoleh $f(c) = L$ (L adalah nilai tentu).
2. Jika L merupakan salah satu bentuk tak tentu maka kita harus mencari bentuk tentu limit fungsi tersebut dengan memilih strategi: mencari beberapa titik pendekatan (numerik), memfaktorkan, perkalian sekawan, dll.

Perhatikan beberapa contoh soal dan penyelesaian berikut.

Contoh 10.12

Tentukanlah nilai $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Numerik)

Jika $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ maka pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.26 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ pada saat x mendekati 2

x	1,5	1,7	1,9	1,99	1,999	...	2	...	2,001	2,01	2,1	2,3	2,5
y	0,143	0,189	0,231	0,248	0,250	...	?	...	0,250	0,252	0,268	0,302	0,333

Dengan melihat tabel di atas, jika x mendekati 2, maka $y = f(x)$ akan mendekati 0,25.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(2)$ berbentuk $\frac{0}{0}$ sehingga $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ perlu kita ubah menjadi $f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$ sehingga:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)}{(x+2)} \quad \text{karena } x \neq 2 \\
&= \frac{1}{4} \\
&= 0{,}25
\end{aligned}$$

Contoh 10.13

Tentukanlah nilai $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{2x + 5}}{x + 2}$ maka pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 2

ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.27 Nilai pendekatan $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2}$ pada saat x mendekati –2

x	–2,3	–2,3	–2,1	–2,01	–2,001	...	–2	...	– 1,999	– 1,99	–1,9	–1,8	–1,7
y	2,594	–2,530	–2,501	–2,499	–2,5	...	?	...	–2,5	– 2,501	–2,528	2,599	– 2,763

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x mendekati –2 maka $y = f(x)$ akan mendekati –2,5

Cara II (Perkalian sekawan)

Ingat kembali bentuk sekawan dari bentuk akar pada pelajaran eksponen di Bab I, $\sqrt{x} - a$ sekawan dengan $\sqrt{x} + a$,

Perhatikan bahwa $f(2)$ berbentuk $\dfrac{0}{0}$ sehingga $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2}$ dapat kita ubah dengan mengalikan

bentuk sekawan dari $\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}\right)$ yaitu:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2} &= \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x+5}}{x+2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}}\\
&= \lim_{x\to -2}\frac{(x^2+x-1)-(2x+5)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}\\
&= \lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}\\
&= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)}\\
&= \lim_{x\to -2}\frac{(x-3)}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+5}\right)} \qquad \text{karena } x \neq -2\\
&= -\frac{5}{2}\\
&= -2,5
\end{aligned}$$

Contoh 10.14

Berikut kita akan menyelesaikan permasalahan yang dihadapi oleh Lina dan Wati dengan menentukan nlai limit fungsi tersebut pada pendekatan -1 dan 1 pada contoh ini.

Tentukanlah $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ dan $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$.

Perhatikan nilai fungsi pada absis 1 dan -1 mempunyai nilai yang berbentuk $\frac{0}{0}$. Nilai fungsi tersebut adalah bentuk tak tentu sehingga perlu dicari bentuk tentu limit fungsi tersebut pada saat x mendekati 1 dan -1. Perhatikan strategi/cara berikut!

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Numerik)

Misalkan $y = f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$. Pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 1 dan -1 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.28 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ pada saat x mendekati 1

x	0,7	0,8	0,9	0,99	0,999	...	1	...	1,001	1,01	1,1	1,2	1,3
y	1,49	1,64	1,81	1,98	2,00	...	?	...	2,00	2,02	2,21	2,44	2,69

Tabel 10.29 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ pada saat x mendekati –1

x	–1,3	–1,2	–1,1	–1,01	–1,001	...	–1	...	–0,999	–0,99	–0,9	–0,8	–0,7
y	2,69	2,44	2,21	2,02	2,00	...	?	...	2,00	1,98	1,81	1,64	1,49

Dengan melihat tabel-tabel di atas, jika nilai x mendekati 1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2 dan jika nilai x mendekati -1 maka $y = f(x)$ akan mendekati 2.

Cara II (Faktorisasi)

Perhatikan bahwa $f(1)$ dan $f(-1)$ berbentuk $\frac{0}{0}$, $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ dapat diubah menjadi $f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)}$ sehingga:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \text{ karena } x\neq -1 \text{ dan } x\neq 1$$

$$= \lim_{x\to 1}(x^2+1\ )$$

$$= \lim_{x\to 1}(1^2+1)$$

$$= 2$$

dan

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \text{ karena } x\neq -1 \text{ dan } x\neq 1$$

$$= \lim_{x\to -1}(x^2+1)$$

$$= \lim_{x\to -1}\left[(-1)^2+1\right]$$

$$= 2$$

Contoh 10.15

Tentukanlah $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$

Alternatif Penyelesaian

Cara I (Numerik)

Misalkan $y=\frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$, maka pendekatan nilai fungsi pada saat x mendekati 0 ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 10.30 Nilai pendekatan $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ pada saat x mendekati 0

x	–0,3	–0,2	–0,1	–0,01	–0,001	...	0	...	0,001	0,01	0,1	0,2	0,3
y	–0,08	–0,08	–0,07	–0,07	–0,06	...	?	...	–0,06	–0,06	–0,06	–0,05	–0,04

Dengan melihat tabel di atas, jika nilai x semakin mendekati 0 maka $y = f(x)$ akan semakin mendekati –0,06.

Cara II (Perkalian sekawan)

Fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x+4}} - \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+4}}$ mempunyai nilai tidak tentu di $x = 0$ sehingga fungsi perlu di ubah menjadi $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}$ 0, $x \neq 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{x+4}} - \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x+4}}{x}.\frac{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+4}}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x+4}}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}.\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x^2+4)(x+4)}}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+4}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{16}$$

Contoh 10.16

Tentukanlah $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+7}}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x+9}}}{x^2-1}$

Alternatif Penyelesaian

Proses penyelesaian pada contoh ini diserahkan kepada siswa. Ikuti langkah – langkah penyelesaian berikut!

Langkah 1. Ubah bentuk fungsi tersebut menjadi fungsi rasional yang sederhana.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ldots)-(\ldots)}{(x^2-1)\sqrt{x^2+x+7}.\sqrt{x^2-x+9}}$$

Langkah 2. Kalikan pembilang dengan sekawannya. (ingat pelajaran bab 1)

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ldots)-(\ldots)}{(x^2-1)\sqrt{x^2+x+7}.\sqrt{x^2-x+9}}.\frac{(\ldots)+(\ldots)}{(\ldots)+(\ldots)}$$

Langkah 3. Faktorkan.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\ldots)}{(x-1)(x+1)(\ldots)\sqrt{x^2+x+7}.\sqrt{x^2-x+9}}$$

Langkah 4. Tentukan nilai limit pada bentuk sederhana pada langkah 3.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ldots)}{(x+1)(\ldots)\sqrt{x^2+x+7}.\sqrt{x^2-x+9}}$$

Uji Kompetensi 10.1

1. Buktikan dengan menggunakan pendekatan numerik bahwa
   a. $\lim\limits_{x\to 2} 6x^3 = (\lim\limits_{x\to 2} 6)(\lim\limits_{x\to 2} x)(\lim\limits_{x\to 2} x)(\lim\limits_{x\to 2} x)$
   b. $\lim\limits_{x\to 2} 6x^3 = (\lim\limits_{x\to 2} 6)(\lim\limits_{x\to 2} x)(\lim\limits_{x\to 2} x^2)$
   c. $\lim\limits_{x\to 2} 6x^3 = (\lim\limits_{x\to 2} 2x)(\lim\limits_{x\to 2} 3x^2)$
   d. $\lim\limits_{x\to 2} 6x^3 = (\lim\limits_{x\to 2} 3x)(\lim\limits_{x\to 2} 2x^2)$
   e. $\lim\limits_{x\to 2} 6x^3 = (\lim\limits_{x\to 2} 6x)(\lim\limits_{x\to 2} x^2)$
   f. $\lim\limits_{x\to 2} 6x^3 = (\lim\limits_{x\to 2} 6)(\lim\limits_{x\to 2} x^3)$

2. Tunjukkan dengan gambar bahwa:
   a. $\lim\limits_{x\to 2} 6 = 6$
   b. $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$
   c. $\lim\limits_{x\to 2} 6x = 12$
   d. $\lim\limits_{x\to 2} (6+x) = 8$
   e. $\lim\limits_{x\to 2} (6-x) = 4$
   f. $\lim\limits_{x\to 2} 6x = 12$
   g. $\lim\limits_{x\to 2} 6x^2 = 24$
   h. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6}{x} = 3$

3. Tunjukkan dengan gambar, nilai pendekatan dari fungsi – fungsi berikut:
   a. $\lim\limits_{x\to 2} (x+2)$
   b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$
   c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x}$
   d. Jika $f(x) = \begin{cases} x+2 & jika \quad x \le 1 \\ 4-x & jika \quad x \ge 1 \end{cases}$

      maka tentukan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
   e. Jika $f(x) = \begin{cases} x+1 & jika \quad x < 1 \\ x^2+1 & jika \quad x \ge 1 \end{cases}$

      maka tentukan $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

4. Dengan menggunakan strategi, tentukan nilai limit fungsi berikut:
   a. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{2x-2}$
   b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}$
   c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}\right)$
   d. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+2}-\sqrt{x+3}}{x^2-1}$
   e. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+3}-2}$

5. Sketsa dan analisislah limit fungsi di $x = -1$ dan $x = 1$
   a. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{jika} \quad x \ge 1 \\ 2 & \text{jika} \quad -1 \le x < 1 \\ 1 & \text{jika} \quad x < -1 \end{cases}$
   b. $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{jika} \quad x \ge 1 \\ 2x+2 & \text{jika} \quad -1 < x < 1 \\ x+1 & \text{jika} \quad x \le -1 \end{cases}$
   c. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{jika} \quad x \ge 1 \\ 3x & \text{jika} \quad -1 \le x < 1 \\ x^2 & \text{jika} \quad x < -1 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{jika} \quad x \geq 1 \\ 2 - x & \text{jika} \quad -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{8 - x} & \text{jika} \quad x < -1 \end{cases}$

e. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & \text{jika} \quad x > 1 \\ 2x + 1 & \text{jika} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+2}}{x+1} & \text{jika} \quad -\dfrac{3}{2} \leq x < -1 \end{cases}$

6. Sebuah garis $y - 2x - 3 = 0$ menyinggung kurva $y = x^2 + x + 2$.
   a. Coba kamu tunjukkan koordinat pendekatan kedua kurva (titik singgung). Gunakan strategi numerik untuk mendapatkannya!
   b. Carilah metode lain untuk mendapatkan titik singgung tersebut!
   c. Sketsalah permasalahan tersebut!

7. Tentukan nilai limit fungsi berikut dengan menggunakan dua metode penyelesaian atau lebih! Bandingkan jawaban yang kamu peroleh!
   a. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+2h) - f(x)}{h}$
   b. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+2h) - f(x-2h)}{h}$
   c. Jika $f(x) = 3x^2$ maka tentukanlah $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x-4h) - f(x+2h)}{3h}$
   d. Jika $f(x) = kx^2$ dengan k, p , q dan r adalah bilangan real maka tentukanlah

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+ph) - f(x+qh)}{rh}$$

8. Tentukanlah nilai limit fungsi $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{4}}$ dengan menggunakan numerik dan perkalian sekawan pada saat x mendekati 2.

9. Jika fungsi $f(x)$ memenuhi $f(x) - 2f(\dfrac{2013}{2} - x) = x$ maka tentukanlah $\lim\limits_{x \to 2013} \left(\dfrac{3f(x)}{x - 2013} \right)^{2013}$

10. Selesaikan soal-soal limit fungsi berikut.
    a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 6} - \sqrt[3]{x^2 + x + 6}}{x^3 - 1}$
    b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(2x+1)^5 - (3x+1)^4}{(4x+1)^3 - (5x+1)^2}$
    c. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{(3x-2)^2 - (2x-1)^2}{x-1}}$
    d. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{3}{2x-1} - \dfrac{3}{3x-2}}{x^2 - 1}$
    e. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3}{\sqrt{x^2 + x - 2}} - \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}$

Projek

Himpun informasi penerapan limit fungsi dalam bidang teknik, masalah nyata, fisika, dan teknologi informasi. Rancanglah minimal dua masalah terkait informasi yang kamu peroleh dan buatlah pemecahannya. Buat laporan hasil kerja kelompokmu, dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Setelah kita membahas materi limit ini, terdapat beberapa hal penting yang menjadi kesimpulan dari hasil penemuan berbagai konsep dan aturan tentang limit, disajikan sebagai berikut.

1. Penentuan limit suatu fungsi di suatu titik c, sangat bergantung pada kedudukan titik c dan daerah asal fungsi tersebut. Dalam pembahasan limit fungsi pada buku ini, yang menjadi daerah asal fungsi adalah himpunan bilangan real di mana fungsi tersebut terdefinisi.
2. Sebuah fungsi f dikatakan mempunyai limit di titik c jika dan hanya jika nilai fungsi untuk x dari kiri dan kanan menuju ke bilangan yang sama.
3. Suatu fungsi f mempunyai limit di titik c, apabila limit kiri sama dengan limit kanan fungsi di titik c.
4. Tidak semua fungsi mempunyai limit di titik c. Titik c tidak harus merupakan anggota daerah asal fungsi, tetapi c bilangan real.
5 Misalkan f sebuah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan c dan L adalah bilangan real, nilai fungsi f mendekati L pada saat x mendekati c dapat kita tuliskan dengan:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

6. Misalkan f, g adalah dua fungsi yang mempunyai nilai limit pada x mendekati c, dengan k dan c adalah bilangan real serta n adalah bilangan bulat positif.
   a. $\lim\limits_{x \to c} k = k$
   b. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
   c. $\lim\limits_{x \to c} [kf(x)] = k\left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]$

d. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)+g(x)\right]=\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]+\left[\lim\limits_{x\to c} g(x)\right]$

e. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)-g(x)\right]=\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]-\left[\lim\limits_{x\to c} g(x)\right]$

f. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\times g(x)]=\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]\times\left[\lim\limits_{x\to c} g(x)\right]$

g. $\lim\limits_{x\to c}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]=\left[\dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}\right]$ bila $\lim\limits_{x\to c} g(x)\neq 0$

h. $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$

i. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to c} f(x)\geq 0$ bila n bilangan bulat dan genap

7. Selanjutnya kita akan membahas tentang materi statistika. Materi prasyarat yang harus kamu kuasai adalah himpunan, fungsi, operasi hitung bilangan, dan pengukuran. Hal ini sangat berguna dalam penentuan nilai rata-rata, median, modus, quartil, standar deviasi, dan sebagainya. Pada jenjang yang lebih tinggi, kamu harus menguasai tentang fungsi, limit fungsi, dan fungsi yang kontinu sebagai prasyarat untuk mempelajari statistik. Semua apa yang kamu sudah pelajari sangat berguna untuk melanjutkan bahasan berikutnya dan seluruh konsep dan aturan-aturan matematika dibangun dari situasi nyata dan diterapkan dalam pemecahan masalah kehidupan.

Catatan:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bab 11

STATISTIKA

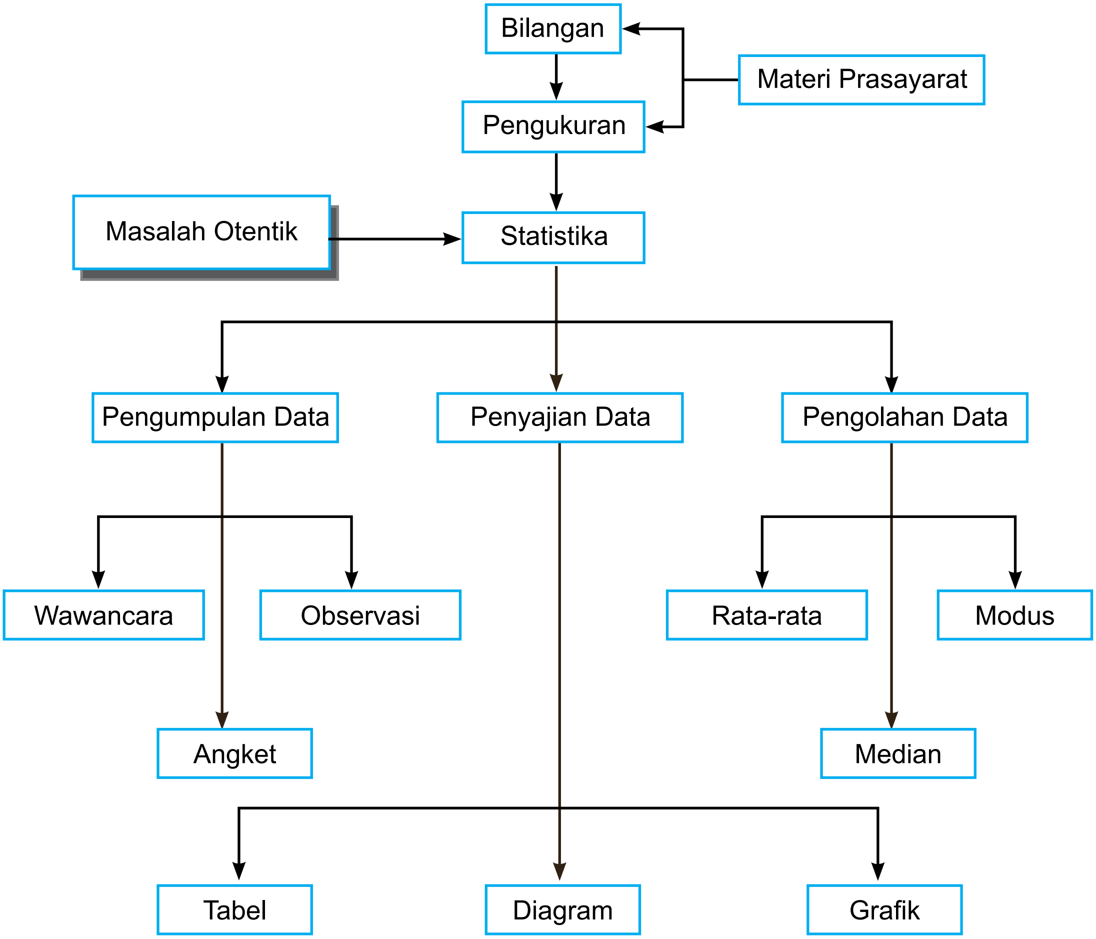
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Melalui proses pembelajaran statistika, siswa mampu: 1. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 2. Mendeskripsikan berbagai penyajian data dalam bentuk tabel atau diagram/plot yang sesuai untuk mengomunikasikan informasi dari suatu kumpulan data melalui analisis perbandingan berbagai variasi penyajian data. 3. Mendeskripsikan data dalam bentuk tabel atau diagram/plot tertentu yang sesuai dengan informasi yang ingin dikomunikasikan. 4. Menyajikan data nyata dalam bentuk tabel atau diagram/plot tertentu yang sesuai dengan informasi yang ingin dikomunikasikan.	Melalui pembelajaran materi statistika, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Melatih berpikir kritis dan kreatif. • Mengamati keteraturan data. • Berkolaborasi menyelesaikan masalah. • Berpikir independen untuk mengajukan ide secara bebas dan terbuka. • Mengamati aturan susunan objek.

Istilah Penting

- *Tabel*
- *Diagram*
- *Histogram*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Penyajian data merupakan salah satu elemen penting dalam mempelajari statistika. Penyajian data yang baik akan mempermudah kita untuk membaca dan untuk selanjutnya mengolah data tersebut. Bentuk penyajian data dapat berupa tabel atau diagram/plot. Untuk lebih memahami perhatikan masalah-masalah berikut.

1. Data Tunggal

Data tunggal merupakan data berkuantitas kecil dan suatu statistik disebut sebagai data tunggal jika data tersebut hanya memuat satu variabel data yang ingin kita ketahui dari objek populasi. Beberapa contohnya adalah: data nilai ulangan siswa, data tinggi badan siswa dan tingkat keuntungan suatu usaha. Penyajian data yang akan dibahas pada bab ini berbentuk tabel dan diagram/plot. Untuk lebih memahami penyajian data dalam statistik perhatikan masalah dan kegiatan berikut.

a. Penyajian data dalam bentuk tabel

Masalah-11.1

Siti ditugaskan guru untuk melakukan survei data terhadap keuntungan penjualan barang/jasa selama satu tahun melalui buku kas koperasi sekolah. Data yang diperoleh sebagai berikut (dalam satuan ribu rupiah) :
Keuntungan penjualan buku tulis, pensil, ballpoint, keping cd, tinta printer, makanan ringan, kertas HVS, kerta folio, minuman ringan dan air mineral, seragam sekolah, sergam olahraga, buku bacaan, majalah komik, dan foto copy secara berturut-turut adalah 400, 300, 550, 200, 325, 540, 350, 450, 750,, 900, 500, 600, 300, dan 525. Sajikan data tersebut dan tentukan lima jenis barang dengan keuntungan tertinggi!

Alternatif Penyelesaian

Jika data tersebut kita daftarkan tanpa menggunakan label barang maka kita dapat menggunakan tabulasi kolom diperoleh tabel yang disajikan sebagai berikut :

Tabel 11.1 Data Keuntungan Barang/Jasa Koperasi Sekolah

Jenis barang/Jasa	Jumlah Keuntungan (Satuan Ribu Rupiah)
Buku tulis	400
Pensil	300
Ballpoint	550

Keeping CD	200
Tinta Printer	325
Makanan Ringan	710
Kertas HVS	350
Kertas Folio	600
Minuman Ringan dan Air Mineral	750
Seragam Sekolah	900
Seragam Olah Raga	500
Buku Bacaan	600
Majalah/Komik	300
Fotocopy	525
Total	**7.010**

Bagaimana jika tabel tersebut disajikan dalam bentuk baris? Persoalan yang lain juga muncul adalah bagaimana jika data yang ada lebih banyak?
Dengan menggunakan bantuan pelabelan pada setiap jenis barang/jasa akan membantu dan lebih memudahkan kita dalam menyajikan data yang banyak serta dalam berbagai bentuk tabel, sehingga dengan data berlabel diperoleh tabel berikut ini (Satuan Ribu Rupiah) :

Tabel 11.2 Data Keuntungan Barang/Jasa Menggunakan Label

Jenis barang/Jasa	Keuntungan
1	400
2	300
3	550
4	200
5	325
6	710
7	350

Jenis barang/Jasa	Keuntungan
8	600
9	750
10	900
11	500
12	600
13	300
14	525

Dari penyajian tabel di atas diperoleh 5 jenis barang dengan keuntungan tertinggi, yakni:

Tabel 11.3 Data Barang/Jasa dengan Keuntungan tertinggi.

No.	Jenis barang/Jasa	Jumlah Keuntungan
1	Seragam sekolah	900
2	Minuman ringan dan air mineral	750
3	Makanan ringan	710
4	Buku bacaan	600
5	Kertas folio	600

Masalah-11.2

Setiap akhir semester guru melakukan evaluasi hasil belajar. Data hasil evaluasi ulangan siswa untuk mata pelajaran matematika disajikan dalam bentuk tabel berikut :

Tabel 11.4 Data Nilai Matematika Siswa

Nama	Niai	Nama	Nilai
Siti	80	Ratna	85
Zubaidah	75	Indah	80
Beni	80	Enita	85
Edo	85	Rojak	85
Udin	80	Hartono	75
Dayu	85	Hendra	85
Lani	85	Rizal	85
Wayan	90	Iwan	80
Bambang	80	Syamsul	85
Endang	80	Habibah	85
Marianto	85	Deni	80
Supardi	80	Mahfud	80
Paian	80	Depi	85
Hotma	85	Asni	85
Oldri	100	Reza	80
Ovano	95	Lexi	80

Bentuklah tabel di atas dalam bentuk tabel frekuensi dan tentukan jumlah siswa dengan nilai tertinggi dan terendah serta nilai berapa yang paling banyak diperoleh siswa tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Untuk data hasil ulangan Matematika disajikan dengan cara mengelompokkan data nilai siswa serta banyak siswa dengan nilai yang sama, diperoleh tabel frekuensi sebagai berikut:

Tabel 11.5 Tabel distribusi frekuensi

Nilai	Frekuensi
75	2
80	12
85	15
90	1
95	1
100	1

Maka dari tabel distribusi frekuensi di atas diperoleh:

- Nilai tertinggi adalah 100 sebanyak 1 orang siswa
- Nilai terendah adalah 75 sebanyak 2 orang siswa
- Nilai dengan siswa terbanyak adalah 85 sebanyak 15 orang siswa

Dari pembahasan di atas diperoleh banyak kegunaan penyajian data dalam bentuk tabel antara lain data terlihat rapi sehingga memudahkan dalam pengolahan data. Dalam statistik, tabel dibedakan dengan dua jenis yaitu tabel sederhana dan tabel distribusi frekuensi yang sering dipakai pada data berkelompok yang akan kamu pelajari di subbab berikutnya.

b. Penyajian dalam bentuk Diagram

Terdapat beberapa cara dalam penyajian data berbentuk diagram antara lain: diagram garis, diagram lingkaran dan diagram batang. Untuk lebih memahami penyajian diagram perhatikan masalah-masalah berikut.

a. Diagram Garis

Masalah-11.3

Ayah Beni bekerja di Amerika dan telah pulang ke Indonesia. Ia ingin menukarkan uang hasil tabungan selama bekerja agar dapat dipakai di tanah air untuk memenuhi kebutuhan mereka. Ia pun mengamati harga jual dan harga beli mata uang dolar Amerika selama beberapa hari. Berikut hasil pencatatan nilai tukar rupiah terhadap dolar yang diamati.

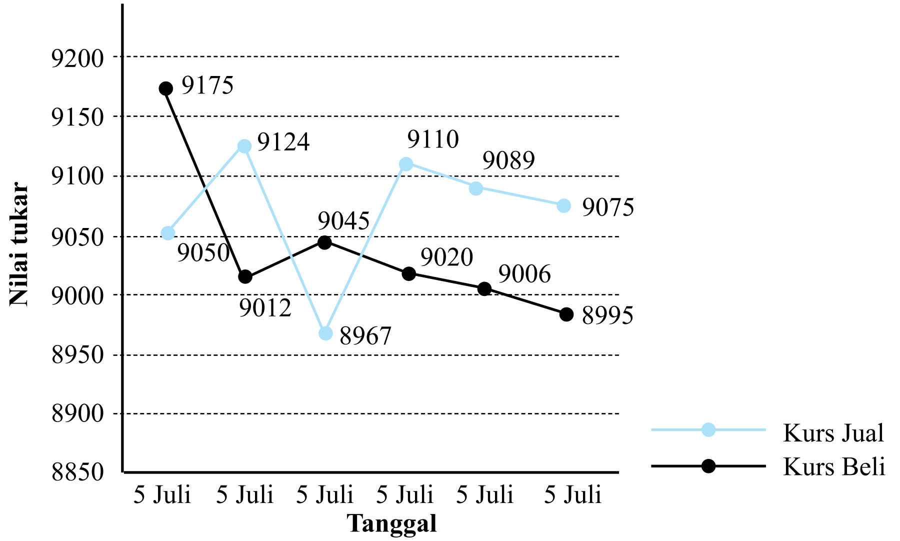
Tabel 11.6 Tabel Nilai Tukar Rupiah

Tanggal	5 Juli	6 Juli	7 Juli	8 Juli	9 Juli	10 Juli
Kurs jual	9.050	9.124	8.967	9.110	9.089	9.075
Kurs beli	9.175	9.012	9.045	9.020	9.006	8.985

Ubahlah tabel dalam bentuk diagram dan tentukan pada tanggal berapakah nilai tukar rupiah tertinggi dan terendah! Hitung juga selisih rata-rata nilai kurs jual terhadap kurs beli.

Alternatif Penyelesaian

a. Pilihan untuk mengubah data di atas dalam bentuk diagram cukup banyak antara lain diagram garis, batang, lingkaran dan lain-lain. Pada pembahasan ini akan dipilih diagram garis, silahkan kamu mencoba menyajikan dalam bentuk diagram lainnya. Untuk menampilkan diagram garis kita akan memasangkan setiap datum nilai rupiah dan tanggal pada pada data kurs jual sehingga membentuk titik-titik kemudian hubungkan titik-titik tersebut sehingga membentuk garis-garis. Cara yang sama juga dilakukan untuk data kurs beli, sehingga diperoleh diagram berikut:



Gambar 11.1 Diagram Garis Kurs Rupiah Terhadap Dolar

Dari diagram di atas diperoleh data sebagai berikut :

- Harga kurs jual tertinggi Rp 9.124 berada di tanggal 6 juli dan terendah Rp 8.967 berada di tanggal 7 juli.
- Harga kurs beli tertinggi Rp 9.175 berada di tanggal 5 juli dan terendah Rp 8.985 berada di tanggal 10 juli.

b. Dengan menggunakan konsep rata-rata yang telah kamu pelajari di SMP dan pembulatan desimal diperoleh rata-rata nilai kurs jual dan beli, yakni :

- Rata-rata kurs jual $= \dfrac{9.050 + 9.124 + 8.967 + 9.110 + 9.089 + 9.075}{6} = 9069$
- Rata-rata kurs beli $= \dfrac{9.175 + 9.012 + 9.045 + 9.020 + 9.006 + 8.985}{6} = 9041$

Dari kedua rata-rata kurs di atas dapat diperoleh selisih rata-rata kurs, yaitu:

= Rata-rata kurs jual – Rata-rata kurs beli

= 9.069 – 9.041

= 29

Dari perhitungan di atas diperoleh selisih rata-rata nilai kurs adalah Rp 29.

Kegiatan 11.1

Bentuklah kelompok belajarmu

- Catatlah suhu badan minimal 20 orang temanmu di sekolah.
- Buatlah tabel untuk mencatat data suhu badan temanmu tersebut.
- Gambarkanlah data tersebut kedalam bentuk diagram.
- Tentukanlah suhu badan tertinggi dan terendah!
- Bandingkan hasil kerja kelompokmu dengan kelompok yang yang lain, jelaskan perbedaan hasil yang diperoleh!

Sampai pembahasan ini apakah kamu telah melihat penyajian data dalam bentuk tabel dan diagram garis, dapatkah kamu mendeskripsikan perbedaan yang ada dalam membaca data yang ditampilkan melalui tabel terhadap diagram garis?

Melalui grafik di atas kita dapat dengan mudah membaca hasil data nilai tukar rupiah dibandingkan dengan menggunakan tabel. Misalnya, kita dapat dengan mudah menentukan kurs nilai rupiah tertinggi atau pun terendah dan pada saat kapan hal itu terjadi, dan suhu tubuh tertinggi dan terendah pada Kegiatan 11.1. Dari grafik di atas terlihat sumbu X merupakan variabel data pengamatan, sedangkan sumbu Y merupakan nilai data pengamatan dengan satuan tertentu. Pasangan variabel dan nilai pengamatan membentuk titik-titik dan dihubungkan sehingga membentuk diagram garis.

Dari masalah dan kegiatan di atas dapat kita nyatakan bahwa diagram garis adalah suatu penyajian data statistik dengan menggunakan gari-garis lurus yang terhubung dengan komponen-komponen pengamatan. Diagram garis biasanya digunakan untuk menggambarkan data tentang keadaan yang berkesinambungan. Biasanya data bersifat kontinu pada suatu ukuran satuan. Misalnya, kecepatan suatu mobil pada suatu perjalanan, nilai tukar rupiah, dan pertumbuhan jumlah penduduk suatu daerah.

b. Diagram Lingkaran

Masalah-11.4

Sebuah toko *handphone* mencatat penjualan produk *smartphone* yang dijual dalam kurun waktu sebulan. Gambarkan data penjualan *smartphone* dari tabel berikut ke dalam bentuk diagram lingkaran.

Tabel 11.7 Tabel Penjualan *Smartphone*

Jenis HP	Tipe I	Tipe II	Tipe III	Tipe IV	Tipe V	Tipe VI
Banyak Penjualan	35	25	20	40	10	50

Alternatif Penyelesaian

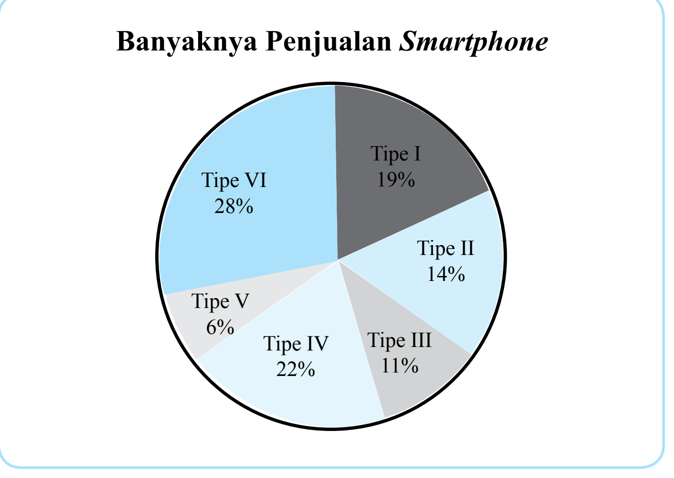
Dari data di atas diperoleh total penjualan *smartphone* adalah 180 unit.
Untuk menggambarkan diagram lingkaran biasanya digunakan dalam dua bentuk yakni bentuk derajat dan bentuk persentase. Dalam bentuk persentase kita menghitung terlebih dahulu besar persentase tiap bagian data penjualan *smartphone* terhadap seluruh penjualan yakni 100%. Sama halnya dengan sudut pusat lingkaran terlebih dahulu menghitung besar sudut tiap bagian data terhadap total sudut lingkaran yaitu 360°. Dengan pembulatan desimal maka besar persentase dan besar sudut lingkaran tiap bagian data penjualan *smartphone* adalah:

Tabel 11.8 Tabel Penjualan *Smartphone*

Tipe *Smartphone*	Banyak Penjualan	Persentase	Sudut pusat lingkaran
Tipe I	35	$\frac{35}{180} \times 100\% = 19\%$	$\frac{35}{180} \times 360^o = 70^o$
Tipe II	25	$\frac{25}{180} \times 100\% = 14\%$	$\frac{25}{180} \times 360^o = 50^o$

Tipe III	20	$\frac{20}{180} \times 100\% = 11\%$	$\frac{20}{180} \times 360^o = 40^o$
Tipe IV	40	$\frac{40}{180} \times 100\% = 22\%$	$\frac{40}{180} \times 360^o = 80^o$
Tipe V	10	$\frac{10}{180} \times 100\% = 6\%$	$\frac{10}{180} \times 360^o = 20^o$
Tipe	50	$\frac{50}{180} \times 100\% = 28\%$	$\frac{50}{180} \times 360^o = 100^o$

Dengan memperoleh besaran persentase tiap bagian pada data penjualan *smartphone* tersebut maka bentuk diagram lingkaran dalam bentuk persentase adalah sebagai berikut.

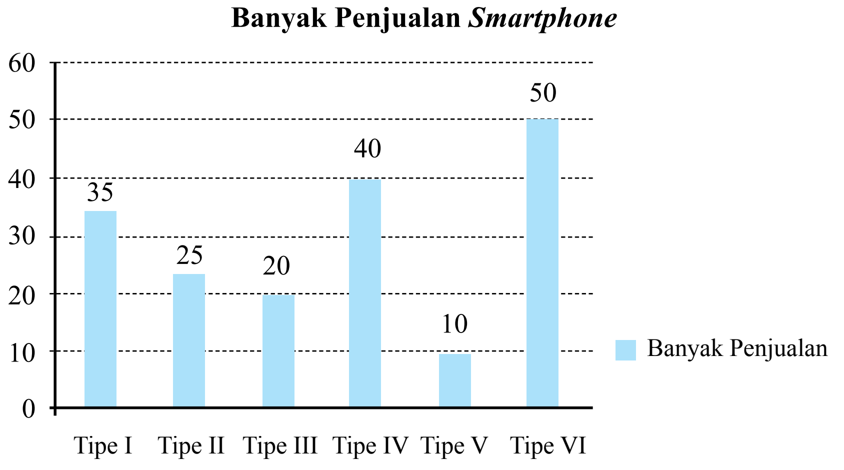


Gambar 11.2 Diagram Lingkaran Bentuk Persentase

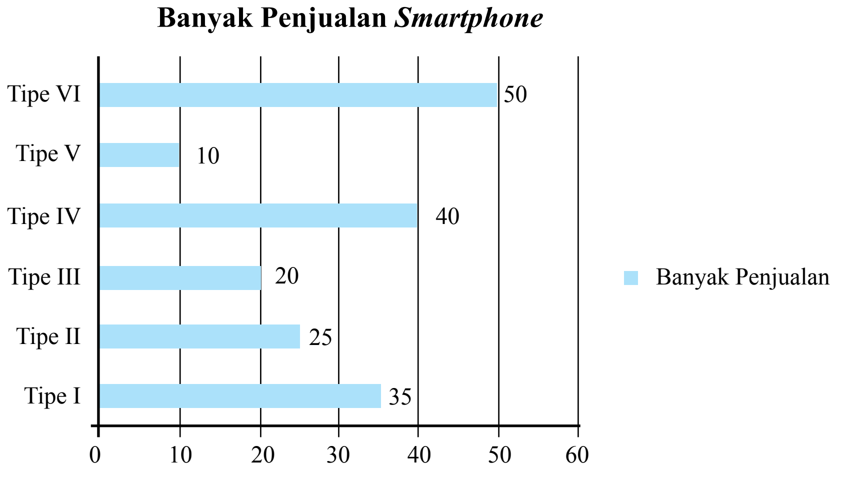
Untuk diagram lingkaran dengan besaran sudut kamu selesaikan sebagai latihan. Dengan demikian dapat dinyatakan bahwa diagram lingkaran adalah penyajian data statistik dengan menggunakan gambar yang berbentuk lingkaran yang pada bagian-bagian dari daerah lingkaran menunjukkan juring atau persentase dari keseluruhan.

c. Diagram Batang

Perhatikan kembali Masalah 11.4, dari data tersebut kita juga dapat menggambarkan diagram batang. Prinsip penyajian diagram batang relatif sama dengan diagram garis. Setelah menghubungkan variabel pengamatan dengan nilai pengamatan dapat dibentuk grafik batang dengan lebar yang sama dan setinggi atau sejauh nilai data pengamatan. Dengan data penjualan *smartphone* di atas dapat disajikan diagram batang sebagai berikut.



Gambar 11.3 Diagram Batang Bentuk Vertikal



Gambar 11.4 Diagram Batang Bentuk Horizontal

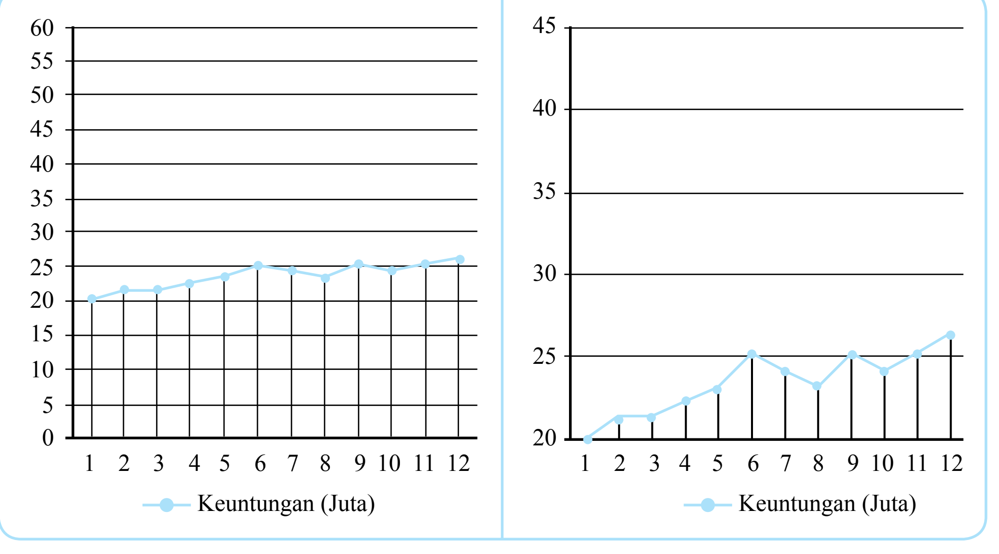
Dari kedua diagram batang di atas dapat dinyatakan bahwa diagram batang merupakan diagram berbentuk persegi panjang yang lebarnya sama namun tinggi atau panjangnya sebanding dengan frekuensi data pada sumbu horizontal maupun vertikal. Dengan diagram garis dan diagram batang dapat membantu kita untuk dapat melihat nilai data yang tertinggi dan terendah.

Dari penyajian data di atas, jelaskanlah keunggulan dan kelemahan setiap penyajian data! Jelaskan pada saat kapankah penyajian data menggunakan tabel, diagram garis, diagram batang dan diagram lingkaran tepat digunakan?

Tabel 11.9 Tabel Keuntungan Penjualan Sepeda Motor

Bulan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Kuntungan (Juta Rupiah)	20	21	21	22	23	25	24	23	25	24	25	26

Pertanyaan kritis:
Tabel di atas adalah data keuntungan penjualan suatu showroom sepeda motor. Diantara diagram di bawah ini, manakah diagram yang menunjukkan data pada Tabel 11.9 di atas? Jelaskan.



2. Data Kelompok

Coba kamu perhatikan kembali setiap data yang ada pada permasalahan di atas. Andaikan data tersebut bertambah banyaknya tentu dalam penyajian menjadi tidak efektif dan efesien. Oleh karena itu untuk dapat lebih menyederhanakan penyajian data dilakukan dengan mengelompokkan data dalam interval kelas tertentu. Untuk lebih dapat memahami perhatikan berapa masalah berikut.

a. Penyajian data dalam bentuk tabel

Pada subbab di atas sedikit telah disinggung penyajian data berkelompok dengan menggunakan tabel distribusi frekuensi. Penggunaan tabel ini agar data yang cukup besar dapat efektif dan lebih efisien dalam penyajian maupun pengolahan data. Untuk lebih memahami perhatikan masalah berikut.

Masalah-11.5

Hasil Ujian semester mata pelajaran matematika terhadap 80 siswa dinyatakan sebagai berikut.

38	90	92	85	76	88	78	74	70	48
61	83	88	81	82	72	83	87	81	82
48	90	92	85	76	74	88	75	90	97
93	72	91	67	88	80	63	76	49	84
61	83	88	81	82	60	66	98	93	81
80	63	76	49	84	79	80	70	68	92
81	91	56	65	63	74	89	73	90	97
75	83	79	86	80	51	71	72	82	70

Sajikanlah data di atas dalam bentuk tabel distribusi frekuensi.

Alternatif Penyelesaian

Untuk dapat memudahkan penggunaan data tersebut, susun data berdasarkan urutan terkecil hingga terbesar. Urutan data tersebut dinyatakan sebagai berikut.

38	48	48	49	51	56	60	61	61	63	63	63	65	66	67	68	70	70	70	70
71	72	72	72	73	74	74	74	75	75	76	76	76	76	78	79	79	80	80	80
80	81	81	81	81	81	82	82	82	82	83	83	83	83	84	84	85	85	86	87
88	88	88	88	88	89	90	90	90	90	91	91	92	92	92	93	93	97	97	98

Setelah data diurutkan, dengan mudah kita temukan bahwa data terbesar adalah 98 dan data terkecil adalah 38. Selisih data terbesar dengan data terkecil disebut sebagai jangkauan data. Untuk data yang kita kaji, diperoleh:

Jangkauan Data = 98 – 38 = 60

Langkah kita selanjutnya adalah mendistribusikan data-data tersebut ke dalam kelas-kelas interval. Untuk membagi data menjadi beberapa kelas, kita menggunakan aturan Sturgess. Aturan tersebut dinyatakan bahwa jika data yang diamati banyaknya n dan banyak kelas adalah k, maka banyak kelas dirumuskan:

$k = 1 + (3{,}3) \times \log n$

Untuk data di atas diperoleh,

$$\begin{aligned}\text{banyak kelas} &= 1 + (3{,}3) \times \log 80\\ &= 1 + (3{,}3) \times (1{,}903)\\ &= 7{,}28 \approx 7\end{aligned}$$

Jadi 80 data di atas akan dibagi menjadi 7 kelas interval.

Pertanyaan Kritis

1. Jelaskan mengapa angka pembulatan yang dipilih 7 bukan 8?
2. Jelaskan mengapa banyak kelas (*k*) harus bilangan bulat?

Sekarang kita tentukan berapa banyak data yang terdapat pada satu kelas interval. Banyak data dalam satu interval disebut panjang interval kelas yang dirumuskan:

$$\text{Panjang Kelas} = \frac{\text{Jangkauan}}{\text{Banyak kelas}}$$

Maka diperoleh:

$$\text{Panjang Kelas} = \frac{\text{Jangkauan}}{\text{Banyak kelas}} = \frac{60}{7} = 8{,}57 \approx 9$$

Selanjutnya, dengan adanya banyak kelas = 7 dan panjang kelas = 9 dapat kita gunakan untuk membentuk kelas interval yang dinyatakan sebagai berikut:

Kelas I : 38 – 46
Kelas II : 47 – 55
Kelas III : 56 – 64
Kelas IV : 65 – 73
Kelas V : 74 – 82
Kelas VI : 83 – 91
Kelas VII : 92 – 100

Hitung frekuensi anggota dari tiap kelas, dari hasil pengolahan data di atas dapat dibentuk ke dalam tabel sebagai berikut.

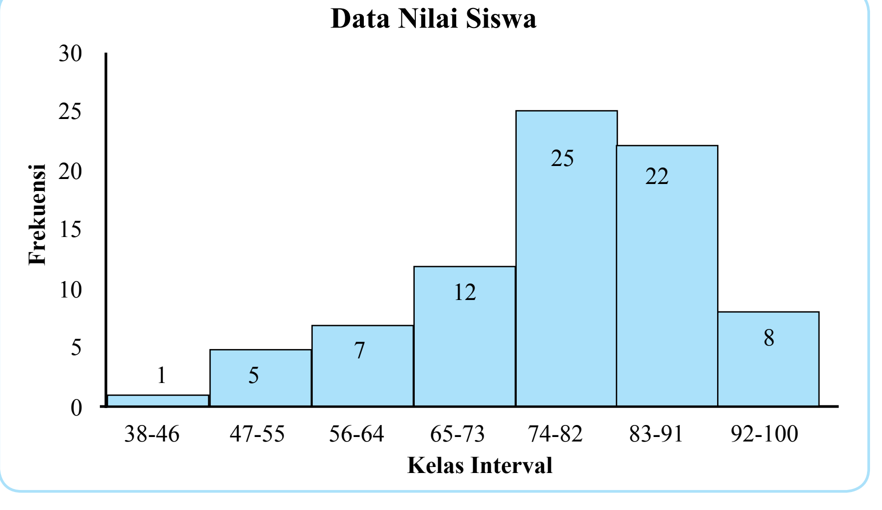
Tabel 11.10 Tabel Distribusi Frekuensi

Kelas	Frekuensi
38 – 46	1
47 – 55	5
56 – 64	7
65 – 73	12
74 – 82	25
83 – 91	22
92 – 100	8
Jumlah	80

Perlu dicermati bahwa pembentukan interval kelas tersebut harus memuat semua data. Jika ada satu data yang tidak tercakup pada interval kelas, maka terdapat kesalahan dalam mendistribusikan data.

a. Penyajian dalam bentuk diagram (Histogram)

Data pada tabel distribusi frekuensi dapat disajikan dengan menggunakan histogram. Prinsip penyajiannya hampir sama dengan menyajikan diagram batang yaitu meggambarkan grafik batang yang sama lebar namun tidak terputus-putus. Variabel pengamatan berupa interval-interval kelas yang sama panjang dihubungkan dengan nilai pengamatan berupa frekuensi. Maka dengan tabel distribusi frekuensi di atas dapat disajikan histogram berikut ini.



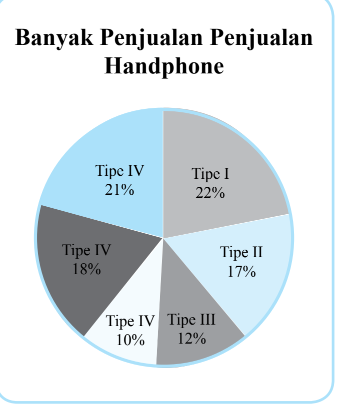
Dari pembahasan di atas dapat dinyatakan bahwa *histogram* adalah jenis grafik batang yang digunakan untuk menampilkan data numerik yang telah disusun dalam interval yang sama.

Pertanyaan Kritis

Mengapa pada histogram grafik batang tidak terputus-putus, jelaskan.

Uji Kompetensi 11.1

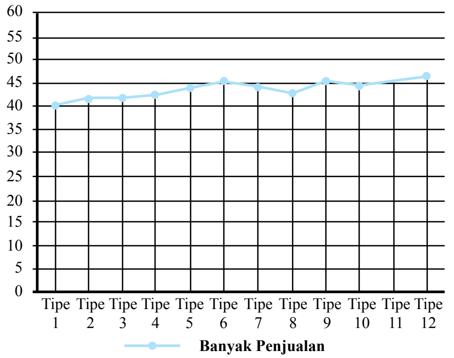
1. Banyak jam tidur yang ideal bagi anak sekolah adalah 10-11 jam per hari yang dibagi atas 8-9 jam di malam hari dan 2 jam di siang hari. Surveilah teman sekelasmu dan catatlah dalam bentuk tabel.
   a. Tentukan berapa banyak temanmu yang jam tidurnya berada di bawah dan di atas standar ideal!
   b. Tentukan berapa banyak temanmu yang tidur malam hari di bawah 9 jam!
2. Susunlah data berikut dalam bentuk tabel distribusi frekuensi :

   82, 41, 20, 90, 84, 48, 84, 76, 89, 78, 60, 43, 95, 74, 62, 88, 72, 64, 54, 83, 71, 41, 67, 81, 75, 98, 80, 25, 78, 64, 35, 52, 76, 55, 85, 92, 65, 81, 77, 80, 23, 60, 79, 32, , 36, 70, 57, 74, 79, 52.
3. 

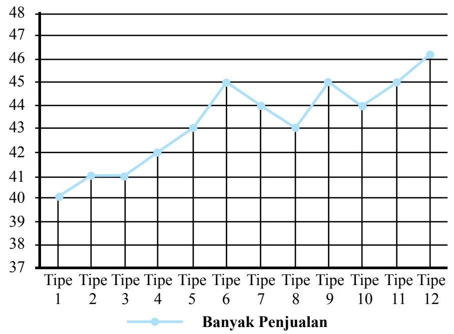
   Perhatikan diagram lingkaran di atas!
   a. Tentukan persentase penjualan handphone dari tipe IV dan tipe VI.
   b. Tentukanlah banyak unit yang dari tiap-tiap tipe dengan mengasumsikan sendiri total unit penjualan handphone.

Untuk menjawab soal no 4 - 6 perhatikan kedua diagram berikut:

Gambar 1

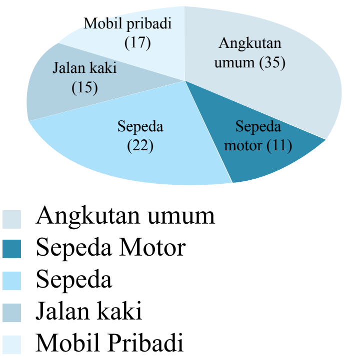


Gambar 2



4. Jelaskan mengapa kedua diagram di atas dengan data yang sama dapat terlihat berbeda?
5. Jelaskan pada saat kapan Gambar 1 dapat digunakan?
6. Jelaskan pada saat kapan Gambar 2 dapat digunakan?
7. Surveilah tinggi badan teman sekolahmu dan sajikan dalam bentuk ditribusi frekuensi!
8. Sajikan data pada soal no.7 dalam bentuk histogram
9. Hasil survey tentang cara beberapa siswa pergi ke sekolah ditunjukkan pada diagram lingkaran berikut.

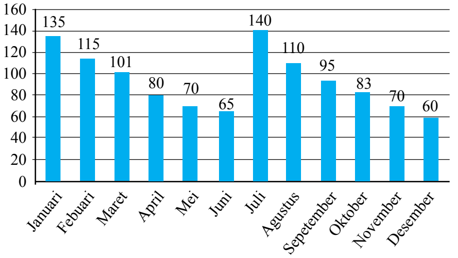
Cara Siswa Pergi ke Sekolah



a. Berapa banyak siswa yang disurvei?
b. Sebutkan cara yang paling sedikit digunakan siswa untuk pergi ke sekolah?
c. Sebutkan cara yang paling banyak digunakan siswa untuk pergi ke sekolah?
d. Berapa persen siswa yang pergi ke sekolah dengan jalan kaki?

10. Banyak penjualan buku tulis sebuah toko dalam satu tahun terakhir ditunjukkan oleh tabel berikut, (buku dalam satuan lusin).

Data Penjualan Buku Tulis



a. Berapa lusin buku yang mampu dijual toko tersebut dalam satu tahun terakhir?

b. Berapa rata-rata penjualan buku setiap bulan?

c. Amatilah penjualan pada semester I dan semester II tabel tersebut, apa yang dapat kamu simpulkan? Mengapa?

d. Berdasarkan data penjualan buku tersebut, terdapat pola penjualan yang dapat ditemukan. Temukanlah pola tersebut dan berikan pendapatmu mengapa bisa terjadi demikian.

Projek

Himpunlah informasi berupa data statistik dalam bidang ekonomi, kependudukan, dan meteorologi yang menerapkan berbagai konsep dan aturan statistik dalam menganalisis data. Selesaikanlah masalah tersebut menerapkan aturan-aturan statistik yang sudah kamu pelajari. Buatlah laporanmu dan sajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan materi yang telah kita uraikan di atas beberapa kesimpulan perlu kita rangkum guna mengingatkan kembali akan konsep yang nantinya sangat berguna bagi kamu sebagai berikut.

1. Penyajian data dalam bentuk grafik akan memudahkan kita untuk menganalisis data daripada hanya disajikan dalam bentuk informasi tertulis. Hal ini disebabkan karena melalui gambar atau grafik akan lebih cepat diketahui informasi yang ada daripada data disajikan dalam bentuk paragraph.
2. Penyajian data dalam bentuk grafik terdiri dari: penyajian data dengan tabel, diagram batang, diagram garis, diagram batang, dan histogram.
3. Penyajian data menggunakan tabel distribusi frekuensi dikenal aturan Sturgess. Aturan tersebut menyatakan bahwa jika data yang diamati banyaknya n dan banyak kelas adalah k maka banyak kelas dirumuskan: $k = 1 + (3{,}3 \times \log n)$.

Beberapa hal yang telah kita rangkum di atas adalah modal dasar bagi kamu dalam belajar statistika. Konsep-konsep dasar di atas harus kamu pahami dengan baik karena akan membantu dalam pemecahan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Catatan:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bab 12

Peluang

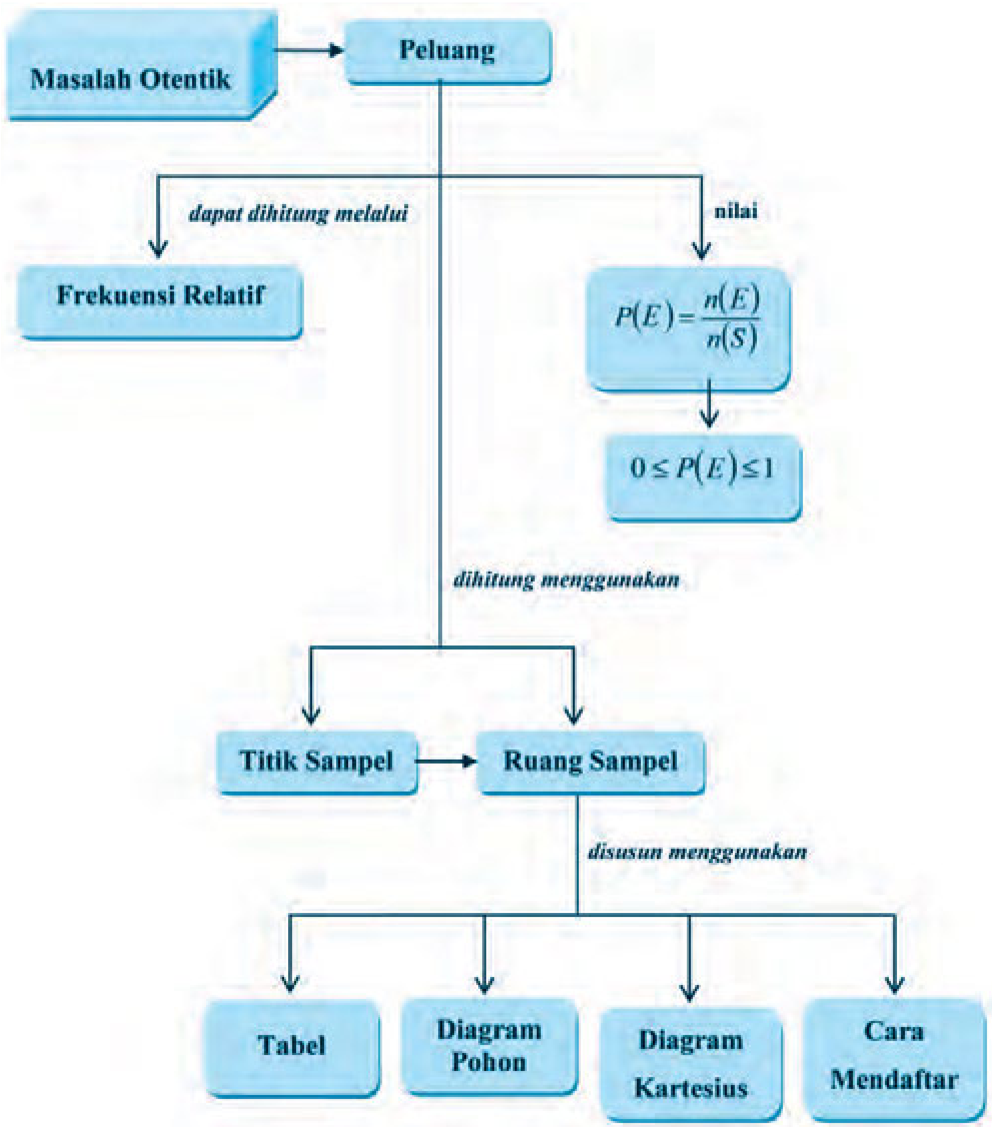
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran peluang siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 3. Mendeskripsikan konsep peluang suatu kejadian menggunakan berbagai objek nyata dalam suatu percobaan menggunakan frekuensi relatif. 4. Menyajikan hasil penerapan konsep peluang untuk menjelaskan berbagai objek nyata melalui percobaan menggunakan frekuensi relatif.	Melalui pembelajaran materi peluang, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip peluang melalui pemecahan masalah otentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. • Berkolaborasi memecahkan masalah autentik dengan pola interaksi edukatif. • Berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip peluang dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Frekuensi Relatif*
- *Titik Sampel*
- *Percobaan*
- *Kejadian*
- *Titik Sampel*
- *Ruang Sampel*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Pada bab ini, kita akan mempelajari konsep peluang yang sangat banyak diimplementasikan dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, kasus memprediksi kejadian yang mungkin terjadi, kasus memilih di antara beberapa pilihan. Hal ini berkaitan erat dengan proses pengambilan suatu keputusan, kasus perkiraan cuaca, hipotesis terhadap suatu penyakit, dan lain-lain. Walaupun semua membicarakan kejadian yang mungkin akan terjadi, tetapi kita juga harus tahu ukuran kejadian tersebut, mungkin terjadi atau tidak terjadi sehingga kita dapat menerka atau menebak apa yang mungkin terjadi pada kasus tersebut. Semua kasus ini, mengantar kita ke konsep peluang. Berikut, akan kita pelajari konsep peluang dengan mengamati beberapa kasus, masalah atau percobaan. Kita akan memulai pelajaran ini dengan mempelajari kejadian, frekuensi relatif dan konsep peluang.

1. Kemungkinan suatu kejadian.

Dalam melakukan percobaan sederhana, kita tentu harus menduga hasil yang mungkin terjadi, atau apa saja yang mungkin terjadi dari percobaan tersebut. Ingat, konsep ini akan mengantarmu ke kajian konsep peluang yang lebih dalam yaitu kaidah pencacahan tetapi materi kaidah pencacahan akan kamu pelajari di kelas XI. Jadi, kita hanya membahas sekilas masalah hasil kemungkinan yang dapat terjadi pada suatu percobaan pada sub-bab ini. Perhatikan masalah berikut.

Masalah-12.1

Berikut beberapa kasus yang memunculkan suatu kejadian yang mungkin terjadi. Dapatkah kamu memberikan dugaan apa saja yang mungkin terjadi pada masing – masing kasus berikut?

a. Jika cuaca berubah – ubah, terkadang hujan, terkadang cuaca panas silih berganti maka dugaan apa yang anda miliki pada seorang anak yang bermain – main di lapangan pada cuaca ekstrim tersebut?
b. Sebuah dadu setimbang sisi 6 dengan penomoran 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 ditoss, dugaan apa yang mungkin terjadi?
c. Dua buah dadu setimbang sisi 6 dengan penomoran 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 ditoss, dugaan apa yang mungkin terjadi?
d. Di dalam sebuah kotak terdapat beberapa manik-manik dengan berwarna berbeda, yaitu merah, putih, kuning, hijau dan biru. Tidak ada manik-manik

berjumlah tunggal untuk masing-masing warna. Seorang anak diminta mengambil 2 buah manik-manik sekaligus dengan acak. Dapatkah kamu tentukan pasangan warna manik-manik yang mungkin terjadi?

e. Di dalam sebuah kotak terdapat beberapa manik-manik dengan berwarna berbeda, yaitu merah, putih, kuning, hijau, dan biru. Tidak ada manik-manik berjumlah tunggal untuk masing-masing warna. Seorang anak diminta mengambil sebuah manik-manik sebanyak dua kali. Dapatkah kamu tentukan pasangan warna manik-manik yang mungkin terjadi?

Alternatif Penyelesaian

a. Hasil yang mungkin terjadi adalah bahwa anak tersebut akan sakit (kesehatan menurun) atau anak tersebut sehat-sehat saja. Pada kasus ini, kita memiliki 2 hasil yang terjadi.

b. Bila dadu tersebut setimbang, maka kejadian yang mungkin terjadi adalah munculnya sisi dadu dengan nomor 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Dengan demikian, terdapat 6 hasil yang terjadi.

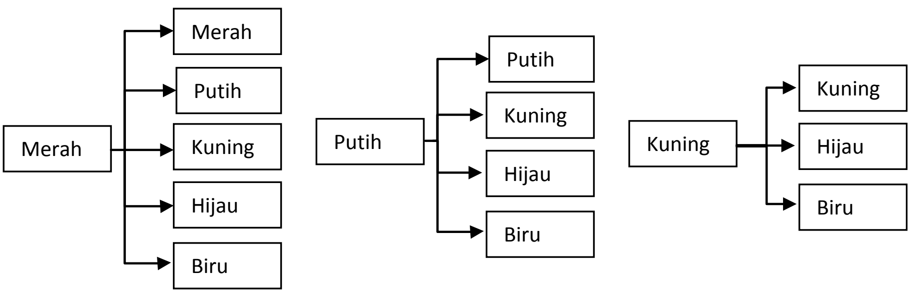
c. Jika dibuat sebuah tabel, maka diperoleh pasangan angka berikut:

Tabel 12.1 Pasangan mata dadu I dan mata dadu II

	Dadu I						
Dadu II		1	2	3	4	5	6
	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dari banyak pasangan angka pada setiap sel dalam tabel maka terdapat 36 hasil yang mungkin terjadi.

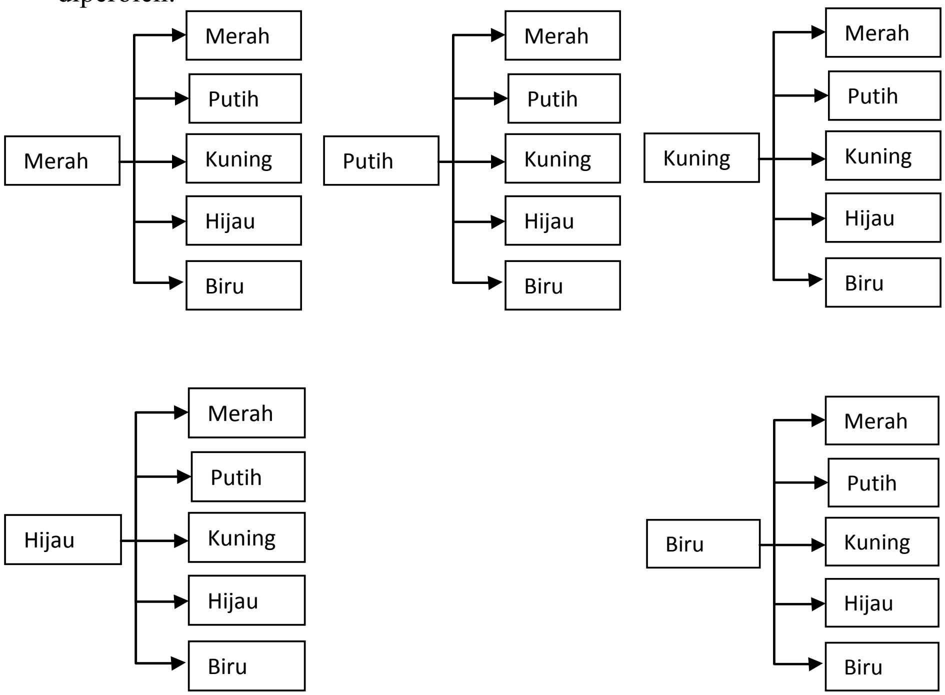
d.



Gambar 12.1 Pasangan warna pengambilan sekaligus 2 manik – manik

Misalkan M = merah, P = putih, K = kuning, H = hijau dan B = biru. Pasangan warna yang mungkin terjadi adalah MM, MP, MK, MH, MB, PP, PK, PH, PB, KK, KH, KB, HH, HB, BB. Terdapat 15 hasil yang mungkin terjadi.

e. Jika kita buat pohon faktor dari pengambilan manik – manik tersebut maka diperoleh:



Gambar 12.2 Pasangan warna dua manik-manik

Misalkan M = merah, P = putih, K = kuning, H = hijau dan B = biru. Dari pohon faktor tersebut, dapat kita lihat segala kemungkinan pasangan warna manik - manik yang akan terjadi yaitu MM, MP, MK, MH, MB, PM, PP, PK, PH, PB, KM, KP, KK, KH, KB, HM, HP, HK, HH, HB, BM, BP, BK, BH, BB. Terdapat 25 hasil yang mungkin terjadi.

Contoh 12.1

a. Sebuah koin (sama dan setimbang) bersisi Gambar (G) dan Angka (A) ditoss 120 kali. Tentukanlah segala kemungkinan terjadi.

b. Dua buah koin (sama dan setimbang) bersisi Gambar (G) dan Angka (A) ditoss 120 kali. Tentukanlah segala kemungkinan terjadi.

c. Tiga buah koin (sama dan setimbang) bersisi Gambar (G) dan Angka (A) ditoss 120 kali. Tentukanlah segala kemungkinan terjadi.

Alternatif Penyelesaian

a. Ada 2 hasil yang mungkin terjadi.

Tabel 12.2 Hasil yang mungkin terjadi pada pelemparan 1 koin

Koin	A	G

b. Ada 4 hasil yang mungkin terjadi.

Tabel 12.3 Hasil yang mungkin terjadi pada pelemparan 2 koin

Koin 1	A	A	G	G
Koin 2	A	G	A	G

c. Ada 8 hasil yang mungkin terjadi.

Tabel 12.4 Hasil yang mungkin terjadi pada pelemparan 3 koin

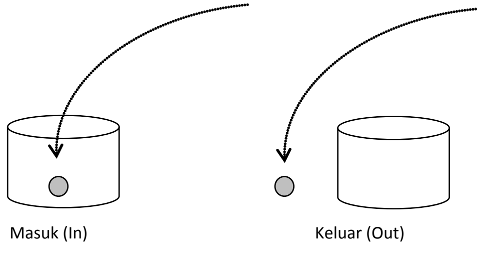
Koin 1	A	A	A	A	G	G	G	G
Koin 2	A	A	G	G	A	A	G	G
Koin 3	A	G	A	G	A	G	A	G

Berdasarkan masalah dan contoh di atas, dapat kita tentukan bahwa banyak kemungkinan hasil yang terjadi. Kumpulan semua hasil yang mungkin terjadi disebut dengan ruang sampel (disimbolkan S) dan himpunan bagian S disebut dengan hasil yang diharapkan muncul atau kumpulan dari hasil yang diharapkan muncul dari sebuah percobaan (disimbolkan E). Jadi, ingat, ruang sampel adalah sebuah himpunan. Banyaknya anggota dalam himpunan S disebut dengan kardinal S (disimbolkan $n(S)$).

2. Frekuensi relatif suatu hasil percobaan.

Setelah kita mempelajari suatu hasil yang mungkin terjadi pada suatu kasus, maka pada kesempatan ini, kita akan mengkaji banyaknya hasil-hasil yang mungkin terjadi tersebut dalam beberapa kali percobaan. Mari pelajari kembali kasus berikut.

a. Seorang anak melakukan sebuah permainan melempar bola ke sebuah tabung yang diletakkan beberapa meter di depannya. Bola terkadang masuk dan terkadang keluar dari tabung tersebut. Anak tersebut melakukan lemparan bola sebanyak 100 kali. Hasil lemparan (masuk atau keluar) ditampung dalam papan tabel sebagai berikut.

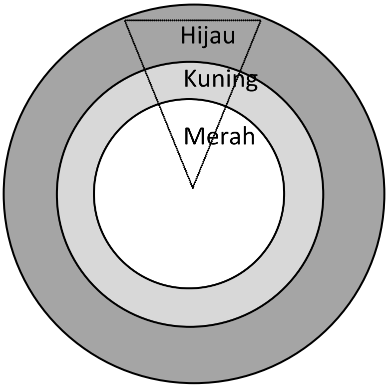


Gambar 12.3 Melempar bola kedalam tabung

Tabel 12.5 Frekuensi lemparan bola (masuk/keluar)

	Hasil Lemparan	Jumlah (Frekuensi)
Hasil	Masuk (In)	45
	Keluar (Out)	55

b. Seorang atlit lempar melakukan latihan lempar cakram sebanyak 80 kali di lapangan latihan untuk persiapan menghadapi PON. Daerah lemparan cakram dibagi atas 3 zona dengan penilaian yang berbeda yaitu zona merah (lemparan terlalu dekat), zona kuning (lemparan mencapai target) dan zona hijau (lemparan sangat jauh). Lemparan yang baik yang diharapkan atlit adalah jatuh di zona hijau. Berikut hasil lemparan atlit tersebut.



Gambar 12.4 Zona lemparan cakram

Tabel 12.6 Frekuensi lemparan cakram ke ketiga zona

	Zona	Keterangan	Banyak Lemparan (frekuensi)
Hasil	Merah	Kurang	15
	Kuning	Cukup	60
	Hijau	Baik	5

c. Sebuah dadu tetrahedral setimbang (bersisi empat dengan nomor 1, 2, 3, dan 4) ditoss sebanyak 200 kali. Setiap hasil yang ditunjukkan sisi setiap kali ditoss, dicatat pada tabel berikut.

Tabel 12.7 Frekuensi muncul mata dadu tetrahedral

	Hasil			
Mata dadu	1	2	3	4
Frekuensi	20	65	75	40

Masalah-12.2

Dari ketiga kasus di atas, dapat kita tentukan % frekuensi terjadinya setiap hasil yang mungkin terjadi. Tentu saja, % frekuensi yang dimaksud adalah sebuah perbandingan antara frekuensi terjadi suatu hasil dengan banyaknya frekuensi percobaan dilakukan. Apa yang dimaksud dengan perbandingan frekuensi tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Jika kamu amati ketiga tabel di atas maka tentu kamu mendapatkan perbedaan yang kontras di antara ketiga tabel tersebut yaitu banyak pilihan (kemungkinan yang terjadi) pada setiap kasus.

Kasus a. mempunyai dua pilihan hasil yaitu masuk atau keluar. Kasus b. mempunyai tiga pilihan hasil yaitu zona merah, zona kuning dan zona hijau. Kasus c. mempunyai empat pilihan hasil yaitu mata 1, mata 2, mata 3 dan mata 4.

Perhatikan tabel berikut!

Kasus a.

Tabel 12.8 Frekuensi relatif lemparan cakram ke ketiga zona

Hasil Lemparan	Jumlah (frekuensi)	% Hasil
Masuk (In)	45	45%
Keluar (Out)	55	55%
Total Lemparan	100	100%

Kasus b.

Tabel 12.9 Frekuensi relatif lemparan cakram ke ketiga zona

Zona	Keterangan	Banyak lemparan (frekuensi)	% Hasil
Merah	Kurang	15	18,75%
Kuning	Cukup	60	75,00%
Hijau	Baik	5	6,25%
Total		80	100%

Kasus c.

Tabel 12.10 Frekuensi relatif muncul mata dadu tetrahedral

Mata dadu	1	2	3	4	Total
Frekuensi	20	65	75	40	200
% Hasil	10%	32,5%	37,5%	20%	100%

Ingat, perbandingan antara banyak terjadi sebuah kemungkinan hasil dengan banyak percobaan yang dilakukan disebut frekuensi relatif (disimbolkan (f_r)).

Definisi 12.1

Misalkan E *adalah* suatu hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan. Frekuensi Relatif E atau $f_r(E)$ adalah hasil bagi antara banyak hasil E dengan banyak percobaan.

3. Peluang suatu Kejadian

Kita telah membahas suatu hasil yang mungkin terjadi pada suatu percobaan, bukan? Himpunan dari semua hasil tersebut disebut dengan ruang sampel dan hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan disebut dengan kejadian. Jadi, jelas bahwa kejadian adalah anggota dari ruang sampel.

Berikutnya, kita akan mencoba menemukan konsep peluang dengan mengamati kaitannya dengan frekuensi relatif setiap kemungkinan hasil yang terjadi pada percobaan. Dengan demikian, kamu dianjurkan melakukan beberapa percobaan pada kegiatan di bawah ini.

Kegiatan 12.1

Lakukanlah kegiatan melempar sebuah koin sebanyak 120 kali bersama dengan temanmu. Lakukanlah kegiatan ini secara bertahap, dan tuliskan hasil percobaan dalam tabel berikut:

Tabel 12.3 Hasil Dari Percobaan Pelemparan Sebuah Koin

Tahap	Banyak Pelemparan	BMSG	BMSA	$\frac{\text{BMSG}}{\text{BP}}$	$\frac{\text{BMSA}}{\text{BP}}$
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)
I	20	8	12	$\frac{8}{20}$	$\frac{12}{20}$
II	40				
III	60				
IV	80				
V	100				
VI	120				

Keterangan:
BMSG adalah Banyak Muncul Sisi Gambar
BMSA adalah Banyak Muncul Sisi Angka
BP adalah Banyak Percobaan

Perhatikan data pada Tabel-12.3 di atas dan cobalah diskusikan dengan temanmu beberapa pertanyaan berikut:

a. Sebelum melakukan percobaan, buatlah dugaanmu, apakah banyak (frekuensi) muncul sisi gambar relatif sama (frekuensi) muncul sisi angka?
b. Jika pelemparan koin tersebut dilakukan 20 sampai 120 kali, buatlah dugaanmu terhadap perbandingan frekuensi muncul gambar dan angka?
c. Benarkah dugaan bahwa data pada kolom iii dan iv, diperoleh hasil yang relatif sama?
d. Benarkah dugaan bahwa data pada kolom v dan vi, diperoleh hasil yang relatif sama, dan nilai perbandingan banyak muncul gambar atau angka dengan banyak percobaan mendekati $\frac{1}{2}$?

Misalkan banyak percobaan melambungkan sebuah koin adalah 20 kali dan diperoleh hasil frekuensi muncul gambar adalah 8 kali dan muncul angka adalah 12 kali. Dalam percobaan ini, frekuensi relatif muncul sisi gambar adalah 8 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r\,(G) = \frac{8}{20}$. Frekuensi muncul sisi angka adalah 12 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(A) = \frac{12}{20}$.

Coba bandingkan frekuensi relatif dari tiap-tiap banyak pelemparan yang tertera pada Tabel-12.3 di atas! Apakah keenam frekuensi relatif dari tiap-tiap percobaan tersebut mendekati suatu nilai tertentu? Kesimpulan apa yang dapat kamu kemukakan?

Kegiatan 12.2

Dalam kegiatan-2 ini, kita melakukan percobaan dengan menggunakan dadu 6 sisi. Lakukanlah kegiatan melambungkan sebuah dadu sebanyak 120 kali bersama dengan temanmu satu kelompok. Lakukan kegiatan ini secara bertahap, dan tuliskan hasil yang diperoleh dalam bentuk tabel berikut:

Tabel 12.4 Hasil Percobaan Pelemparan Sebuah Dadu 6 Sisi

Tahap	Banyak Pelemparan	Frekuensi Muncul Angka Dadu											
		1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
I	20												
II	40												

III	60												
IV	80												
V	100												
VI	120												

Perhatikan data pada **Tabel-12.4** di atas dan cobalah diskusikan dengan temanmu beberapa pertanyaan berikut:

1. Sebelum melakukan percobaan, buatlah dugaanmu, apakah banyak (frekuensi) muncul angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 relatif sama banyak?
2. Jika pelemparan dadu tersebut dilakukan 20 sampai 120 kali, buatlah dugaanmu bagaimana perbandingan frekuensi muncul angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6?
3. Benarkah dugaan bahwa data pada kolom (3), (4), (5), (6), (7), dan (8) diperoleh hasil yang relatif sama?
4. Benarkah dugaan bahwa data pada kolom (9), (10), (11), (12), (13), dan (14) diperoleh hasil yang relatif sama, dan nilai perbandingan banyak muncul angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 dengan banyak percobaan mendekati $\frac{1}{6}$?

Misalkan banyak percobaan melambungkan sebuah dadu adalah 20 kali dan diperoleh hasil frekuensi muncul angka 1 sampai angka 5 adalah 3 kali dan muncul angka 6 adalah 5 kali. Dalam percobaan ini, frekuensi relatif muncul angka 1, 2, 3, 4, dan 5 adalah 3 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(1) = \frac{3}{20}$. Frekuensi relatif muncul angka 2 adalah 3 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(2) = \frac{3}{20}$. Frekuensi relatif muncul angka 6 adalah 5 dari 20 kali percobaan, ditulis $f_r(6)= \frac{5}{20}$. Selanjutnya coba bandingkan frekuensi relatif dari masing-masing banyak pelemparan yang tertera pada Tabel-12.5 di atas! Apakah keenam sisi dadu memiliki frekuensi relatif dari masing-masing percobaan tersebut mendekati suatu nilai tertentu? Kesimpulan apa yang dapat kamu kemukakan?

Berdasarkan pengamatan terhadap frekuensi relatif suatu kejadian pada sub-bab 2 dan kegiatan 12.1 dan kegiatan 12.2 di atas, peluang suatu kejadian adalah pendekatan nilai frekuensi relatif dari kejadian tersebut, dapat dirumuskan sebagai berikut:

Misalkan suatu percobaan dilakukan sebanyak n kali. Jika kejadian E muncul sebanyak k kali ($0 < k < n$), maka frekuensi relatif kejadian E ditentukan dengan rumus:

$$f_r(E) = \frac{k}{n}$$

Jika nilai n mendekati tak-hingga maka nilai $\frac{k}{n}$ cenderung konstan mendekati nilai tertentu. Nilai tertentu ini adalah nilai peluang munculnya kejadian E.

Definisi 12.2

1. Titik sampel atau hasil yang mungkin terjadi peda sebuah percobaan.
2. Kejadian (E) adalah hasil yang mungkin terjadi atau kumpulan hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan.
3. Ruang sampel (S) adalah himpunan semua hasil dari suatu percobaan.
4. Kejadian (E^c) adalah himpunan bagian dari ruang sampel yang tidak memuat kejadian E. (E^c dibaca komplemen E)

Contoh 12.2

Perhatikan kembali Contoh 12.1c. Tiga buah koin setimbang dengan sisi (Gambar (G), Angka (A)) ke atas secara bersamaan. Tentukan ruang sampel dan banyak ruang sampel dan banyak kejadian muncul dua Angka.

Alternatif Penyelesaian

Semua kemungkinan yang muncul pada kasus pelemparan ketiga koin tersebut adalah (A,A,A), (A,A,G), (A,G,A), (G,A,A), (G,G,A), (G,A,G), (A,G,G), dan (G,G,G). Dengan demikian ruang sampel percobaan tersebut adalah sebuah himpunan S = {(A,A,A), (A,A,G), (A,G,A), (G,A,A), (G,G,A), (G,A,G), (A,G,G), (G,G,G)}. Banyak anggota ruang sampel adalah $n(S) = 8$. Himpunan E = {(A,A,G), (A,G,A), (G,A,A)}. Banyak anggota himpunan harapan muncul 2 Angka adalah $n(E) = 3$.

Definisi peluang suatu kejadian dapat disajikan secara matematis sebagai berikut.

Definisi 12.3

Peluang suatu kejadian *E* adalah hasil bagi banyak hasil dalam *E* dengan banyak anggota ruang sampel *S* dari suatu percobaan, ditulis:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

n (*E*) : banyak anggota *E*.
n (*S*) : banyak anggota ruang sampel.

Contoh 12.3

Gambar 12.6 Dua Buah Dadu Setimbang

Seorang anak melempar dua dadu setimbang ke atas. Tentukanlah ruang sampel dan peluang muncul jumlah mata dadu kurang dari 7.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan kembali Masalah 12.1c. Untuk memperlihatkan kejadian dan ruang sampel maka perhatikan tabel berikut!

Tabel 12.13 Ruang Sampel dari Hasil Pelemparan Dua Dadu

(+)	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Dari tabel, dapat dilihat banyak ruang sampel adalah 36 (atau $n(S) = 36$). Kejadian yang diharapkan muncul adalah jumlah mata dadu kurang dari 7 adalah 15 kejadian (atau $n(E) = 15$). Berdasarkan konsep peluang maka peluang muncul jumlah mata dadu kurang dari 7 adalah $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{36}$

Latihan 1.1

1. Pada pelemparan dua buah dadu, E merupakan kejadian munculnya mata dadu yang jumlahnya lebih besar sama dengan dua., tentukanlah kejadian E?
2. Mungkinkah suatu kejadian sama dengan ruang sampel.
3. Dapatkah kamu temukan kejadian diluar E? Jelaskan.

Contoh 12.4

Di awal pertandingan olah raga kartu truf, seorang pemain mencabut sebuah kartu untuk mendapatkan kartu As untuk menjadi tambahan nilainya. Jika dalam satu set kartu truf ingin dicabut kartu As sekop

(lihat gambar di samping). Tentukan nilai ruang sampel

dan nilai peluang terambilnya kartu As Sekop! Berapa peluang terambilnya kartu bernomor 10?

Alternatif Penyelesaian

Pada percobaan menggunakan satu set kartu truf terdapat empat jenis kartu, yakni: wajik (♦), hati (♥), klaver (♣), dan Sekop (♠).

Misalkan Wajik = W, Hati = H, Klaver = K, dan Sekop = S dan k = king, q = queen, j = pro. Jika H adalah ruang sampel maka:

H = {(kS), (qS), (jS), (10S), (9S), (8S), (7S), (6S), (5S), (4S), (3S), (2S), (AsS), (kK), (qK), (jK), (10K), (9K), (8K), 7K), (6K), (5K), (4K), (3K), (2K), (AsK),(kH), (qH), (jH), (10H), (9H), (8H), (7H), (6H), (5H), (4H), (3H), (2H), (AsH), (kW), (qW), (jW), (10W), (9W), (8W), (7W), (6W), (5W), (4W), (3W), (2W), (AsW)}
atau

Misal E_1 adalah pengambilan kartu As Sekop, maka diperoleh E_1 = {(As)} sehingga $n\ (E_1) = 1$.

Jadi peluang terambilnya kartu As Sekop adalah

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(H)} = \frac{1}{52}$$

Misal E_2 adalah pengambilan kartu bernomor 10, maka diperoleh E_2 = {(10W), (10H), (10K), (10S)}, sehingga n(E_2) = 4

Jadi peluang terambilnya kartu bernomor 10 adalah

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(H)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Gambar 12.7 Kartu Bridge

Contoh 12.5

Dua koin setimbang dan sebuah dadu sisi 6 ditos. Tentukanlah peluang muncul dua gambar dan bilangan prima pada pelemparan tersebut.

Alternatif Penyelesaian

Pertama sekali, kita harus mencari ruang sampel dan kejadian yang diharapkan muncul. Perhatikan Tabel berikut.

Tabel 12.14 Pasangan dua koin dan satu dadu.

	Mata Dadu						
	pasangan	1	2	3	4	5	6
Dua Buah Koin	AA	AA1	AA2	AA3	AA4	AA5	AA6
	AG	AG1	AG2	AG3	AG4	AG5	AG6
	GA	GA1	GA2	GA3	GA4	GA5	GA6
	GG	GG1	**GG2**	**GG3**	GG4	**GG5**	GG6

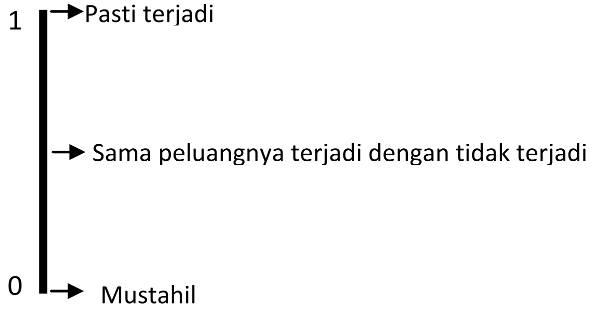
Dari tabel di atas, dapat ditentukan banyak ruang sampel $n(S)$ = 24. E adalah muncul dua gambar dan bilangan prima pada pelemparan tersebut sehingga E = {GG2, GG3, GG5} atau $n(E)$ = 3 sehingga peluang muncul dua gambar dan bilangan prima pada pelemparan tersebut adalah $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

Berdasarkan berbagai pemecahan masalah penentuan nilai peluang suatu kejadian yang telah diuraikan di atas, maka nilai peluang suatu kejadian dapat dipastikan terletak pada interval [0, 1]. Kita tetapkan sifat nilai peluang sebagai berikut.

Sifat-12.1

Misalkan E suatu kejadian dan S adalah ruang sampel dalam sebuah percobaan dan komponen dari S adalah $S^c \varnothing =$.
1. Peluang kejadian E memenuhi $P(E)$, $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. $P(\varnothing) = 0$

Peluang suatu kejadian adalah 1 berarti bahwa kejadian tersebut pasti terjadi dan peluang kejadian adalah 0 berarti bahwa kejadian tersebut mustahil terjadi.

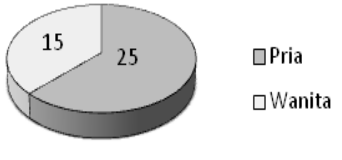


Gambar 12.8 Peluang kejadian E memenuhi $P(E)$, $0 \leq P(E) \leq 1$

Contoh 12.6

Di dalam sebuah kelas terdapat 40 orang siswa, yaitu 25 pria dan 15 wanita. Di antara mereka akan dipilih satu orang untuk menjadi ketua kelas. Tentukan peluang terpilih adalah siswa pria? Tentukan peluang terpilih adalah siswa wanita?

Alternatif Jawaban



Gambar 12.9 Diagram lingkaran jumlah pria dan wanita

S adalah himpunan siswa pria sehingga $n(S) = 40$

E adalah himpunan siswa pria sehingga $n(E) = 25$

E^c adalah himpunan siswa wanita sehingga $n(E^c) = 15$

Peluang terpilih pria adalah $P(E)=\dfrac{n(E)}{n(S)}=\dfrac{25}{40}$

Peluang terpilih wanita adalah $P(E^c)=\dfrac{n(E^c)}{n(S)}=\dfrac{15}{40}$

Jelas, bahwa $P(E)+P(E^c)=\dfrac{25}{40}+\dfrac{15}{40}=1$

Uji Kompetensi 12.1

1. Tentukan kejadian yang mungkin terjadi pada kasus berikut ini.
   a. Empat buah koin setimbang dengan sisi Gambar atau Angka.
   b. Sebuah koin setimbang (sisi Gambar atau Angka) ditos bersamaan dengan sebuah dadu enam sisi dengan angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.
   c. Didalam sebuah kotak terdapat beberapa manik – manik dengan berwarna berbeda, yaitu merah, putih, kuning, hijau dan biru. Tidak ada manik – manik berjumlah tunggal untuk masing - masing warna. Seorang anak diminta mengambil sebuah manik – manik sebanyak tiga kali.
2. Tunjukkan bahwa:
   a. Banyaknya anggota ruang sampel pelemparan n koin adalah 2_n.
   b. Banyaknya anggota ruang sampel pelemparan n dadu adalah 6_n.
3. Tentukan banyak ruang sampel pada kasus berikut
   a. Jika sebuah dadu dan sebuah mata koin dilemparkan secara bersamaan. Dengan menggunakan diagram pohon tentukan ruang sampel percobaan tersebut?
   b. Dari angka - angka 1, 2, 3, dan 4 akan dibentuk bilangan dengan 3 angka dan tidak boleh ada angka yang diulang.
   c. Kota B dapat dituju ke kota B dengan menggunakan 4 jenis bus angkutan umum, sementara dari kota B ke kota C dapat dituju dengan 5 jenis bus angkutan umum. Jika kota B adalah kota satu-satunya penghubung kota A dengan kota C maka tentukan pasangan bus yang dapat dipilih seseorang untuk bepergian dari kota A ke kota C
4. Dua dadu setimbang dilemparkan secara bersamaan. Jika E adalah kejadian jumlah mata dadu bilangan prima.

a. Berapakah peluang kejadian E?

b. Hitunglah peluang diluar kejadian E?

5. Tiga dadu setimbang dilemparkan secara bersamaan. Jika E adalah kejadian jumlah tiga mata dadu lebih besar dari 10.

c. Berapakah peluang kejadian E?

d. Hitunglah Peluang diluar kejadian E?

6. Di dalam kandang ayam terdapat 40 ekor ayam. 21 ekor diantaranya adalah jantan dan 19 ekor adalah ayam berbulu hitam. Andi menangkap seekor ayam tersebut, tentukan peluang ayam yang tertangkap adalah ayam betina berbulu tidak hitam jika banyak ayam jantan berbulu hitam adalah 15 ekor.

7. Dengan menggunakan konsep himpunan, tunjukkan bahwa $0 \leq P(E) \leq 1$ dengan adalah $P(E)$ peluang kejadian E.

8. Tiga buah koin setimbang ditoss bersama dengan sebuah dadu setimbang sisi enam. Tentukan peluang kejadian berikut:

a. Peluang munculnya 2 angka dan bilangan genap.

b. Peluang munculnya paling sedikit 2 angka dan bilangan kurang dari 5.

c. Peluang munculnya banyaknya angka selalu lebih banyak dengan munculnya gambar dan bilangan faktor 6.

9. Perhatikan beberapa data berikut:

9, 6, 7, 7, 7, 5, 7, 8, 5, 8, 8, 8, 8, 9, 5, 6, 7, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 4, 5, 6, 7, 8, 6, 5, 6, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 6, 7, 7, 3, 4, 5, 3, 6, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 9, 9, 9, 9, 8, 8, 9, 5, 6, 7, 4, 6, 9, 6, 7, 7, 7, 7, 5, 7, 8, 5, 3, 5, 6, 7, 4, 6, 9, 9, 8, 9, 7, 5, 6, 7.

Sajikan data tersebut ke dalam diagram lingkaran dan tabel. Tunjukkan frekuensi relatif masing – masing data tersebut.

10. S adalah ruang sampel dan E adalah himpunan kejadian yang diharapkan muncul dengan $n(E) = x^2 - x + 1$ dan $n(S) = [n(E)]^2 - n(E) - 1$.

Jika $P(E) = 3/5$ maka tentukanlah $x^2 + x + 1$

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep peluang di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Frekuensi relatif dari suatu hasil yang mungkin terjadi dalam suatu percobaan adalah perbandingan banyaknya hasil yang terjadi dalam suatu percobaan dengan banyaknya percobaan dilakukan. Ditulis

$$\text{Frekuensi relatif} = \frac{\text{Banyak hasil yang terjadi}}{\text{Banyak percobaan}}$$

2. Sampel adalah semua hasil yang mungkin terjadi dari sebuah percobaan.
3. Ruang sampel (S) adalah suatu himpunan yang anggotanya semua kejadian yang mungkin terjadi dalam percobaan atau suatu himpunan yang anggotanya titik-titik sampel.
4. Kejadian (E) adalah himpunan bagian dari ruang sampel S.
5. Ada beberapa cara untuk menyajikan semua kejadian yang mungkin muncul dalam suatu percobaan, yaitu: cara mendaftar, menggunakan diagram cartesisus, menggunakan tabel, dan menggunakan diagram pohon.
6. Peluang suatu kejadian E adalah hasil bagi banyaknya kemungkinan kejadian E terjadi dengan banyaknya anggota ruang sampel dari suatu percobaan, dirumuskan: $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$ dimana $n(E)$ adalah banyaknya kejadian E yang terjadi dan n(S) adalah banyak anggota ruang sampel suatu percobaan.
7. Peluang sebuah kejadian E tepat berada diantara nol dan satu, ditulis dengan: $0 \le P(E) \le 1$. Artinya jika peluang sebuah kejadian E adalah 0 maka kejadian E tidak terjadi, sedangkan jika peluang kejadian E adalah 1 maka kejadian E pasti terjadi
8. Jika E merupakan sebuah kejadian, maka kejadian yang berada di luar E adalah seluruh kejadian yang tidak terdaftar di E, disebut komplemen dari kejadian E, disimbolkan dengan E^c.
9. Jika E suatu kejadian dalam sebuah percobaan, maka jumlah nilai peluang kejadian E dan nilai peluang kejadian komplemen E adalah 1, ditulis . $P(E) + P(E^c) = 1$

Daftar Pustaka

Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). Elementary Linear Algebra with Applications. John Wiley & Sons, Inc

Ball, Deborah Loewenberg. (2003). Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education). United States of America: RAND.

Checkley , Kathy (2006). The Essentials of Mathematics, Grades 7 -12. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Chung, Kai Lai. (2001). A Course in Probability Theory, USA: Academic Press.

Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). Educating Teachers of science, mathematics, and technology (new practice for new millennium. United States of America: the national academy of sciences.

Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). Strings and Geometry. United States of America: Clay Mathematics Institute.

Hefferon, Jim (2006). Linear Algebra. United States of America: Saint Michael's College Colchester.

Howard, dkk. (2008). California Mathematics. Consepts, Skills, and Problem Solving 7. Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.

Johnstone. P.T. (2002). Notes on Logic and Set Theory. New York: University of Cambridge.

Magurn A, Bruce. (2002). Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.

Slavin, Robert, E. (1994). Educational psychology, theories and practice. Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.

Sinaga, Bornok. (2007). Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

Tan, Oon Seng. (1995). Mathematics. A Problem Solving Approach. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.

Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). Mathematics For Yhe International Student (International Baccalaureate Mathematics HL Course). Australia: Haese & Harris Publication.

Van de Walle, John A. (1990). Elementary school mathematics: teaching developmentally. New York: Longman.

Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). Elementary and Middle School Mathematics (teaching developmentally). United States of America: Allyn & Bacon.

Catatan: