MATEMATIKA

SMA/MA/
SMK/MAK
KELAS
XI
Semester 2

Disklaimer: *Buku ini merupakan buku siswa yang dipersiapkan Pemerintah dalam rangka implementasi Kurikulum 2013. Buku siswa ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, dan dipergunakan dalam tahap awal penerapan Kurikulum 2013. Buku ini merupakan "dokumen hidup" yang senantiasa diperbaiki, diperbaharui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.*

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Indonesia. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.
Matematika/Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan.-- Edisi Revisi.
Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2014.
vi, 230 hlm. : ilus. ; 25 cm.

Untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI Semester 2
ISBN 978-602-282-095-6 (jilid lengkap)
ISBN 978-602-282-098-7 (jilid 2b)

1. Matematika — Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan

510

Kontributor Naskah : Bornok Sinaga, Pardomuan N.J.M. Sinambela, Andri Kristianto Sitanggang, Tri Andri Hutapea, Lasker Pangarapan Sinaga, Sudianto Manullang, Mangara Simanjorang, dan Yuza Terzalgi Bayuzetra.
Penelaah : Agung Lukito, Turmudi, dan Dadang Juandi.
Penyelia Penerbitan : Pusat Kurikulum dan Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud.

Cetakan Ke-1, 2014
Disusun dengan huruf Times New Roman, 11 pt.

Kata Pengantar

Matematika adalah bahasa universal untuk menyajikan gagasan atau pengetahuan secara formal dan presisi sehingga tidak memungkinkan terjadinya multi tafsir. Penyampaiannya adalah dengan membawa gagasan dan pengetahuan konkret ke bentuk abstrak melalui pendefinisian variabel dan parameter sesuai dengan yang ingin disajikan. Penyajian dalam bentuk abstrak melalui matematika akan mempermudah analisis dan evaluasi selanjutnya.

Permasalahan terkait gagasan dan pengetahuan yang disampaikan secara matematis akan dapat diselesaikan dengan prosedur formal matematika yang langkahnya sangat presisi dan tidak terbantahkan. Karenanya matematika berperan sebagai alat komunikasi formal paling efisien. Perlu kemampuan berpikir kritis-kreatif untuk menggunakan matematika seperti uraian diatas: menentukan variabel dan parameter, mencari keterkaitan antar variabel dan dengan parameter, membuat dan membuktikan rumusan matematika suatu gagasan, membuktikan kesetaraan antar beberapa rumusan matematika, menyelesaikan model abstrak yang terbentuk, dan mengkonkretkan nilai abstrak yang diperoleh.

Buku Matematika Kelas XI untuk Pendidikan Menengah ini disusun dengan tujuan memberi pengalaman konkret-abstrak kepada peserta didik seperti uraian diatas. Pembelajaran matematika melalui buku ini akan membentuk kemampuan peserta didik dalam menyajikan gagasan dan pengetahuan konkret secara abstrak, menyelesaikan permasalahan abstrak yang terkait, dan berlatih berfikir rasional, kritis dan kreatif.

Sebagai bagian dari Kurikulum 2013 yang menekankan pentingnya keseimbangan kompetensi sikap, pengetahuan dan keterampilan, kemampuan matematika yang dituntut dibentuk melalui pembelajaran berkelanjutan: dimulai dengan meningkatkan pengetahuan tentang metode-metode matematika, dilanjutkan dengan keterampilan menyajikan suatu permasalahan secara matematis dan menyelesaikannya, dan bermuara pada pembentukan sikap jujur, kritis, kreatif, teliti, dan taat aturan.

Buku ini menjabarkan usaha minimal yang harus dilakukan peserta didik untuk mencapai kompetensi yang diharapkan. Sesuai dengan pendekatan yang dipergunakan dalam Kurikulum 2013, peserta didik diberanikan untuk mencari dari sumber belajar lain yang tersedia dan terbentang luas di sekitarnya. Peran guru sangat penting untuk meningkatkan dan menyesuaikan daya serap peserta didik dengan ketersedian kegiatan pada buku ini. Guru dapat memperkayanya dengan kreasi dalam bentuk kegiatan-kegiatan lain yang sesuai dan relevan yang bersumber dari lingkungan sosial dan alam.

Implementasi terbatas pada tahun ajaran 2013/2014 telah mendapat tanggapan yang sangat positif dan masukan yang sangat berharga. Pengalaman tersebut dipergunakan semaksimal mungkin dalam menyiapkan buku untuk implementasi menyeluruh pada tahun ajaran 2014/2015 dan seterusnya. Walaupun demikian, sebagai edisi pertama, buku ini sangat terbuka dan terus dilakukan perbaikan untuk penyempurnaan. Oleh karena itu, kami mengundang para pembaca memberikan kritik, saran dan masukan untuk perbaikan dan penyempurnaan pada edisi berikutnya. Atas kontribusi tersebut, kami mengucapkan terima kasih. Mudah-mudahan kita dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan dunia pendidikan dalam rangka mempersiapkan generasi seratus tahun Indonesia Merdeka (2045).

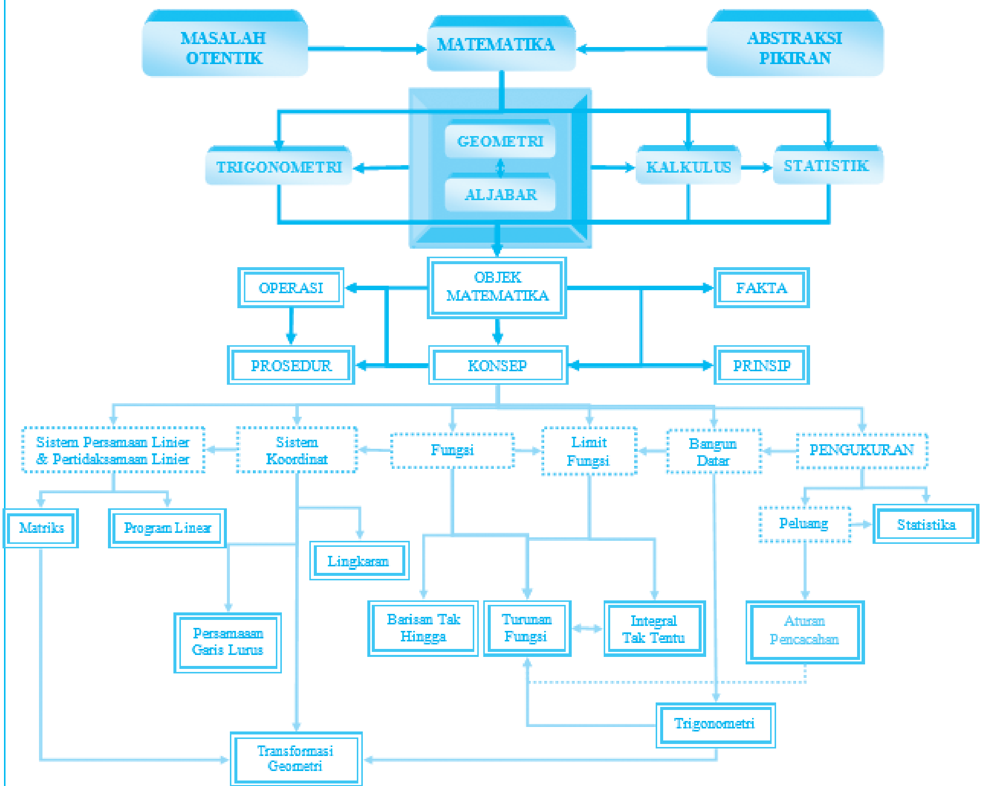
Jakarta, Januari 2014

Menteri Pendidikan dan Kebudayaan

Mohammad Nuh

DAFTAR ISI

PETA KONSEP MATEMATIKA SMA KELAS XI



KETERANGAN:

adalah materi prasyarat yang dipelajari SMP dan SMA kelas 10

adalah pokok bahasan yang dipelajari

adalah keterkaitan secara hirarkis matematika

adalah objek matematika yang dikaji pada setiap bahasan matematika

adalah bidang kajian matematika

Bab 7

STATISTIKA

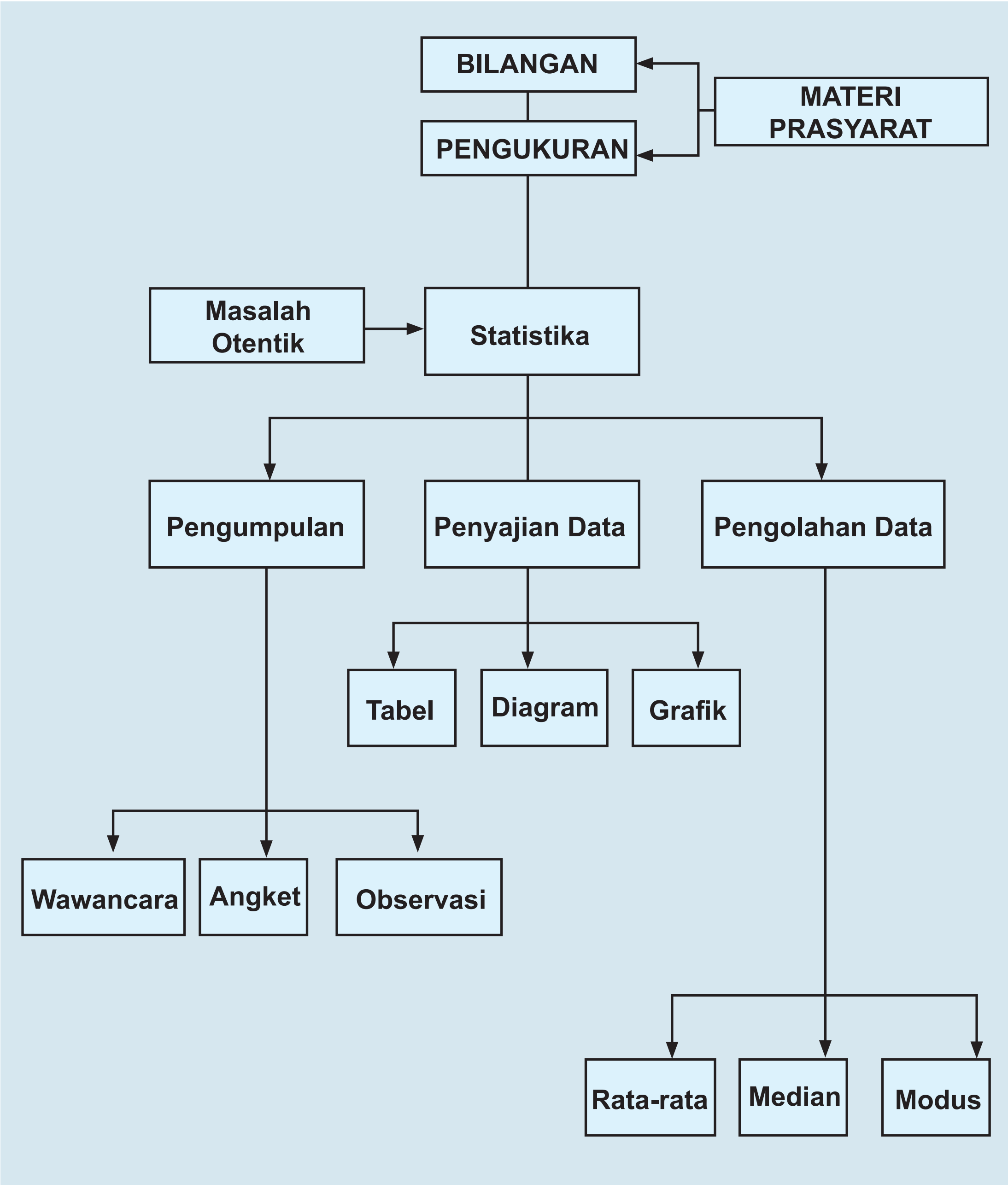
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Menghayati dan mengamalkan ajaran agama yang dianutnnya. 2. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 3. Mampu mentransformasi diri dalam berprilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 4. Menunjukkan sikap bertanggung jawab, rasa ingin tahu, jujur dan perilaku peduli lingkungan. 5. Mendeskripsikan dan menggunakan berbagai ukuran pemusatan, letak dan penyebaran data sesuai dengan karakteristik data melalui aturan dan rumus serta menafsirkan dan mengomunikasikannya. 6. Menyajikan dan mengolah data statistik deskriptif ke dalam tabel distribusi dan histogram untuk memperjelas dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kehidupan nyata. Mampu mentransformasi diri dalam berprilaku jujur, tangguh mengadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika.	Melalui pembelajaran materi peluang, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip statistik melalui pemecahan masalah autentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. • Berkolaborasi memecahkan masalah autentik dengan pola interaksi edukatif. • Berpikir tingkat tinggi dalam menyajikan, serta menga-nalisis statistik deskriptif.

Istilah Penting

- *Mean*
- *Median*
- *Modus*
- *Simpangan baku*
- *Varian*
- *Histogram*
- *Quartil*
- *Desil*
- *Persentil*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. UKURAN PEMUSATAN

Mean atau yang sering disebut sebagai rata-rata, median yang merupakan nilai tengah dari data yang telah diurutkan , dan modus yaitu data yang sering muncul merupakan nilai yang menggambarkan tentang pemusatan nilai-nilai dari data yang diperoleh dari suatu peristiwa yang telah diamati. Itulah sebabnya mean, median, dan modus disebut sebagai ukuran pemusatan. Untuk lebih memahami tentang ukuran pemusatan data, mari kita cermati dari masalah berikut ini.

Masalah-7.1

Kepala Sekolah SMA Negeri 1 Bakara-Baktiraja ingin mengevaluasi hasil belajar siswa dan meminta guru untuk memberikan laporan evaluasi hasil belajar siswa. Data hasil penilaian yang dilakukan guru matematika terhadap 64 siswa/siswi kelas XI dinyatakan sebagai berikut.

61	83	88	81	82	60	66	98	93	81	38	90	92	85	76	88	78	74	70	48
80	63	76	49	84	79	80	70	68	92	61	83	88	81	82	72	83	87	81	82
81	91	56	65	63	74	89	73	90	97	48	90	92	85	76	74	88	75	90	97
75	83	79	86	80	51	71	72	82	70	93	72	91	67	88	80	63	76	49	84

Guru berencana menyederhanakan data tunggal tersbut menjadi bentuk data berinterval dan membuat statitistiknya, hal ini dilakukan untuk mengefisienkan laporan evaluasi hasil belajar siswa. Bantulah guru tesebut untuk menyusun laporannya!

Alternatif Penyelesaian

Untuk dapat memudahkan penggunaan data tersebut, susun data berdasarkan urutan terkecil hingga terbesar. Urutan data tersebut dinyatakan sebagai berikut.

38	48	48	49	49	51	56	60	61	61	63	63	63	65	66	67	68	70	70	70
71	72	72	72	73	74	74	74	75	75	76	76	76	76	78	79	79	80	80	80
80	81	81	81	81	81	82	82	82	82	83	83	83	83	84	84	85	85	86	87
88	88	88	88	88	89	90	90	90	90	91	91	92	92	92	93	93	97	97	98

Setelah data diurutkan, dengan mudah kita temukan, data terbesar adalah 98 dan data terkecil adalah 38. Selisih data terbesar dengan data terkecil disebut sebagai jangkauan data. Untuk data yang kita kaji, diperoleh:

Jangkauan Data adalah 60. Langkah kita selanjutnya adalah untuk mendistribusikan data-data tersebut ke dalam kelas-kelas interval. Untuk membagi data menjadi beberapa kelas, kita menggunakan aturan Sturgess. Aturan tersebut dinyatakan bahwa jika data yang diamati banyaknya n dan banyak kelas adalah k, banyak kelas dirumuskan sebagai berikut:

$k = 1 + (3, 3).\ \log n$

Untuk data di atas diperoleh,

$$\begin{aligned}\text{Banyak Kelas} &= 1 + (3{,}3).\ \log 80\\ &= 1 + (3{,}3).\ (1{,}903)\\ &= 7{,}28 = 7\end{aligned}$$

Jadi 80 data di atas akan dibagi menjadi 7 kelas interval.

Pertanyaan kritis:

Jelaskan mengapa angka pembulatan yang dipilih angka 7 bukan angka 8?

Sekarang kita perlu menentukan berapa banyak data yang terdapat pada satu kelas interval. Banyak data dalam satu interval, disebut panjang interval kelas, yang dirumuskan sebagai berikut:

Maka diperoleh: $\text{Panjang Kelas} = \dfrac{\text{Jangkauan data}}{\text{Banyak kelas}}$

dari data di atas dapat di peroleh

$$\text{Panjang Kelas} = \frac{\text{Jangkauan}}{\text{Banyak Kelas}} = \frac{60}{7} = 8{,}57 \approx 9$$

Selanjutnya, dengan adanya banyak kelas adalah 7 dan panjang kelas adalah 9 dapat kita gunakan untuk membentuk kelas interval yang dinyatakan sebagai berikut:

Kelas I : 38 – 46
Kelas II : 47 – 55
Kelas III : 56 – 64
Kelas IV : 65 – 73
Kelas V : 74 – 82
Kelas VI : 83 – 91
Kelas VII : 92 – 100

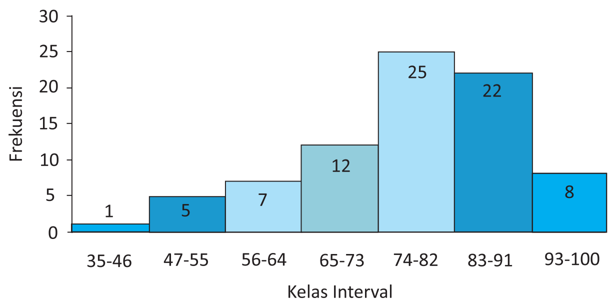
Dari hasil pengolahan data di atas dapat dibentuk ke dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 7.1. Tabel Frekuensi

Kelas	Frekuensi
38 – 46	1
47 – 55	5
56 – 64	7
65 – 73	12
74 – 82	25
83 – 91	22
92 – 100	8
	80

Perlu dicermati bahwa pembentukan interval kelas tersebut harus memuat semua data. Jika ada satu data yang tidak tercakup pada interval kelas, maka terdapat kesalahan dalam mendistribusikan data.

Bentuk histogram dari hasil pengolahan data nilai siswa di atas digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7.1 Histogram Data Nilai Siswa

a. Menentukan Nilai Mean (Rata-rata)

Sajian data pada tabel di atas, tentunya harus kita memaknai setiap angka yang tersaji.

Dari Interval 38 – 46 dapat diartikan bahwa:
38 disebut batas bawah interval
46 disebut batas atas interval.
Titik tengah interval, dinotasikan xi , diperoleh:

$$x_i = \frac{1}{2}\left[\left(\text{batas bawah interval ke - } i\right) + \left(\text{batas atas interval ke - } i\right)\right]$$

Sehingga: $x_1 = \frac{1}{2}\left[38 + 46\right] = 42$

Setiap interval memiliki batas bawah, batas atas, dan titik tengah interval (x_i).

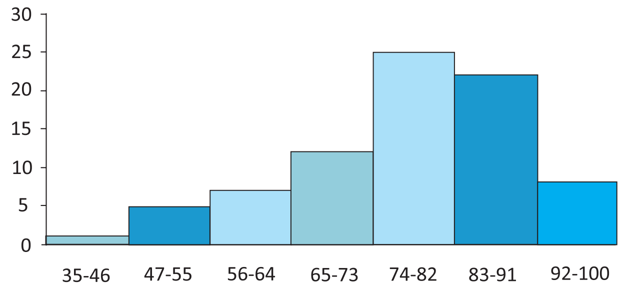
Data hasil belajar siswa di atas, dapat diperbaharui sebagai berikut:

Tabel 7.2 Tabel Frekuensi

Kelas	x_i	F	x_i . F
38 – 46	42	1	42
47 – 55	51	5	255
56 – 64	60	7	420
65 – 73	69	12	828
74 – 82	78	25	1,950
83 – 91	87	22	1,914
92 – 100	96	8	768
Total		**80**	**6,177**

Titik tengah setiap interval diartikan sebagai perwakilan data setiap interval. Nilai ini digunakan untuk menentukan rata-rata data tersebut.

Data yang diperoleh dari Tabel 7.2 dapat digambarkan kedalam bentuk histogram



Gambar 7.2 Histogram Data Nilai Siswa

Dengan mengembangkan konsep *mean* pada data tunggal, yakni, *mean* merupakan perbandingan jumlah seluruh data dengan banyak data. Dari tabel dan histogram dapat kita peroleh jumlah seluruh data, yakni, jumlah perkalian nilai tengah terhadap frekuensi masing-masing. Maka jumlah seluruh data adalah: = (1) 42 + (5) 51 + (7) 60 + (12) 69 + (25) 78 + (22) 78 + (22) 87 + (8) 96

Sehingga diperoleh rata-rata (mean):

$$\text{mean} = \frac{(1)42+(5)51+(7)60+(12)69+(25)78+(22)87+(8)96}{1+5+7+12+25+22+8}$$

$$= \frac{6177}{80} = 77.21$$

Dengan demikian, dengan tabel frekuensi di atas dan nilai rata-rata data, ditemukan:

- Banyak siswa yang memiliki nilai matematika di bawah nilai rata-rata!
- Banyak siswa yang memiliki nilai matematika di atas nilai rata-rata!

Perhitungan rata-rata di atas dapat kita dirumuskan secara matematis menjadi:

$$Mean\ (\bar{x}) = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i.f_i)}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

Nah, melalui pembahasan di atas, tentunya dapat disimpulkan bahwa rata-rata (mean) merupakan salah satu ukuran pemusatan data yang dinyatakan sebagai berikut.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$$

dimana:

f_i : frekuensi kelas ke-*i*

x_i : nilai tengah kelas ke-*i*

Selain cara di atas, ada cara lain untuk menghitung rata-rata. Dengan data yang sama, cermati langkah-langkah di bawah ini.

Tabel 7.3 Perhitungan Rataan sementara

Interval	(x_i)	f_i	$d_i = x_i - x_s$ $x_s = 78$	$f_i . d_i$
38 – 46	42	1	-36	-36
47 – 55	51	5	-27	-135
56 – 64	60	7	-18	-126
65 – 73	69	12	-9	-108
74 – 82	78	25	0	0
83 – 91	87	22	9	198
92 – 100	96	8	18	144
Total		**80**		**-63**

Dengan cara memperkirakan bahwa nilai rata-rata sementara yang dipilih pada kelas yang memiliki frekuensi tertinggi dan letak rata-rata sementara tersebut adalah titik tengah kelas interval.

Secara lengkap, langkah-langkah menentukan rata-rata data dengan menggunakan rata-rata sementara sebagai berikut

Langkah 1.	Ambil nilai tengah dengan frekuensi terbesar sebagai mean sementara x_s
Langkah 2.	Kurangkan setiap nilai tengah kelas dengan mean sementara dan catat hasilnya dalam kolom $d_i = x_i - x_s$.
Langkah 3.	Hitung hasil kali *f*, *d*, dan tuliskan hasilnya pada sebuah kolom, dan hitung totalnya.
Langkah 4.	Hitung mean dengan menggunakan rumus rataan sementara.

Sehingga diperoleh rata-rata adalah:

$$\bar{x} = x_s + \frac{\sum_{i=1}^{k}(f_i.d_i)}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$$

dengan:

x_s : rata-rata sementara.

d_i : deviasi atau simpangan terhadap rata-rata.

f_i : frekuensi interval kelas ke-*i*.

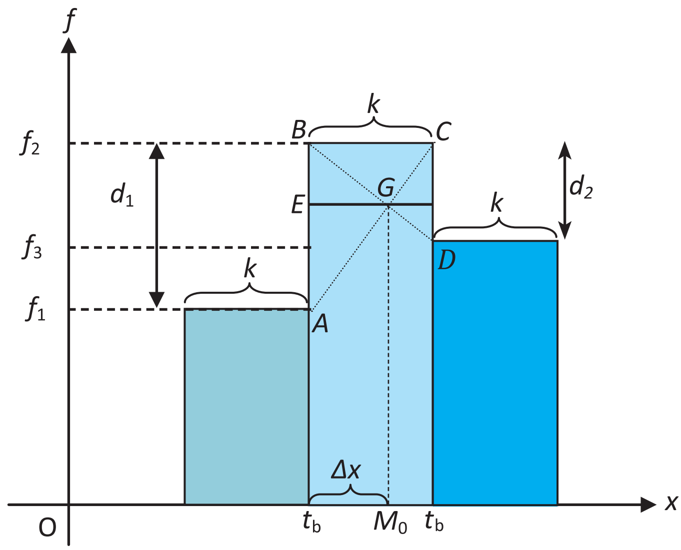
x_s : nilai tengah interval kelas ke-*i*.

Maka untuk data di atas dapat diperoleh:

$$Mean = x_s + \frac{\sum_{i=1}^{k}(f_i.d_i)}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = 78 + \frac{-117}{64} = 77.21.$$

b. Menentukan Nilai Modus

Pada waktu SMP kamu telah membahas modus untuk data tunggal, untuk data berkelompok secara prinsip adalah sama yakni nilai yang sering muncul. Dalam hal ini frekuensi terbanyak menjadi perhatian kita sebagai letak modus tersebut. Misalkan dari sekumpulan data kita mengambil 3 kelas interval yakni kelas interval dengan frekuensi terbanyak (kelas modus) dan kelas interval sebelum dan sesudah kelas modus. Dengan bantuan histogram dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 7.3 Penentuan Modus dengan Histogram

Perhatikan ilustrasi diatas, terlihat bahwa Δ *ABG* sebangun dengan Δ *DCG*, dan panjang $AB = d_1$; $CD = d_2$; $EG = \Delta x$ dan $FG = k - \Delta x$. Secara geometri dari kesebangunan di atas berlaku perbandingan berikut ini;

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EG}{FG} \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\Delta x}{k - \Delta x}$$

$$\Leftrightarrow d_1\left(k - \Delta x\right) = d_2 \Delta x$$

$$\Leftrightarrow d_1 k - d_1 \Delta x = d_2 \Delta x$$

$$\Leftrightarrow d_1 \Delta x + d_2 \Delta x = d_1 k$$

$$\Leftrightarrow \Delta x\left(d_1 + d_2\right) = d_1 k$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \frac{d_1 k}{\left(d_1 + d_2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = k\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Sehingga dapat diperoleh modus adalah:

$$M_0 = t_b + \Delta x$$
$$= t_b + k\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$
$$M_0 \ = t_b + k\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

dimana:

M_0 : Modus

t_b : Tepi bawah kelas modus

k : Panjang kelas

d_1 : Selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya

d_2 : Selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

Perhatikan tabel berikut.

Tabel 7.4 Perhitungan Modus

No	Kelas	Titik tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)
1	38 – 46	42	1
2	47 – 55	51	5
3	56 – 64	60	7
4	65 – 73	69	12
5	74 – 82	78	25
6	83 – 91	87	22
7	92 – 100	96	8

Dari data di atas dapat ditentukan sebagai berikut:

Tampak modus terletak pada frekuensi terbanyak $f = 25$ yaitu kelas interval modus 74 – 82 dengan dan panjang kelas $k = 9$. Oleh karena itu, t_b= 73,5, dan d_1= 25 – 12 =13 serta d_2= 25 – 22 = 3.

Jadi modus data di atas adalah:

$$M_o = t_b + k\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$
$$= 73{,}5 + 9\left[\frac{13}{13+3}\right]$$

$$= 73,5 + 7,31$$
$$M_o = 80,81$$

c. Median

Median dari sekelompok data yang telah terurut merupakan nilai yang terletak di tengah data yang membagi data menjadi dua bahagian yang sama. Untuk data berkelompok berdistribusi frekuensi median ditentukan sebagai berikut:

$$M_e = t_b + k\left[\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right]$$

dengan :

M_e = Median

t_b = tepi bawah kelas median

k = panjang kelas

n = banyak data dari statistik terurut $\sum f_i$

F = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas median

f_m = frekuensi kelas median

Dari data sebelumnya diperoleh $k = 9$; $t_b = 73,5$; $N = 80$; $f_m = 25$

sehingga:

Masih menggunakan data di atas maka kita bentuk tabel berikut ini.

Tabel 7.5 Perhitungan Median

Kelas	Frekuensi f_i	Frekuensi Kumulatif F
38 – 46	1	1
47 – 55	5	6
56 – 64	7	13
65 – 73	12	25
74 – 82	25	50
83 – 91	22	77
92 – 100	8	80
	80	

$$\text{Median} = t_b + k\left[\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right]$$

$$= 73{,}5 + 9\left[\frac{\frac{80}{2} - 25}{25}\right]$$

$$= 73{,}5 + 3{,}705$$

$$= 77{,}205$$

Pertanyaan kritis:

- Dari ketiga pembahasan tentang ukuran pemusatan data pada data kelompok, dapatkah kamu menemukan hubungan antara ketiga pemusatan data di atas? Diskusikan dengan temanmu!
- Dapatkah terjadi nilai ukuran $\overline{x} = Mo = Me$ pada sekumpulan data, jelaskan.

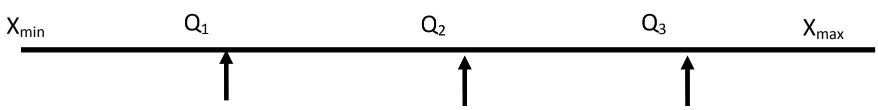
2. UKURAN LETAK DATA

Ukuran letak data yang dimaksud dalam subbab ini adalah *kuartil, desil,* dan *persentil*. Ingat kembali materi statistik yang telah kamu pelajari di kelas X, konsep kuartil dan desil untuk data berdistribusi analog dengan yang ada pada data tunggal.

a. Kuartil

Jika semua data yang telah diurutkan mulai dari data terkecil dan data terbesar, maka data tersebut dapat dibagi menjadi empat bagian. Ukuran letak yang membagi empat bagian dari sekumpulan data disebut kuartil.

Untuk lebih memahami pengertian kuartil perhatikan ilustrasi berikut.



Gambar 7.4 Letak Kuartil

Untuk menentukan Kuartil data berdistribusi, dirumuskan:

$$Q_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{4}n - F_Q\right)}{f_{Q_i}}$$

n : banyak data
k : panjang kelas
Q_i : Kuartil ke-i data, untuk $i = 1,2, 3$.
L_i : Tepi bawah kelas ke-i. L_i= batas bawah – 0.5.
F_Q : jumlah frekuensi sebelum kuartil ke-i.
F_i : frekuensi kelas yang memuat Kuartil ke-i.

Contoh 7.1

Perhatikan tabel berikut ini dan tentukan
a. Kuartil bawah (Q_1)
b. Kuartil tengah (Q_2)
c. Kuartil atas (Q_3)

Tabel 7.6 Distribusi Frekuensi

Kelas	Frekuensi f_i
42 – 46	2
47 – 51	5
52 – 56	5
57 – 61	15
62 – 66	7
67 – 71	4
72 – 76	2

Alternatif Penyelesaian

Dengan melengkapi tabel 7.6 diperoleh:

Tabel 7.7 Distribusi Frekuensi Kumulatif

Kelas	Frekuensi f_i	Frekuensi Kumulatif F
42 – 46	2	2
47 – 51	5	7
52 – 56	5	12
57 – 61	15	27
62 – 66	7	34
67 – 71	4	38
72 – 76	2	40

a. Kuartil ke-1

Kuartil bawah dapat juga disebut kuartil ke-1 (Q_1), dan untuk menentukan letak Q_1 terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat Q_1 yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{1}{4}n = \frac{1}{4}(40) = 10$. Hal ini berarti Q_1 adalah data ke-10, kelas interval 52 – 56, dan f_i = 11.

Dari tabel juga diperoleh $L_1 = 51{,}5$, $F_Q = 7$, $f_{Q_1} = 5$, $k = 5$.
Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$Q_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{4}n - F_Q\right)}{f_{Q_i}}$$

$$Q_1 = 51{,}5 + 5\frac{(10-6)}{5}$$

$$= 51{,}5 + 4$$

$$Q_1 = 55{,}5$$

Sehingga kuartil ke-1 adalah 55,5

b. Kuartil ke-2

Analog dengan mencari Q_1 maka diperoleh nilai Q_2, yakni: $\frac{2}{4}n = \frac{1}{4}(40) = 20$.

Hal ini berarti Q_2 berada pada kelas interval 57 – 61, dan $f_{Q_2} = 15$.
Dari tabel juga diperoleh $L_2 = 56{,}5$, $F_Q = 12$, $f_{Q_2} = 15$, $k = 5$.
Sehingga dapat ditentukan kuartil tengah adalah:

$$Q_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{4}n - F_Q\right)}{f_{Q_i}}$$

$$Q_2 = 56{,}5 + 5\frac{(20-12)}{15}$$

$$= 56{,}5 + 2{,}66$$

$$Q_2 = 59{,}16$$

Sehingga kuartil ke-2 adalah 59,16

c. Kuartil ke-3

Sama seperti menentukan Q_1 dan Q_2 maka diperoleh nilai-nilai yang kita perlukan untuk memperoleh nilai Q_3, yakni: $\frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(40) = 30$. Hal ini berarti Q_3 berada pada kelas interval 62 – 66, dan $f_{Q_3} = 7$.

Dari tabel juga diperoleh $L_1 = 61{,}5$, $F_Q = 27$, $f_{Q_3} = 7$, $k = 5$.
Sehingga dapat ditentukan kuartil atas adalah:

$$Q_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{4}n - F_Q\right)}{f_{Q_i}}$$

$$Q_3 = 61{,}5 + 5\frac{(30-27)}{7}$$

$$= 61{,}5 + 2{,}14$$

$$Q_3 = 63{,}64$$

Sehingga kuartil ke-3 adalah 63,64

b. Desil

Prinsip untuk mencari desil hampir sama dengan kuartil, jika kuartil membagi data yang terurut menjadi empat bagian maka desil menjadi 10 bagian dengan ukuran data $n > 10$. Hal ini berarti sekumpulan data yang terurut memiliki 9 nilai desil, yakni $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_9$

Untuk menentukan Desil, dirumuskan sebagai berikut:

$$D_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_D\right)}{f_{D_i}}$$

i = 1,2, 3, … , 9
D_i : Desil ke-i
L_i : Tepi bawah kelas yang memuat desil ke-i
F_D : jumlah frekuensi sebelum kelas desil ke-i
f_{D_i} : frekuensi kelas yang memuat desil ke-i
n : Banyak data
k : panjang kelas.

Contoh 7.2

Dari 1.000 siswa peserta Olimpiade Matematika diperoleh data skor berupa tabel berikut.

Tabel 7.8 Skor Olimpiade Matematika

Skor	Frekuensi
0-9	5
10-19	54
20-29	215
30-39	263
40-49	223
50-59	124
60-69	72
70-79	38
80-89	5
90-99	1

Tentukanlah desil

a. Desil ke-1

b. Dan desil ke-8

Alternatif Penyelesaian

Dengan melengkapi tabel 7.8 diperoleh:

Tabel 7.9 Distribusi Frekuensi Kumulatif

Skor	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif *F*
0-9	5	5
10-19	54	59
20-29	215	274
30-39	263	537
40-49	223	760

Skor	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif *F*
50-59	124	884
60-69	72	956
70-79	38	994
80-89	5	999
90-99	1	1000

a. Desil ke-1

Untuk menentukan letak D_1 terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat D_1 yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{1}{10}n = \frac{1}{10}(1000) = 100$. Hal ini berarti D_1 adalah data ke-100 yaitu, kelas interval 20 – 29, dan $f_{D_1} = 215$.

Dari tabel juga diperoleh $L_I = 19{,}5$, $F_D = 59$, $f_{D_1} = 215$, $k = 10$.

Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$D_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_D\right)}{f_{D_i}}$$

$$D_1 = 19{,}5 + 10\frac{(100 - 59)}{215}$$

$$= 19{,}5 + 43{,}76$$

$$D_1 = 63{,}26$$

Sehingga kuartil ke-1 adalah 63,26

b. Desil ke-8

Untuk menentukan letak D_8 terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat D_8 yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{8}{10}n = \frac{8}{10}(1000) = 800$. Hal ini berarti D_8 adalah data ke-800, kelas interval 40 – 49, dan $f_{D_8} = 223$.

Dari tabel juga diperoleh $L_8 = 39{,}5$, $F_D = 573$, $f_{D_8} = 223$, $k = 10$.

Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$D_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_D\right)}{f_{D_i}}$$

$$D_8 = 39{,}5 + 10\frac{(800-573)}{223}$$

$$= 39{,}5 + 10{,}17$$

$$D_8 = 49{,}67$$

Sehingga kuartil ke-8 adalah 49,67

c. Persentil

Jika kuartil dan desil membagi data yang terurut menjadi empat dan sepuluh bagian maka desil menjadi 100 bagian data. Hal ini berarti sekumpulan data yang terurut memiliki 99 nilai persentil, yakni P_1, P_2, P_3, ..., P_{99}.

Untuk menentukan persentil, dirumuskan sebagai berikut:

$$P_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{100}n - F_P\right)}{f_{P_i}}$$

$i = 1,2,3, \dots, 9$

P_i : Persentil ke-i
L_i : Tepi bawah kelas yang memuat persentil ke-i
F_P : jumlah frekuensi sebelum kelas persentil ke-i
f_{P_i} : frekuensi kelas yang memuat persentil ke-i
n : Banyak data
k : panjang kelas.

Contoh 7.3

Dengan menggunakan data pada contoh 7.2

Tentukanlah

a. persentil ke-10
b. persentil ke-99

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan tabel berikut

Tabel 7.10 Distribusi Frekuensi Kumulatif

Skor	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif *F*
0-9	5	5
10-19	54	59
20-29	215	274
30-39	263	537
40-49	223	760
50-59	124	884
60-69	72	956
70-79	38	994
80-89	5	999
90-99	1	1.000

a. Persentil ke-10

Untuk menentukan letak P_{10} terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat P_{10} yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{10}{100}n = \frac{10}{100}(1000) = 100$. Hal ini berarti P_{10} adalah data ke-100, kelas interval 20 – 29, dan $f_{P_{10}} = 215$.

Dari tabel juga diperoleh $L_{10} = 19{,}5$, $F_P = 59$, $f_{P_{10}} = 215$, $k = 10$.
Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$P_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_P\right)}{f_{P_i}}$$

$$P_{10} = 19{,}5 + 10\frac{(100-59)}{215}$$

$$= 19{,}5 + 43{,}76$$

$$P_{10} = 63{,}26$$

Sehingga persentil ke-10 adalah 63,26

b. Persentil ke-99

Untuk menentukan letak P_{99} terlebih dahulu kita mencari kelas yang memuat P_{99} yakni dengan menghitung nilai dari $\frac{99}{100}n = \frac{99}{100}(1000) = 990$. Hal ini berarti P_{99} adalah data ke-990, kelas interval 70 – 79, dan $f_{P_{99}} = 38$.

Dari tabel juga diperoleh $L_{99} = 69{,}5$, $F_P = 956$, $f_{P_{99}} = 38$, $k = 10$.
Sehingga kuartil bawah diperoleh:

$$P_i = L_i + k\frac{\left(\frac{i}{10}n - F_P\right)}{f_{P_i}}$$

$$P_{99} = 69{,}5 + 10\frac{(990 - 956)}{38}$$

$$= 69{,}5 + 8{,}94$$

$$P_{99} = 78{,}44$$

Sehingga persentil ke-99 adalah 49,67

Dari ukuran letak data yang telah dibahas di atas tentu kita akan menemukan keterkaitan nilai ukuran satu dengan yang lainnya. Misalkan data yang dimiliki adalah sama maka akan ditemukan nilai median = $Q_2 = D_5 = P_{50}$, dan $_{Q1} = P_2$, dan Q_3 = P75. Cobalah membuktikannya dengan teman kelompokmu.

3. UKURAN PENYEBARAN DATA

Ukuran penyebaran data menunjukkan perbedaan data yang satu dengan data yang lain serta menunjukkan seberapa besar nilai-nilai dalam suatu data memiliki nilai yang berbeda. Adapun ukuran penyebaran data yang akan kita kaji adalah sebagai berikut.

a. Rentang Data atau Jangkauan (Range)

Masalah-7.2

Suatu seleksi perekrutan anggota Paskibra di sebuah sekolah diperoleh data tinggi badan siswa yang mendaftar adalah sebagai berikut:

Tabel 7.11 Distribusi Tinggi Badan Siswa

Tinggi badan (cm)	Banyak siswa yang mendaftar (f_i)
140-144	7
145-149	8
Tinggi badan (cm)	**Banyak siswa yang mendaftar (f_i)**
150-154	12
155-159	16
160-164	24
165-169	13
170-174	2

Tentukanlah rentang (range) dari data distribusi di atas!

Alternatif Penyelesaian

Range merupakan selisih antara data terbesar dengan data terkecil. Sedangkan untuk data berdistribusi, data tertinggi diambil dari nilai tengah kelas tertinggi dan data terendah diambil dari nilai kelas yang terendah, sehingga diperoleh:

Nilai tengah kelas tertinggi $= \dfrac{170+174}{2} = 172$

Nilai tengah kelas terendah $= \dfrac{140+144}{2} = 142$

Sehingga dari kedua hasil di atas diperoleh range untuk data berdistribusi adalah:

Rentang (R) $= 172 - 142$

$= 30$

b. Rentang Antar Kuartil (Simpangan Kuartil)

Dengan pemahaman yang sama yakni rentang merupakan selisih data terbesar dengan data terkecil, maka rentang antar kuartil dirumuskan dengan selisih kuartil terbesar dengan kuartil terkecil yakni kuartil atas (Q_3) dengan kuartil bawah (Q_1), maka dapat dituliskan dengan: simpangan kuartil $= Q_3 - Q_1$

Dengan menggunakan hasil pada contoh 7.1 maka dapat kita peroleh rentang antar kuartil data tersebut adalah:

Simpangan kuartil $= 63,4 - 55,5$

$= 7,9$

c. Simpangan Rata-Rata

Andaikan kita memiliki data x_1, x_2, x_3, ..., x_n maka dengan konsep nilai rentang data kita dapat menentukan rentang nilai rata-rata atau simpangan rata-rata sehingga diperoleh urutan data yang baru yaitu:

$$(x_1 - \bar{x}), (x_2 - \bar{x}), (x_3 - \bar{x}), \ldots, (x_n - \bar{x})$$

Dalam urutan data di atas mungkin ada yang positif dan negatif namun konsep jarak atau rentang tidak membedakan keduanya, untuk itu diambil harga mutlak sehingga diperoleh:

$$|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, |x_3 - \bar{x}|, \ldots, |x_n - \bar{x}|$$

Dan jika urutan nilai data tersebut dijumlahkan kemudian dibagi dengan banyak data (n) maka akan diperoleh simpangan rata-rata sebagai berikut:

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

dengan :

S_R = Simpangan rata-rata

x_i = nilai data ke-i

$\bar{x}$ = nilai rata-rata

n = banyak data

Formula di atas merupakan simpangan rata-rata untuk data tunggal. Data berdistribusi memiliki nilai frekuensi dalam tiap kelompok atau interval data dan nilai data pengamatan merupakan nilai tengah kelas sehingga untuk data berdistribusi diperoleh simpangan rata-rata yang dituliskan sebagai berikut:

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

dengan :

S_R = Simpangan rata-rata

x_i = nilai tengah kelas ke $-i$

$\bar{x}$ = nilai rata-rata

f_i = frekuensi kelas ke $-i$

Contoh 7.4

Dengan menggunakan pembahasan masalah 7.3 diperoleh tabel distribusi sebagai berikut:

Tabel 7.12 Distribusi Frekuensi

Kelas	Frekuensi
38 - 46	1
47 - 55	5
56 - 64	7
65 - 73	12
74 - 82	25
83 - 91	22
92 - 100	8
	80

dan rata-rata = 77.21. Tentukanlah simpangan rata-rata dari data di atas!

Alternatif Penyelesaian

Dengan melengkapi tabel 7.12 agar dapat diperoleh nilai-nilai yang diperlukan, sehingga diperoleh tabel yang baru seperti berikut ini:

Tabel 7.13 Distribusi Frekuensi

Kelas	Frekuensi (f_i)	Titik Tengah (x_i)	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$f \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
38 - 46	1	42	35.21	35,21
47 - 55	5	51	26.21	131,05
56 - 64	7	60	17.21	120,47
65 - 73	12	69	8.21	98,52
74 - 82	25	78	0.79	19,75
83 - 91	22	87	9.79	215,38
92 - 100	8	96	18.79	150,32
	f_i =80			$\Sigma f_i \lvert x_i - \rvert$=639.65

Sehingga dari nilai-nilai yang diperoleh pada tabel di atas diperoleh:

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left| x_i - \bar{x} \right|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{639.65}{80} = 7{,}99$$

Jadi, simpangan rata-rata data di atas adalah 7,99

d. Ragam dan Simpangan Baku

Penentuan nilai simpangan rata-rata memiliki kelemahan karena menggunakan harga mutlak yang berakibat simpangan rata-rata tidak dapat membedakan antara rentang yang lebih besar dan lebih kecil. Untuk mengatasi kelemahan tersebut ahli statistik menggunakan simpangan baku yang menggunakan kuadrat pada rentang datanya, simpangan baku dirumuskan sebagai berikut:

$$S_B = \sqrt{\frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{r} f_i . \left(x_i - \bar{x} \right)^2}$$

Ragam, atau sering disebut varian merupakan kuadrat dari nilai simpangan baku, data berdistribusi dirumuskan sebagai berikut:

$$S_B^2 = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{r} f_i . \left(x_i - \bar{x} \right)^2$$

dengan:

S_B : Simpangan baku

S_B^2 : Ragam/varian.

f_i : frekuensi kelas ke-i.

x_i : titik tengah interval ke-i.

$\bar{x}$: rata-rata.

n : ukuran data.

Contoh 7.5

Masih dengan menggunakan pembahasan masalah 7.3 diperoleh tabel distribusi sebagai berikut:

Kelas	Frekuensi (f_i)	Titik Tengah (x_i)	$x_i - \overline{x}$	$\left(x_i - \overline{x}\right)^2$	$f\left(x_i - \overline{x}\right)^2$
38 - 46	1	42	-35.21	1239.74	1239.744
47 - 55	5	51	-26.21	686.96	3434.821
56 - 64	7	60	-17.21	296.18	2073.289
65 - 73	12	69	-8.21	67.40	808.8492
74 - 82	25	78	0.79	0.62	15.6025
83 - 91	22	87	9.79	95.84	2108.57
92 - 100	8	96	18.79	353.06	2824.513
	Σ f_i =80				**Σ f_i I x_i - I=12505.38**

Sehingga dari nilai-nilai yang diperoleh pada tabel di atas diperoleh:

- Simpangan baku

$$S_B = \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{r} f_i.\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

$$S_B = \sqrt{\frac{1}{80}.12505.39} = 12.5$$

- Ragam atau varian

$$S_B^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{r} f_i.\left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

$$S_B^2 = \frac{1}{80}.12505.39 = 156.31$$

Untuk semua jenis ukuran penyebaran data ini, tentunya tidaklah sesuatu hal yang sulit untuk menentukan nilainya. Namun, yang penting dari semua adalah memahami makna setiap angka statistik yang diperoleh.

Uji Kompetensi 7

1. Perhatikan tabel penjualan 4 jenis mainan anak-anak pada sebuah toko pada periode 5 minggu berturut-turut.

Minggu	Mainan 1	Mainan 2	Mainan 3	Mainan 4
1	50	48	64	51
2	52	55	34	53
3	35	52	43	32
4	20	12	30	30
5	15	20	25	28
Jumlah	172	187	196	194

Dari tabel diatas,

- Gambarkan diagram batang, garis, serta lingkaran pada masing-masing jenis mainan dalam 5 minggu.
- Tentukanlah semua ukuran yang terdapat pada data tersebut!

2. Tentukanlah nilai mean, median, dan modus pada data penghasilan orang tua siswa di suatu yayasan sekolah swasta berikut ini.

Pengahasilan tiap bulan (Rp)	Banyak orang tua
1.000.000 – 2.000.000	300
2.000.000 – 3.000.000	590
3.000.000 – 4.000.000	750
4.000.000 – 5.000.000	150
5.000.000 – 10.000.000	70
> 10.000.000	40

3. Suatu pertandingan karate mewajibkan setiap team yang akan masuk babak final harus memperoleh poin rata-rata 205 pada empat kali pertandingan. Pada babak semifinal diperoleh 3 tim dengan data sebagai berikut.

Tim	Nilai Setiap Pertandingan			
	1	2	3	4
I	210	195	200	x
II	200	200	195	x
III	205	198	218	x

Tim yang manakah yang akan masuk babak final jika diperoleh nilai 215 pada pertandingan keempat?

4. Tentukanlah nilai a dan b dari tabel distrubusi frekuensi dibawah ini, jika median adalah 413,11 dan $\sum f = 1000$

Nilai	Frekuensi
200 - 234	80
235 - 249	9
250 - 274	17
275 - 299	a
300 - 324	88
325 - 349	b
350 - 374	326
475 - 499	5

5. Data berikut mempunyai modus 162.

Nilai	Frekuensi
140-149	3
150-159	8
160-169	x
170-179	2

Tentukanlah :
a. Nilai x
b. Mean

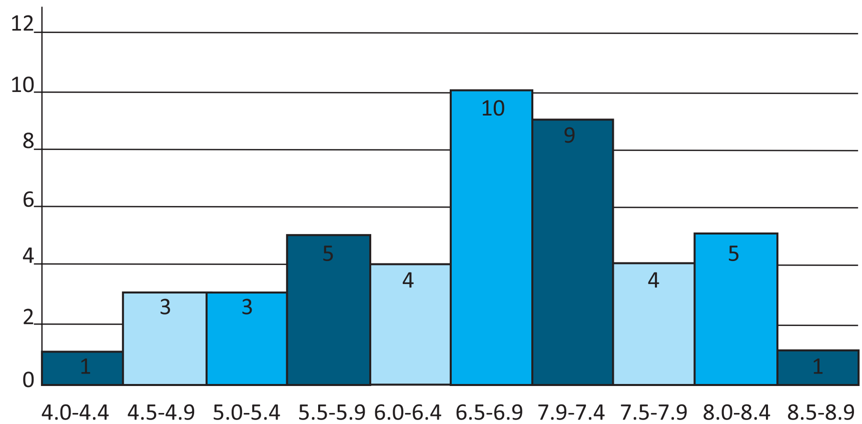
6. Gaji karyawan suatu pabrik ditampilkan dalam tabel berikut.

Gaji (×Rp 10.000)	Frekuensi
66-70	3
71-75	12
76-80	x
81-85	36
86-90	24
91-95	y
96-100	9

a. Tentukan rata-rata gaji jika setiap karyawan mendapat tambahan sebesar Rp50.000,00.
b. Jika modus data di atas adalah Rp830.000,00, dan banyak data 120, tentukanlah nilai $x - y$.

7. Dengan menggunakan tabel yang lengkap pada soal no.5, tentukan:
   a. Kuartil ke-1
   b. Kuartil ke-2
   c. Kuartil ke-3

8. Dari grafik histogram di bawah ini, bentuklah tabel frekuensi realatif dan tentukan seluruh ukuran pemusatan data.



9. Dari tabel data di bawah ini tentukanlah :
a. Simpangan kuartil
b. Simpangan rata-rata
c. Simpangan baku

Nilai	Frekuensi
40-44	5
45-49	8
50-54	7
55-59	4
60-64	4
65-69	3
70-74	2
75-80	1

10. Suatu penelitian terhadap dua jenis baterai mendapatkan hasil pengukuran daya tahan pemakaian yang ditampilkan pada data berikut ini.

Nilai statitik	Jenis 1	Jenis 2
Banyak sampel	100	80
Rentang	240	120
Kuartil bawah	468	488
Kuartil atas	533	562
Simpangan baku	40	20
Simpangan kuartil	65	74
Rata-rata	500	600
Median	500	500

Berdasarkan data penelitian di atas jelaskan merek baterai mana yang memiliki ukuran penyebaran yang besar!

Projek

Kumpulkanlah data-data perkembangan ekonomi yang ada di indonesia, misal data pergerakan nilai tukar rupiah terhadap mata uang asing (dolar, ringgit, dll). Tabulasi dan gambarkan data tersebut kedalam diagram. Analisislah data tersebut dalam bentuk statistik deskriptif serta presentasikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Berdasarkan materi yang telah kita uraikan di atas, beberapa konsep perlu kita rangkum guna untuk mengingatkan kamu kembali akan konsep yang nantinnya sangat berguna bagi kamu sebagai berikut.

1. Jangkauan Data = Data tertinggi – Data terendah $= x_{maks} - x_{min}$.
2. Statistik yang membagi data menjadi empat bagian disebut Kuartil.
3. Statistik terurut memiliki kuartil jika banyak data ≥ 4, sebab kuartil Q_1 dan Q_2 membagi data menjadi empat kelompok yang sama.
4. Statistik yang membagi data menjadi 10 bagian disebut Desil.
5. Jika banyak data ≥ 10, maka kita dapat membagi data menjadi 10 kelompok yang sama, dengan setiap kelompok memiliki $\frac{1}{10}$ data. Ukuran statistik ini disebut *Desil*.
6. Mean untuk data berkelompok didefinisikan dengan $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_k}$ dengan f_i = frekuensi kelas ke-*i*; x_i = nilai tengah kelas ke-*i*.
7. Mean untuk data berkelompok dengan rumusan rataan sementara didefinisikan dengan $\bar{x} = x_s + \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$ dengan f_i = frekuensi kelas ke-*i*; x_i = nilai tengah kelas ke-*i*.
8. Modus untuk data berkelompok didefinisikan dengan $M_o = t_b + k\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$ dengan t_b = tepi bawah kelas modus; k = panjang kelas; d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya; d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya.

9. Median untuk data berkelompok didefinisikan dengan Median = $t_b + k\left[\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right]$

Dengan t_b = tepi bawah kelas median; k = panjang kelas; N = banyak data dari statistik terurut = $\sum f_i$; F = frekuensi kumulatif tepat sebelum kelas median; f_m = frekuensi kelas median.

10. Simpangan rata-rata untuk data berkelompok didefinisikan dengan:

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \left|x_i - \bar{x}\right|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

11. Simpangan baku dan varian untuk data berkelompok di-definisikan dengan:

- $S_B = \sqrt{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{r} f_i.\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$
- $S_B^2 = \frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{r} f_i.\left(x_i - \bar{x}\right)^2$

Bab
8

ATURAN PENCACAHAN

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

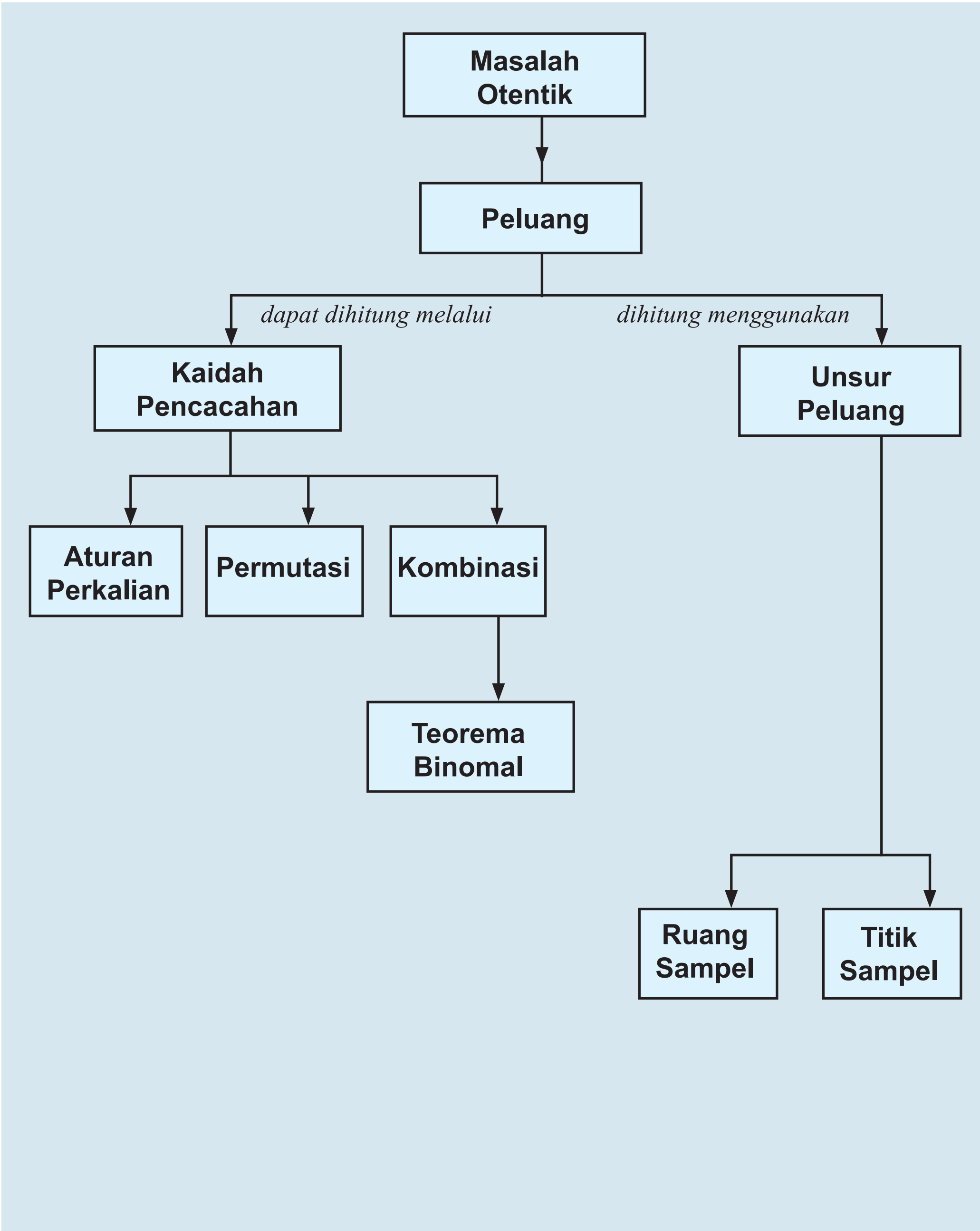
Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran ini siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah. 2. Mendeskripsikan dan menerapkan berbagai aturan pencacahan melalui beberapa contoh nyata serta menyajikan alur perumusan aturan pencacahan (perkalian, permutasi dan kombinasi) melalui diagram atau cara lainnya. 3. Menerapkan berbagai konsep dan prinsip permutasi dan kombinasi dalam pemecahan masalah nyata. 4. Mendeskripsikan konsep ruang sampel dan menentukan peluang suatu kejadian dalam suatu percobaan. 5. Mendeskripsikan dan menerapkan aturan/ rumus peluang dalam memprediksi terjadinya suatu kejadian dunia nyata serta menjelaskan alasan-alasannya. 6. Mendeskripsikan konsep peluang dan harapan suatu kejadian dan menggunakannya dalam pemecahan masalah.	Melalui pembelajaran materi aturan pencacahan, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip aturan pencacahan melalui pemecahan masalah otentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. • Berkolaborasi memecahkan masalah autentik dengan pola interaksi edukatif. • Berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip aturan pencacahan dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Pencacahan*
- *Permutasi*
- *Kombinasi*
- *Kejadian*
- *Ruang Sampel*
- *Titik Sampel*
- *Peluang*

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran turunan siswa mampu: 7. Memilih dan menggunakan aturan pencacahan yang sesuai dalam pemecahan masalah nyata serta memberikan alasannya. 8. Mengidentifikasi masalah nyata dan menerapkan aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi dalam pemecahan masalah tersebut. 9. Mengidentifikasi, menyajikan model matematika dan menentukan Peluang dan harapan suatu kejadian dari masalah kontektual.	Melalui pembelajaran materi aturan pencacahan, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Berdiskusi, bertanya dalam menemukan konsep dan prinsip aturan pencacahan melalui pemecahan masalah otentik yang bersumber dari fakta dan lingkungan. • Berkolaborasi memecahkan masalah autentik dengan pola interaksi edukatif. .• Berpikir tingkat tinggi dalam menyelidiki, memanipulasi, dan mengaplikasikan konsep dan prinsip-prinsip aturan pencacahan dalam memecahkan masalah otentik.

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Pencacahan (Perkalian, Permutasi, dan Kombinasi)

a. Aturan Perkalian

Setiap orang pasti pernah dihadapkan dalam permasalahan memilih atau mengambil keputusan. Misalnya: setelah tamat sekolah akan memilih program studi dan di perguruan tinggi yang mana? Ketika berangkat ke sekolah memilih jalur yang mana. Dalam matematika kita dibantu untuk menentukan banyak pilihan yang akan diambil. Untuk lebih memahami cermati masalah dan kegiatan berikut.

Masalah-8.1

Beni, seorang siswa Jurusan IPA lulusan dari SMA Negeri 1 Tarutung Tahun 2013 ingin menjadi mahasiswa di salah satu perguruan tinggi negeri (PTN) yang ada di pulau Sumatera pada Tahun 2013. Ayah Beni menyetujui cita-cita Beni asalkan kuliah di Medan. Di Medan terdapat PTN dan juga memiliki jurusan yang digemari dan yang dipilih oleh Beni, yaitu Biologi atau Pendidikan Biologi. Panitia SNMPTN memberikan kesempatan kepada calon mahasiswa untuk memilih maksimum tiga jurusan di PTN yang ada di Indonesia.
Bantulah Beni untuk mengetahui semua kemungkinan pilihan pada saat mengikuti SNMPTN Tahun 2013?

Alternatif Penyelesaian

Untuk mengetahui semua pilihan yang mungkin, kita harus mengetahui apakah semua PTN di Medan memiliki Jurusan Biologi atau Jurusan Pendidikan Biologi. Ternyata, hanya USU dan Unimed saja yang memiliki pilihan Beni tersebut. USU hanya memiliki Jurusan Biologi, tetapi Unimed memiliki Jurusan Biologi dan Jurusan Pendidikan Biologi.

Sesuai aturan panitia SNMPTN, Beni diberi kesempatan memilih maksimal 3 dan minimal 1 jurusan.

Mari kita uraikan pilihan-pilihan yang mungkin.

Untuk 3 Pilihan

1. Seandainya Beni memilih 3 pilihan tersebut di satu kota, maka pilihannya adalah:

   Pilihan 1: Biologi USU
   Pilihan 2: Pend. Biologi UNIMED
   Pilihan 3: Biologi UNIMED

Untuk 2 Pilihan

1. Beni hanya boleh memilih 2 jurusan di UNIMED, yaitu:
   Pilihan 1: Pend. Biologi UNIMED
   Pilihan 2: Biologi UNIMED
2. Beni juga memilih 1 jurusan di USU dan 1 di UNIMED, yaitu:
   Pilihan 1: Biologi USU
   Pilihan 2: Pend. Biologi UNIMED
   Atau
   Pilihan 1: Biologi USU
   Pilihan 2: Biologi UNIMED

Ingat!!!!
Ada strategi memilih jurusan.

Untuk 1 Pilihan

1. Beni boleh hanya memilih Biologi USU.
2. Beni boleh hanya memilih Pend. Biologi UNIMED
3. Beni boleh hanya memilih Biologi UNIMED

Jadi, banyak cara memilih yang mungkin yang dimiliki Beni sebanyak 7 cara.

- Menurut kamu, seandainya tidak ada strategi memilih jurusan, berapa cara yang dimiliki Beni?
- Coba kamu pikirkan, bagaimana pola rumusan untuk menghitung banyak cara yang mungkin untuk Masalah 8.1.

Pernahkah kamu mengikuti pemilihan pengurus OSIS di sekolahmu?

Mari kita cermati contoh berikut, sebagai masukan jika suatu saat kamu menjadi panitia pemilihan pengurus OSIS di sekolahmu.

Contoh 8.1

Pada pemilihan pengurus OSIS terpilih tiga kandidat yakni Abdul, Beny, dan Cindi yang akan dipilih menjadi ketua, sekretaris, dan bendahara. Aturan pemilihan adalah setiap orang hanya boleh dipilih untuk satu jabatan. Berapakah kemungkinan cara untuk memilih dari tiga orang menjadi pengurus OSIS?

Alternatif Penyelesaian

Ada beberapa metode untuk menghitung banyak cara dalam pemilihan tersebut.

i. Cara Mendaftar

Mari kita coba untuk memilih tiap-tiap jabatan, yaitu:

a. Jabatan ketua OSIS

Untuk jabatan ketua dapat dipilih dari ketiga kandidat yang ditunjuk yakni Abdul (A), Beny (B), dan Cindi (C) sehingga untuk posisi ketua dapat dipilih dengan 3 cara.

b. Jabatan sekretaris OSIS

Karena posisi ketua sudah terisi oleh satu kandidat maka posisi sekretaris hanya dapat dipilih dari 2 kandidat yang tersisa.

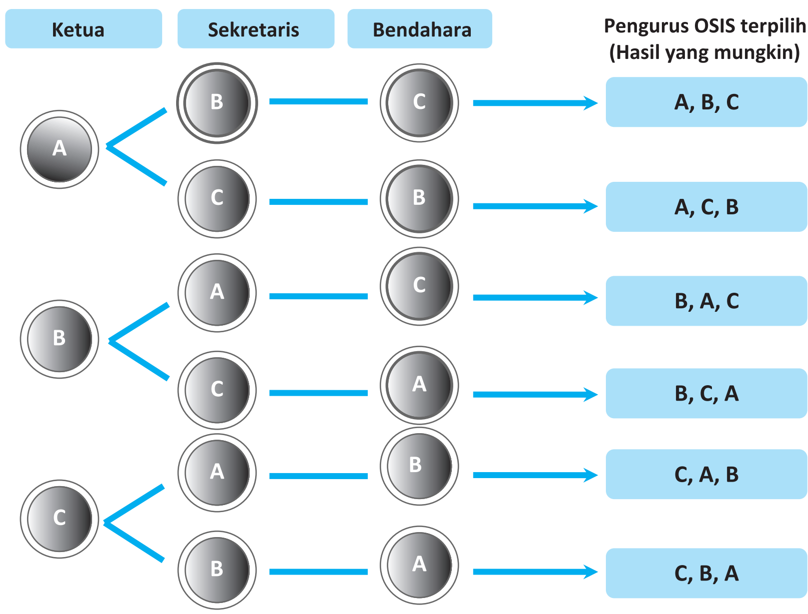
c. Jabatan bendahara OSIS

Karena posisi ketua dan sekretaris sudah terisi maka posisi bendahara hanya ada satu kandidat.

Dari uraian di atas banyak cara yang dapat dilakukan untuk memilih tiga kandidat untuk menjadi pengurus OSIS adalah $3 \times 2 \times 1 = 6$ cara.

iI. Cara Diagram

Untuk dapat lebih memahami uraian di atas perhatikan diagram berikut.



Gambar 8.1 Diagram Pohon Pemilihan Ketua OSIS

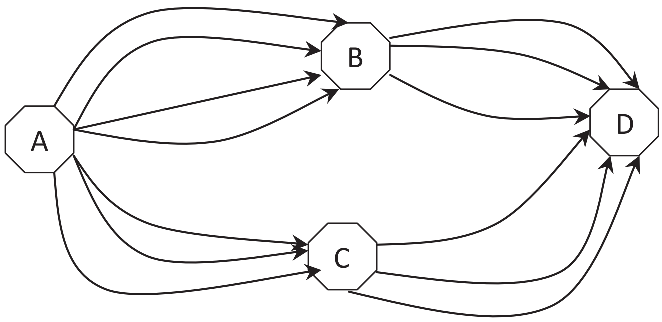
- Misalnya, Abdul merupakan siswa kelas X, Beny dan Cindy dari Kelas XI. Berapa banyak cara memilih pengurus OSIS jika Bendahara OSIS merupakan siswa dari kelas XI.

Biasanya di kota-kota besar terdapat banyak jalur alternatif menuju suatu tempat dan jalur ini diperlukan para pengendara untuk menghindari macet atau mengurangi lama waktu perjalanan. Contoh berikut mengajak kita mempelajari banyak cara memilih jalur dari suatu kota ke kota lain.

Contoh 8.2

Dari Kota A menuju Ibukota D dapat melalui beberapa jalur pada gambar 8.1.

Berapa banyak kemungkinan jalur yang dapat dilalui dari Kota A ke Kota D?



Gambar 8.2 Jalur dari Kota A ke Kota D

Alternatif Penyelesaian

- Perhatikan jalur dari kota A ke kota D melalui kota B

  Dari kota A ke kota B terdapat 4 jalur yang dapat dilalui, sedangkan dari kota B terdapat 3 jalur yang dapat dilalui menuju kota D.

  Jadi banyak cara memilih jalur dari kota A menuju kota D melalui kota B adalah $4 \times 3 = 12$ cara.
- Perhatikan jalur dari kota A ke kota D melalui kota C

  Terdapat 3 jalur dari kota A menuju kota C dan 3 jalur dari kota C menuju kota D.

  Jadi banyak cara memilih jalur dari kota A menuju kota D melalui kota B adalah $3 \times 3 = 9$ cara.

Jadi banyak jalur yang dapat dilalui melalui Kota A sampai ke Kota D adalah $12 + 9 = 21$ cara.

- ♦ Seandainya ada satu jalur yang menghubungkan kota B dan kota C, berapa banyak jalur yang dapat dipilih dari kota A menuju kota D?

Kegiatan 8.1

Catatlah baju, celana, dan sepatumu berdasarkan warna, kemudian isilah dalam bentuk tabel berikut ini:

Tabel 8.1 Tabel Daftar Warna Pakaian

Baju	Celana	Sepatu
Putih	Hitam	Coklat
Merah	Abu-abu	Hitam
Biru	Coklat	Putih
⋮	⋮	⋮

Salin dan lengkapi tabel di atas kemudian perhatikan data yang diperoleh dan cobalah menjawab pertanyaan berikut:

1. Jika diasumsikan setiap warna dapat dipasangkan, berapa banyak kemungkinan warna baju dan warna celana yang dapat dipasangkan?
2. Berapakah banyak kemungkinan pakaian lengkap yakni baju, celana, dan sepatu kamu yang dapat dipasangkan?

Alternatif Penyelesaian

1. Jika diasumsikan setiap warna pada baju, celana dan sepatu dapat dipasangkan maka dapat ditentukan kemungkinan pasangan yang dihasilkan; yakni:

   Banyak warna baju × banyak warna celana = Banyak pasangan warna baju dan celana.
2. Banyak pemasangan baju, celana, dan sepatu untuk tabel di atas adalah:

   Banyak warna baju × Banyak warna celana × Banyak warna sepatu = Banyak kombinasi warna pakaian.

Dalam dunia kerja seorang pemimpin atau karyawan juga pernah dihadapkan dengan bagaimana memilih cara untuk menyusun unsur atau memilih staff. Masalah berikut ini, mengajak kita untuk memahami bagaimana cara kerja pada suatu supermarket.

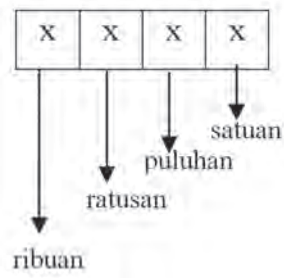
Masalah-8.2

Seorang manajer supermarket ingin menyusun barang berdasarkan nomor seri barang. Dia ingin menyusun nomor seri yang dimulai dari nomor 3000 sampai dengan 8000 dan tidak memuat angka yang sama. Tentukan banyak nomor seri yang disusun dari angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Alternatif Penyelesaian

Mari kita uraikan permasalahan di atas.

- Setiap bilangan yang berada diantara 3000 dan 8000 pastilah memiliki banyak angka yang sama yakni 4 angka jika ditampilkan dalam bentuk kolom menjadi:



- Perhatikan untuk mengisi ribuan hanya dapat diisi angka 3, 4, 5, 6, 7. Artinya terdapat 5 cara mengisi ribuan.
- Untuk mengisi ratusan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 7 yang mungkin (mengapa?).
- Untuk mengisi puluhan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 6 angka yang mungkin (mengapa?).
- Untuk mengisi satuan dapat diisi angka 1 sampai 8 tetapi hanya ada 5 angka yang mungkin (mengapa?).

Dengan demikan, banyak angka yang dapat mengisi keempat posisi tersebut adalah sebagai berikut:

5	7	6	5

Banyak susunan nomor seri barang yang diperoleh adalah: $5 \times 7 \times 6 \times 5 = 1.050$ cara.

Berkaitan dengan Masalah 8.2,

- Hitunglah banyak cara menyusun nomor seri barang, jika angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 diperbolehkan berulang.
- Seandainya manager supermarket tersebut ingin menyusun nomor seri barang adalah bilangan-bilangan ganjil yang terdiri dari 5 angka. Berapa cara menyusun nomor seri tersebut.

Dari pembahasan masalah, contoh dan kegiatan di atas, dapat kita simpulkan dalam aturan perkalian berikut ini.

Aturan Perkalian :

Jika terdapat k unsur yang tersedia, dengan:

n_1 = banyak cara untuk menyusun unsur pertama

= banyak cara untuk menyusun unsur kedua setelah unsur pertama tersusun

n_3 = banyak cara untuk menyusun unsur ketiga setelah unsur kedua tersusun

:

n_k = banyak cara untuk menyusun unsur ke- k setelah objek- unsur sebelumnya tersusun

Maka banyak cara untuk menyusun k unsur yang tersedia adalah:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k.$$

- Dari pembahasan masalah, contoh dan kegiatan di atas, dapat kita simpulkan dalam aturan perkalian berikut ini.

Matematika merupakan bahasa simbol. Oleh karena itu, penulisan aturan perkalian di atas dapat disederhanakan dengan menggunakan faktorial.

Mari kita pelajari dengan teliti materi berikut.

b. Faktorial

Pada pembahasan di atas kamu telah melakukan perkalian $3 \times 2 \times 1 = 6$.
Coba anda lakukan perkalian berikut:

1) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \ldots$
2) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \ldots$
3) $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = \ldots$

Perkalian-perkalian semua bilangan bulat positif berurut di atas dalam matematika disebut faktorial, yang biasa disimbolkan dengan "!"

Maka perkalian tersebut dapat dituliskan ulang menjadi:

1) $3 \times 2 \times 1 = 3!$
2) $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$
3) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$
4) $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9!$

Secara umum faktorial dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 8.1

a) Jika *n* bilangan asli maka *n*! (dibaca "*n* faktorial") didefinisikan dengan:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

atau

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-3) \times (n-2) \times (n-1) \times n$$

b) 0! = 1

Contoh 8.3

1. Hitunglah:

a. $7! + 4!$ b. $7! \times 4!$ c. $\frac{7!}{4!}$

Alternatif Penyelesaian

a. $7! + 4! = (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1)$

$= 5.040 + 24 = 5.064$

b. $7! \times 4! = (7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) + (4 \times 3 \times 2 \times 1)$

$= 5.040 \times 24 = 120.960$

c. $\frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$

2. Nyatakan bentuk-bentuk berikut dalam bentuk faktorial.

a. 7×6 b. $(6!) \times 7 \times 8$ c. $n \times (n-1) \times (n-3)$

Alternatif Penyelesaian

a. $7 \times 6 = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= \dfrac{7!}{5!}$

Maka dapat dituliskan bahwa $7 \times 6 = \dfrac{7!}{5!}$.

b. $(6!) \times 7 \times 8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$

c. Kerjakan secara mandiri

3. Diketahui $\dfrac{14.(n-1)!.(n-4)!}{5.n!.(n-5)!} = \dfrac{4!}{120}$, tentukanlah nilai n, dengan n bilangan asli.

Alternatif Penyelesaian

$$\frac{14.(n-1)!.(n-4)!}{5.n!.(n-5)!} = \frac{4!}{120} \Leftrightarrow \frac{14.(n-1)!.(n-4)!}{5.n.(n-1)!.(n-5).(n-4)!} = \frac{4!}{120}$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{5.n.(n-5)} = \frac{4!}{120}$$

$$\Leftrightarrow \frac{14}{n.(n-5)} = \frac{5!}{120}$$

$$\Leftrightarrow n2 - 5n - 14 = 0$$

$\therefore$ n = 7.

c. Permutasi

1) Permutasi dengan Unsur yang Berbeda

Masalah-8.3

Seorang resepsionis klinik ingin mencetak nomor antrian pasien yang terdiri tiga angka dari angka 1, 2, 3, dan 4. Tentukan banyak pilihan nomor antrian dibuat dari:

a. Tiga angka pertama.

b. Empat angka yang tersedia.

Alternatif Penyelesaian

a. Jika resepsionis menggunakan angka 1, 2, 3 maka nomor antrian yang dapat disusun adalah:

123	132	213	231	312	321

Terdapat 6 angka kupon antrian.

b. Jika nomor antrian disusun dengan menggunakan angka 1, 2, 3, dan 4, maka susunan nomor antrian yang diperoleh adalah:

123	142	231	312	341	421
124	143	234	314	342	423
132	213	243	321	412	431
134	214	241	324	413	432

Sehingga terdapat 24 pilihan nomor antrian.

Mari kita cermati bagaimana menyelesaikan masalah di atas dengan menggunakan konsep faktorial.

1. Jika nomor antrian disusun dengan menggunakan angka 1, 2, 3 maka banyak susunan nomor antrian adalah:

$$6 = 3\times 2\times 1 = \frac{3\times 2\times 1}{1} = \frac{3!}{1!} = \frac{3!}{(3-3)!}$$

2. Jika nomor antrian disusun dengan menggunakan angka 1, 2, 3, dan 4 maka banyak susunan nomor antrian adalah:

$$24 = 4\times 3\times 2\times 1 = \frac{4\times 3\times 2\times 1}{1} = \frac{4!}{1!} = \frac{4!}{(4-3)!}$$

Demikian selanjutnya jika diteruskan, banyak susunan k angka dari n angka yang disediakan yang dapat dibuat adalah:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \text{ dengan } n \geq k. \qquad (*)$$

Untuk menguji kebenaran pola rumusan (*), coba kita gunakan untuk memecahkan masalah berikut ini.

Masalah-8.4

Sekolah SMA Generasi Emas, setiap tahun mengadakan acara pentas seni. Biasanya 8 bulan sebelum acara akbar, para siswa melakukan pemilihan untuk jabatan ketua dan sekretaris. Setelah melalui seleksi terdapat 5 kandidat yang mendaftarkan diri; yakni, Ayu (A), Beni (B), Charli (C), Dayu (D), dan Edo (E). Bagaimana kita mengetahui banyak cara memilih ketua dan sekretaris untuk acara pentas seni sekolah tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk mengetahui banyak susunan pengurus dapat dilakukan dengan beberapa cara, antara lain:

a) Dengan cara mendaftar:

Seluruh kandidat yang mungkin dibuat dapat didaftarkan sebagai berikut:

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

Dari daftar di atas diperoleh banyak susunan pengurus acara pentas seni adalah 20 cara.

b) Dengan Aturan Perkalian

Untuk masalah ini, akan dipilih 2 pengurus dari 5 kandidat yang ada. Dengan menggunakan pola rumusan (*) diperoleh:
$n = 5$ dan $k = 2$

maka $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{5!}{(5-2)!} = 20$ cara

Dengan pembahasan Masalah 8.3 dan 8.4 ditemukan bahwa banyak susunan k unsur berbeda dari n unsur yang tersedia dan memperhatikan urutan susunannya dapat dirumuskan dengan $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Bentuk susunan ini dikenal dengan "permutasi".

Definisi 8.2

Permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia biasa dituliskan P_k^n atau ${}_nP_k$ serta $P(n, k)$ dengan $k \leq n$.

- Banyak permutasi n unsur ditentukan dengan aturan

  $P_n^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times L \times 3 \times 2 \times 1 = n!$

- Banyak permutasi unsur dari n unsur yang tersedia, dapat ditentukan dengan:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Pada buku ini, penulisan permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia kita menggunakan: P_k^n .

Sekarang cermati permutasi-permutasi di bawah ini:

1) $P_1^{10} = \frac{10!}{(10-1)!} = \frac{10 \times 9!}{9!} = 10$

2) $P_9^{10} = \frac{10!}{(10-9)!} = \frac{10!}{1!} = 10!$

Diperlukan strategi untuk menyelesaikan perkalian dengan faktorial.

3) $P_7^{8} = \frac{8!}{(8-7)!} = \frac{8!}{1!} = 8!$

4) $P_{44}^{45} = \frac{45!}{(45-44)!} = \frac{45!}{1!} = 45!$

5) $P_1^{1000} = \frac{1000!}{(1000-1)!} = \frac{1000 \times 999!}{999!} = 1000$

6) $P_{2013}^{2014} = \frac{2014!}{(2014-2013)!} = \frac{2014!}{1!} = 2014!$

7) $P_{1000}^{1000} = \frac{1000!}{(1000-1000)!} = \frac{1000!}{0!} = 1000!$

Dari pembahasan permutasi-permutasi di atas, dapat kita simpulkan sifat berikut ini.

Sifat 8.1

Diketahui $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$.

1) Jika $n - k = 1$, maka $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n!$.

2) Jika $k = 1$, maka $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n$.

3) Jika $n - k = 0$, maka $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n!$.

Bukti:

1) Diketahui $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$, dan $n - k = 1$ atau $n = k + 1$. Akibatnya:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \Leftrightarrow P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1-k)!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

$$\therefore\ P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n!.$$

2) Diketehui $k = 1$ dan $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$, maka:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \Leftrightarrow P_1^n = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

3) Kerjakan sebagai latihanmu.

2) Permutasi dengan Unsur-Unsur yang Sama

Masalah-8.5

Berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari 3 huruf yang diambil dari huruf-huruf pembentuk kata APA?

Alternatif Penyelesaian

Tersedia 3 unsur; yakni, huruf-huruf A, P, dan A. Dari 3 unsur yang tersedia memuat 2 unsur yang sama; yaitu, huruf A.

Banyak permutasi 3 unsur yang memuat 2 unsur yang sama tersebut akan dicari melalui pendekatan banyak permutasi 3 unsur yang berbeda. Oleh karena itu, huruf-huruf yang sama (huruf A) diberi label A_1, dan A_2.

Banyak permutasi dari 3 unsur yang melibatkan 2 unsur yang sama adalah:

A_1PA_2, A_2PA_1, A_1A_2P, A_2A_1P, PA_1A_2, PA_2A_1.

Susunan-susunan tersebut dikelompokkan sedemikian rupa sehingga dalam satu kelompok memuat permutasi yang sama apabila labelnya dihapuskan.

Misalnya:

- Kelompok A_1PA_2 dan A_2PA_1, jika labelnya dihapus maka diperoleh permutasi APA .
- Kelompok A_1A_2P, A_2A_1P , jika labelnya dihapus maka diperoleh permutasi AAP.
- Kelompok PA_1A_2, PA_2A_1, jika labelnya dihapus maka diperoleh permutasi PAA.

Dalam tiap-tiap kelompok di atas terdapat $2! = 2$ permutasi, yaitu menyatakan banyak permutasi dari unsur A_1 dan A_2. Sedangkan A_1 dan A_2 menjadi unsur-unsur yang sama jika labelnya dihapuskan.

Dengan demikian banyak permutasi 3 unsur yang memuat 2 unsur yang sama dapat ditentukan sebagai berikut.

$$P_{2,1}^{3} = \frac{3!}{2!.1!} = 3 \text{ susunan}$$

Masalah-8.6

Pada sebuah upacara pembukaan turnamen olah raga disusun beberapa bendera klub yang ikut bertanding. Terdapat 3 bendera berwarna putih, 2 bendera berwarna biru, dan 1 bendera berwarna merah. Tentukanlah susunan bendera yang ditampilkan pada acara upacara pembukaan tersebut!

Alternatif Penyelesaian

Dengan analogi yang sama pada Masalah 8.5 diperoleh:

Banyak unsur yang tersedia 6, sedangkan unsur yang sama adalah

1. 3 bendera berwarna putih
2. 2 bendera berwarna biru

dan 1warna merah. Oleh karena itu dapat diperoleh banyak permutasi dari 6 unsur yang memuat 3 unsur yang sama dan 2 unsur yang sama adalah

$$P^{6}_{3,2,1} = \frac{6!}{3!.2!.1!} \text{ susunan}$$

Dari pembahasan Masalah 8.5 dan 8.6 , dapat kita rumuskan pola secara umum permutasi n *unsur* dengan melibatkan sebanyak $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ unsur yang sama adalah sebagai berikut.

Sifat 8.2

Misalkan dari n unsur terdapat $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ unsur yang sama dengan $k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n \leq n$. Banyak permutasi dari n unsur tersebut adalah

$$P^{n}_{k_1,k_2,k_3,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!\ldots k_n!}$$

Contoh 8.4

Berapa banyak susunan yang dapat dibentuk dari 3 huruf yang diambil dari huruf-huruf pembentuk kata K O G N I T I V I S T I K?

Alternatif Penyelesaian

Tersedia 13 unsur dalam kata tersebut; yaitu huruf-huruf K, O, G, N, I, T, I, V, I, S, T, I, K. Dari 13 unsur yang tersedia memuat 4 huruf I yang sama, 2 huruf K yang sama dan 2 huruf T yang sama.

Jika kita partisi banyak huruf pembentuk kata K O G N I T I V I S T I K adalah sebagai berikut:

$k_K + k_O + k_G + k_N + k_I + k_T + k_V + k_S = 2 + 1 + 1 + 1 + 4 + 2 + 1 + 1 = 13.$

Jadi permutasi yang melibatkan unsur yang sama, dihitung dengan menggunakan Sifat 8.2, diperoleh:

$$\frac{n!}{k_1!.k_2!.k_3!....k_k!} = \frac{13!}{2!.1!.1!.1!.4!.2!.1!.1!} = 129.729.600 \text{ cara.}$$

Sampai sejauh ini, kita sudah mengkaji bagaimana menentukan susunan unsur baik yang melibatkan unsur yang sama atau tidak. Pernahkan kamu melihat susunan objek-unsur dalam suatu meja berputar? Bagaimana menentukan banyak cara menyusun unsur jika disusun melingkar?

Berikut ini, kita akan pelajari permutasi siklis sebagai cara menentukan banyak cara menyusun unsur yang tersusun melingkar.

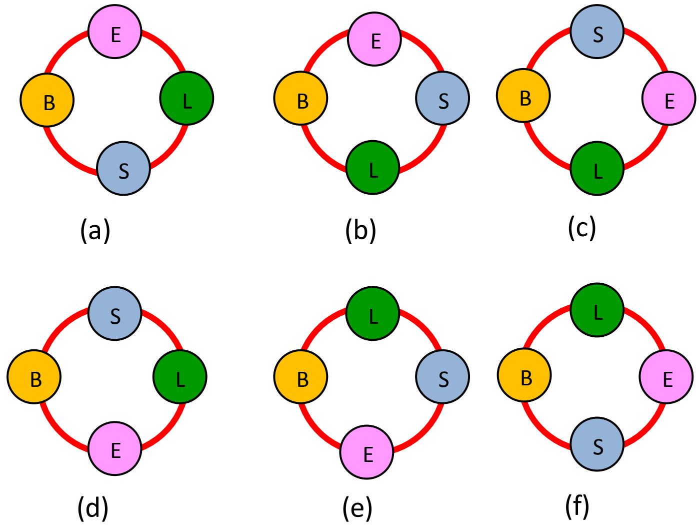
c. Permutasi Siklis

Masalah-8.7

Beny (B), Edo (E), dan Lina (L) berencana makan bersama di sebuah restoran. Setelah memesan tempat, pramusaji menyiapkan sebuah meja bundar buat mereka. Selang beberapa waktu Siti datang bergabung dengan mereka. Berapa banyak cara keempat orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Meskipun dalam keseharian kita tidak mempersoalkan urutan posisi duduk mengitari suatu meja, tidak ada salahnya kita menyelidiki posisi duduk Beny, Edo, Lina, dan Siti yang duduk mengitari meja bundar. Adapun posisi duduk yang mungkin keempat orang tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 8.3 Susunan posisi tempat duduk

Terdapat 6 cara posisi duduk keempat mengitari meja bundar tersebut.

- Ternyata, pola $(n - 1)!$ Akan menghasilkan banyak cara dengan banyak cara yang diperoleh dengan cara manual, yaitu $(4 - 1)! = 3! = 6$ cara.

  Coba temukan susunan posisi duduk Beny, Edo, dan Lina secara manual. Kemudian bandingkan dengan menggunakan pola $(n - 1)!$.

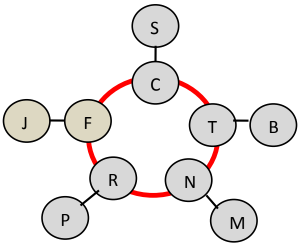
Masalah-8.8

Seorang direktor bank swasta yang berkantor di Jakarta akan melakukan rotasi kepala cabang yang terdapat di 5 kota besar, yaitu Fahmi (Jakarta), Cintha (Surabaya), Trisnawati (Bandung), Novand (Medan), dan Rahmat (Padang). Dia meminta staff ahlinya untuk menyusun pilihan-pilihan yang mungkin untuk rotasi kepala cabang bank yang dipimpimnya.

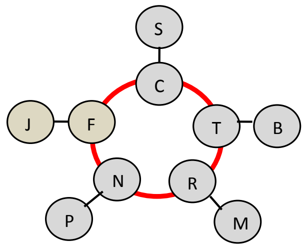
Bantulah staff ahli tersebut untuk menyusun pilihan rotasi kepala cabang bank swasta tersebut

Alternatif Penyelesaian

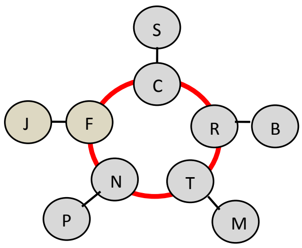
Misalkan kelima kepala cabang tersebut duduk melingkar, seperti diilustrasikan pada gambar berikut ini.



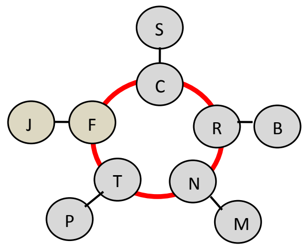
Posisi kepala cabang sebelum rotasi



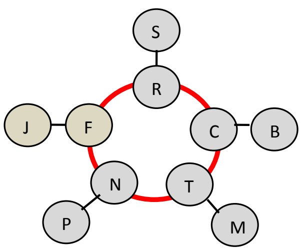
Pilihan rotasi 1



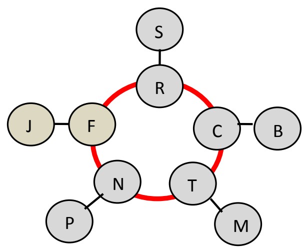
Pilihan rotasi 2



Pilihan rotasi 3



Pilihan rotasi 4



Pilihan rotasi 5

Gambar 8.4 Ilustrasi rotasi kepala cabang bank swasta

- ♦ Menurut kamu, ada berapakah pilihan rotasi kepala cabang bank swasta tersebut? Berikan penjelasanmu.

Untuk menentukan banyak cara menyusun unsur dalam posisi melingkar, kita dapat menguji validitas pola $(n - 1)!$.

- Jika terdapat 4 unsur, maka banyak susunan adalah $(4 - 1)! = 3! = 6$ cara.
- Jika terdapat 3 unsur, maka banyak susunan adalah $(3 - 1)! = 2! = 2$ cara.
- Jika terdapat 5 unsur, maka banyak susunan adalah $(5 - 1)! = 4! = 24$ cara.

Secara umum, jika terdapat n unsur yang disusun melingkar, maka banyak susunan unsur yang mungkin disebut permutasi siklis, dinyatakan dalam sifat berikut ini.

Sifat 8.3

Misalkan dari n unsur yang berbeda yang tersusun melingkar. Banyak permutasi siklis dari *n* unsur tersebut dinyatakan:

$$P_{siklis} = (n-1)!$$

- Perhatikan kembali Masalah 8.8, karena alasan keluarga Fahmi dan Trisnawati hanya mau dirotasi jika mereka berdua ditempatkan di pulau yang sama. Berapa pilihan rotasi kepala cabang bank swasta yang mungkin? Kerjakan secara mandiri dan bandingkan hasil kerjamu dengan temanmu.

1.4 Kombinasi

Cara menyusun unsur dengan memperhatikan urutan telah dikaji pada sub pokok bahasan permutasi. Selanjutnya, dalam percakapan sehari-hari kita mungkin pernah mengatakan "kombinasi warna pakaian kamu sangat tepat" atau tim sepakbola itu merupakan kombinasi pemain-pemain handal". Apakah kamu memahami arti kombinasi dalam kalimat itu?

Untuk menjawabnya, mari kita pelajari makna kombinasi melalui memecahkan masalah-masalah berikut ini.

Masalah-8.9

Hasil seleksi PASKIBRA di Kabupaten Bantul tahun 2012, panitia harus memilih 3 PASKIBRA sebagai pengibar bendera dari 5 PASKIBRA yang terlatih, yaitu Abdul (A), Beny (B), Cyndi (C), Dayu (D), dan Edo (E). 3 PASKIBRA yang dipilih dianggap memiliki kemampuan sama, sehingga tidak perhatikan lagi PASKIBRA yang membawa bendera atau penggerek bendera.
Berapa banyak pilihan PASKIBRA yang dimiliki panitia sebagai pengibar bendera?

Alternatif Penyelesaian

Mari kita selesaikan masalah ini dengan cara manual, sambil memikirkan bagaimana pola rumusan untuk menyelesaikannya.

Adapun pilihan-pilihan yang mungkin sebagai pengibar bendera adalah sebagai berikut:

- Pilihan 1: Abdul, Badu, Cyndi
- Pilihan 2: Abdul, Badu, Dayu

- Pilihan 3: Abdul, Badu, Edo
- Pilihan 4: Abdul, Cyndi, Dayu
- Pilihan 5: Abdul, Cyndi, Edo
- Pilihan 6: Abdul, Dayu, Edo
- Pilihan 7: Badu, Cyndi, Dayu
- Pilihan 8: Badu, Cyndi, Edo
- Pilihan 9: Badu, Dayu, Edo
- Pilihan 10: Cyndi, Dayu, Edo

Terdapat 10 pilihan PASKIBRA sebagai pengibar bendera.

Dengan menggunakan faktorial, 10 cara yang ditemukan dapat dijabar sebagai berikut:

$$10 = \frac{5}{3} \times 3! \text{ atau } 10 = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} = \frac{5!}{2!.3!} \qquad (\#)$$

◆ Seandainya terdapat 4 PASKIBRA, berapa banyak cara memilih 3 PASKIBRA sebagai pengibar bendera? Coba kerja dengan cara manual, kemudian coba uji dengan menggunakan pola (#).

Perlu kita cermati, bahwa susunan kali ini perlu digarisbawahi bahwa pilihan (Abdul, Badu, Cyndi) sama dengan pilihan (Abdul, Cyndi, Badu) atau (Badu, Abdul, Cyndi) atau (Badu, Cyndi, Abdul) atau (Cyndi, Abdul, Badu) atau (Cyndi, Badu, Abdul).

◆ Jika pembawa bendera harus PASKIBRA perempuan, berapa banyak pilihan pengibar bendera yang mungkin? Coba kerjakan secara mandiri.

Masalah-8.10

Pada suatu pusat pelatihan atlit bulu tangkis, terdapat 3 atlit perempuan dan 4 atlit laki-laki yang sudah memiliki kemampuan yang sama. Untuk suatu pertandingan akbar, tim pelatih ingin membentuk 1 pasangan ganda campuran.

Berapa banyak pasangan yang dapat dipilih oleh tim pelatih?

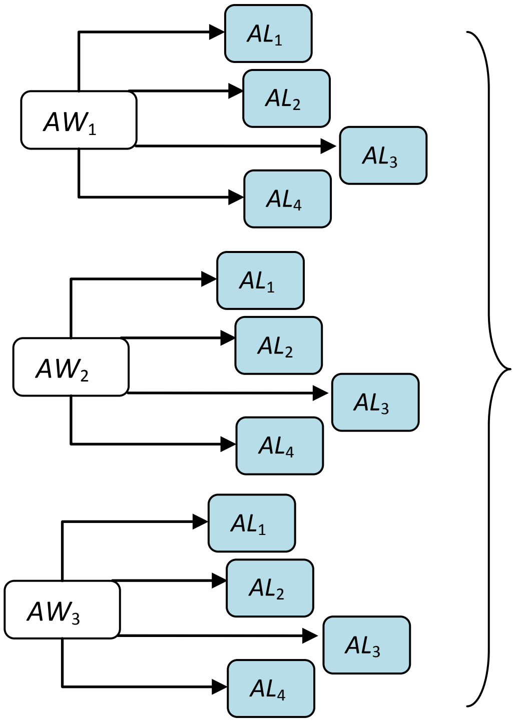
Alternatif Penyelesaian

Mari kita selesaikan masalah ini dengan menggunakan cara manual. Untuk memilih 1 pasangan ganda campuran berarti memilih 1 atlit wanita dari 3 atlit wanita dan memilih 1 atlit laki-laki dari 4 atlit laki-laki.

Misalkan tiga atlit wanita kita beri inisial: AW_1¬, AW_2, AW_3; dan

4 atlit laki-laki kita beri inisial: AL_1¬, AL_2, AL_3, AL_4.

Dengan menggunakan metode diagram, banyak pilihan 1 pasangan ganda campuran dinyatakan sebagai berikut:



Terdapat 12 pasangan ganda campuran yang dapat dipilih.

Gambar 85 Diagram pohon pilihan pasangan ganda campuran

Dengan menggunakan faktorial, mari kita mencoba menentukan jabarkan 12 cara dengan menerapakan pola (#).

$$12 = 3 \times 4 = \left(\frac{3}{1} \times 1!\right) \times \left(\frac{4}{1} \times 1!\right) = \left(\frac{3!}{1!.2!}\right) \times \left(\frac{4!}{1!.3!}\right)$$

Dari pembahasan Masalah 8.9 dan 8.10, memilih k unsur dari n unsur tanpa memperhatikan urutan unsur yang dipilih disebut kombinasi. Kombinasi k unsur dari n unsur yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 8.3

Kombinasi k unsur dari n unsur biasa dituliskan C_k^n ; ${}_nC_k$; $C(n, k)$ atau $\binom{n}{r}$

Banyak kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia, tanpa memperhatikan urutan susunannya dapat ditentukan dengan:

$C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!}$, dengan $n \geq k$, n, k merupakan bilangan asli.

Untuk keseragaman notasi, pada buku ini kita sepakati menggunakan simbol C_k^n untuk menyatakan kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia.

Contoh 8.5

Selidiki hubungan P_k^n dengan C_k^n.

Alternatif Penyelesaian

Pada Definisi 8.2 $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Sedangkan berdasarkan Definisi 8.3 $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!}$.
Dari kedua definisi tersebut, dipereoleh hubungan:

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{k!}.$$

- Secara hitungan matematis, hubungan P_k^n dengan C_k^n adalah $C_k^n = \dfrac{P_k^n}{k!}$. Jelaskan arti hubungan tersebut secara deskriptif.

Dari pembahasan komputasi dan Contoh 8.5 di atas, dapat kita simpulkan sifat berikut ini.

Sifat 8.4

Diketahui $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!}$, dengan $n \geq k$.

1) Jika $n - k = 1$, maka $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!} = n$.
2) Jika $k = 1$, maka $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!} = n$.
3) Jika $n = k$, maka $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!} = 1$.
4) Jika $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, maka $C_k^n = \dfrac{P_k^n}{k!}$.

Bukti:

1) Diketahui $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!}$, dengan $n \geq k$, dan $n - k = 1$ atau $n = k + 1$, maka:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \frac{(k+1)!}{(k+1-k)!.k!} = \frac{(k+1)\times k!}{(1)!.k!} = k+1 = n.$$

2) Karena $k = 1$, dan $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!.k!}$, dengan $n \geq k$, maka:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!.k!} \Leftrightarrow C_1^n = \frac{n!}{(n-1)!.1!} = \frac{n\times(n-1)!}{(n-1)!.(1)!} = n.$$

3) Kerjakan sebagai latihanmu.

1.5 Binomial Newton

Kamu telah mempelajari tentang kombinasi sebagai bagian dari aturan pencacahan. Dengan menggunakan konsep kombinasi dapat juga kita kembangkan pada bahasan binomial. Perhatikan perpangkatan berikut ini.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= 1a + 1b \\
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) \\
&= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)\left(1a^2 + 2ab + 1b^2\right) \\
&= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a+b)^4 &= (a+b)(a+b)^3 \\
&= (a+b)\left(1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3\right) \\
&= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3
\end{aligned}
$$

Bagaimana untuk penjabaran pada perpangkatan yang lebih tinggi? Untuk itu perhatikan langkah berikut. Dengan menggunakan sifat distribusi penjabaran dari $(a + b)^4$ adalah:

$$
\begin{array}{lr}
(a\times) \quad 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3 & (\times b) \\
1a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 \qquad\qquad & \\
\underline{\qquad 1a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + 1b^5} & + \\
1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5 &
\end{array}
$$

Sehingga diperoleh $(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$.

Koefisien-koefisien penjabaran di atas jika disusun dalam bentuk diagram dapat menghasilkan gambar di bawah ini:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Diagram di atas dikenal dengan sebutan segitiga Pascal

Sekarang amati pola segitiga Pascal. Dengan menggunakan konsep kombinasi C_r^n dapat dikaitkan dengan pola segitiga Pascal di atas yakni:

$$C_0^0 = C_0^1 = C_1^1 = C_0^2 = C_2^2 = C_0^3 = C_3^3 = C_0^4 = C_4^4 = C_0^5 = C_5^5 = 1$$

$$C_1^2 = 2$$

$$C_1^3 = C_2^3 = 3$$

dan seterusnya

sehingga dengan menggunakan konsep kombinasi maka dapat diperoleh pola segitiga Pascal yang baru, yakni:

$$\begin{array}{ll}
(a+b)^0 \to n=0 & C_0^0 \\
(a+b)^1 \to n=1 & C_0^1 \quad C_1^1 \\
(a+b)^2 \to n=2 & C_0^2 \quad C_1^2 \quad C_2^2 \\
(a+b)^3 \to n=3 & C_0^3 \quad C_1^3 \quad C_2^3 \quad C_3^3 \\
(a+b)^4 \to n=4 & C_0^4 \quad C_1^4 \quad C_2^4 \quad C_3^4 \quad C_4^4 \\
(a+b)^5 \to n=5 & C_0^5 \quad C_1^5 \quad C_2^5 \quad C_3^5 \quad C_4^5 \quad C_5^5
\end{array}$$

Dari uraian di atas maka penjabaran perpangkatan dapat kita tuliskan kembali dalam bentuk kombinasi yaitu

$$(a+b)^0 = C_0^0$$

$$(a+b)^1 = C_0^1 a + C_1^1 b$$

$$(a+b)^2 = C_0^2 a^2 + C_1^2 ab + C_2^2 b^2$$

$$(a+b)^3 = C_0^3 a^3 + C_1^3 a^2 b + C_2^3 ab^2 + C_3^3 b^3$$

$$(a+b)^4 = C_0^4 a^4 + C_1^4 a^3 b + C_2^4 a^2 b^2 + C_3^4 ab^3 + C_4^4 b^3$$

$$(a+b)^5 = C_0^5 a^5 + C_1^5 a^4 b + C_2^5 a^3 b^2 + C_3^5 a^2 b^3 + C_4^5 ab^4 + C_5^5 b^5$$

Dengan pola di atas, dikenal sebagai *aturan Binomial Newton* (ekspansi binomial) dan bentuk umum $(a + b)^n$ dituliskan sebagai berikut:

Aturan Binomial Newton

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b^1 + \ldots + C_{n-1}^n ab^{n-1} + C_n^n b^n$$

atau

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$$

n, r merupakan bilangan asli.

Contoh 8.6

Jabarkan bentuk binomial berikut ini:

1. $(2a - 5)^3 =$
2. $(a + b)^5 =$
3. $(3a + 2b)^4 =$
4. $\left(a + \dfrac{2}{a}\right)^5 =$
5. Diketahui binomial $\left(2a + \dfrac{1}{a}\right)^{14}$. Jabarkanlah 3 suku pertama dan dua suku terakhir.
6. Tentukanlah koefisien dari pada bentuk binomial $\left(a^2 + \dfrac{2}{a}\right)^{12}$.

Alternatif Penyelesaian

1. Dari soal di atas diketahui $a = 2a$ dan $b = 5$ maka

$$(2a-5)^3 = C_0^3(2a)^3 5^0 + C_1^3(2a)^2 5^1 + C_2^3(2a)^1 5^2 + C_3^3(2a)^0 5^3$$

$$= 2(8a^3)1 + 3(4a^2)5 + 3(2a)25 + 1(1)125$$

$$(2a-5)^3 = 16a^3 + 60a^2 + 150a + 125$$

2. $(a+b)^6 = C_0^6 a^6 b^0 + C_1^6 a^{6-1} b^1 + C_2^6 a^{6-2} b^2 + C_3^6 a^{6-3} b^3 + C_4^6 a^{6-4} b^4 +$
$C_5^6 a^{6-5} b^5 + C_6^6 a^{6-6} b^6$
$= 1a^6 1 + 6a^5 b^1 + 15a^4 b^4 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6a^1 b^5 + 1a^0 b^6$
$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^4 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^6 + b^6$

3. Cermati ekpansi di bawah ini.
$(3a+2b)^4 = C_0^4 (3a)^4 b^0 + C_1^4 (3a)^{4-1} b^1 + C_2^4 (3a)^{4-2} b^2 + C_3^4 (a)^{4-3} b^3 +$
$C_4^4 (a)^{4-4} b^4$
$= 1(81a^4)1 + 4(3a)^3 b^1 + 6(3a)^2 b^2 + 4(3a)^1 b^3 + 1(3a)^0 b^4$
$= 81a^4 + 4(81a^3)b + 6(9a^2)b^2 + 4(3a)b^3 + 1b^4$
$= 81a^4 + 324a^3 b + 54a^2 b^2 + 12ab^3 + b^4$

- Sebagai latihan untuk mengasah kemampuan dalam menyelesaikan soal-soal binomial newton, kerjakan secara mandiri soal nomor 4, 5, dan 6.

Uji Kompetensi 8.1

1. Seorang staff ahli di suatu POLDA mendapat tugas untuk menyusun nomor pada plat kendaraan roda empat yang terdiri 3 angka dan 4 angka. Staff tersebut hanya diperbolehkan menggunakan angka 1, 2, 3, 4, 5, 6 untuk plat yang terdiri dari 3 angka dan angka 0 sampai 9 untuk plat yang terdiri 4 angka.
   a) Berapa cara menyusun plat kendaraan yang terdiri dari 3 angka dan 4 angka?
   b) Jika nomor-nomor plat tersebut akan dilengkapi dengan seri yang terdiri dari dua huruf vokal. Berapa banyak susunan seri plat yang mungkin?
2. Diberikan angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Rangkailah bilangan yang terdiri dari 5 angka yang berbeda dengan syarat:
   a) Bilangan ganjil
   b) Bilangan genap
3. Dari kota A ke kota B dilayani oleh 4 bus dan dari B ke C oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota A ke kota C melalui B kemudian kembali lagi ke A juga melalui B. Jika saat kembali dari C ke A, ia tidak mau menggunakan bus yang sama, maka hitunglah banyak cara perjalanan orang tersebut.

4. Tentukan nilai dari:

$$\frac{89!\times 38!}{86!\times 41!}$$

5. Sederhanakanlah persamaan berikut:

   a. $\frac{n!}{(n-1)!}$ b. $\frac{(n+2)!}{n!}$ c. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

6. Banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, dengan tidak ada 3 titik yang segaris?
7. Banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, dengan tidak ada 3 titik yang segaris?
8. Tentukan banyak susunan pemain yang berbeda dari team bola voli yang terdiri dari 10 pemain bila salah seorang selalu menjadi kapten dan seorang lain tidak bisa bermain karena cedera!
9. Berapa banyak cara untuk menempatkan 3 anak laki-laki dan 2 anak perempuan duduk berjajar tanpa membedakan tiap anak?
10. Suatu delegasi terdiri dari 3 pria dan 3 wanita yang dipilih dari himpunan 5 pria yang berbeda usia dan 5 wanita yang juga berbeda usia. Delegasi itu boleh mencakup paling banyak hanya satu anggota termuda dari kalangan wanita atau anggota termuda dari kalangan pria. Hitunglah banyak cara memilih delegasi tersebut.
11. Seminar Matematika dihadiri oleh 20 orang. Pada saat bertemu mereka saling berjabat tangan satu dengan yang lain. Berapakah jabat tangan yang terjadi?
12. Perhatikan gambar berikut.

    Jika suatu segitiga dibentuk dengan menggunakan 3 titik. Berapa banyak segitiga yang dapat dibentuk.
13. Tentukanlah banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf:

   a. MATEMATIKA
   b. PENDIDIKAN
   c. TRIGONOMETRI
   d. MALAKA

11. Jabarkanlah bentuk binomial berikut ini:

a. $(2a + 3b)^8$

b. $(4a + 2b)^{10}$

c. $\left(2a+\dfrac{b}{2}\right)^6$

d. $\left(\dfrac{2a}{3}+\dfrac{1}{3b}\right)^8$

Projek

Rancang suatu permainan yang menggunakan konsep aturan pencacahan. Sebelum kamu susun laporan projek ini, terlebih dahulu lakukan simulasi sebagai uji validitas penggunaan konsep.

2. PELUANG

Kamu sudah mempelajari konsep peluang pada Bab 12 Buku Matematika kelas X. Dengan pengalaman belajar itu, kita akan mengembangkan konsep peluang dengan memperhatikan banyak cara semua kejadian mungkin terjadi dan banyak cara suatu kejadian mungkin terjadi. Dengan demikian, pada sub bab ini, kita akan mendalami bagaimana menentukan banyak anggota ruang sampel kejadian dengan menggunakan konsep aturan pencacahan.

Mari kita mulai sub bab ini dengan mengkaji ruang sampel suatu kejadian.

2.1 Konsep Ruang Sampel

Masih ingatkah kamu konsep himpunan yang kamu pelajari di kelas VII SMP? Pada sub bab ini, kita ingin membangun konsep ruang sampel dengan menggunakan konsep aturan pencacahan melalui konsep himpunan bagian.

Mari kita cermati pembahasan di bawah ini.

Diberikan $S = \{p, r, s, t\}$ $n(S) = 4$.

Tentu kamu masih ingat bagaimana cara menentukan himpunan bagian dari S. Semua himpunan bagian S disajikan di tabel berikut ini.

Tabel 8.2: Himpunan bagian *S* dengan tidak memperhatikan urutan

Himpunan Bagian Beranggota						
Kejadian	0	1	2	3	4	
	∅	{*p*}, {*r*}, {*s*}, {*t*}	{*p*,*r*}, {*p*,*s*}, {*p*,*t*}, {*r*,*s*}, {*r*,*t*}, {*s*,*t*}	{*p*,*r*,*s*}, {*p*,*r*,*t*}, {*p*,*s*,*t*} {*r*,*s*,*t*}	{*p*, *r*, *s*, *t*}	
Total	1	4	6	4	1	16
	C_0^4	C_1^4	C_2^4	C_3^4	C_4^4	2^n

Perhatikan angka-angka; 1, 4, 6, 4, 1 merupakan koefisien binomial untuk ekspansi $(a + b)^4$, yang dapat ditentukan berturut-turut melalui C_0^4 , C_1^4 , C_2^4, C_3^4, dan C_4^4. Dari tabel di atas, dapat diartikan bahwa banyak kejadian munculnya 2 anggota himpunan bagian dari *S* adalah $C_2^4 = 6$. Banyak semua himpunan bagian dari himpunan $S = 24 = 16$. Himpunan kuasa *S* adalah koleksi semua himpunan bagian *S* (Ingat kembali konsep himpunan kuasa seperti yang telah kamu pelajari pada kelas VII SMP). Jadi 16 adalah banyak anggota ruang sampel kejadian semua himpunan bagian *S*.

Selanjutnya Tabel 8.2 akan berubah jika kita memperhatikan urutan anggota. Kondisi ini disajikan pada tabel berikut ini.

Tabel 8.3: Himpunan bagian *S* dengan memperhatikan urutan

Himpunan Bagian Beranggota						
Kejadian	0	1	2	3	4	
	∅	{*p*}, {*r*}, {*s*}, {*t*}	{*p*,*r*},{*r*,*p*} {*p*,*s*},{*s*,*p*} {*p*,*t*},{*t*,*p*} {*r*,*s*},{*s*,*r*} {*r*,*t*},{*t*,*r*} {*s*,*t*},{*t*,*s*}	{*p*,*r*,*s*}, {*p*,*s*,*r*}, ... {*p*,*r*,*t*}, {*p*,*t*,*r*}, ... {*p*,*s*,*t*}, {p,s,t}, ...	{*p*, *r*, *s*, *t*}, {*p*, *r*, *t*, *s*}, {*p*, *s*, *r*, *t*}, ...	
					{*r*,*s*,*t*}, {*r*,*t*,*s*}, ...	
Total	1	4	6	24	24	65
	P_0^4	P_1^4	P_2^4	P_3^4	P_4^4	

Pada kasus memperhatikan urutan anggota, konsep kombinasi yang digunakan pada Tabel 8.2 berubah menjadi konsep permutasi. Analog dengan kombinasi, banyak anggota kejadian munculnya himpunan bagian S beranggota dua (dengan memperhatikan urutan) adalah $P_2^4 = 12$. Sedangkan 65 merupakan banyak anggota ruang sampel kejadian semua himpunan bagian dengan memperhatikan urutan anggotanya.

Tentunya sudah punya gambaran tentang penerapan konsep permutasi atau kombinasi dalam menentukan banyak kejadian muncul pada suatu percobaan.

Berikut ini seorang ibu memiliki kesempatan memilih, mari kita selidiki apakah masalah tersebut menggunakan konsep permutasi atau kombinasi.

Masalah-8.11

Pada suatu tempat penitipan anak berusia 3 – 6 tahun menyediakan makanan dan minimum bergizi yang bervariasi. Bu Sity, karena alasan jam kerja memilih menitipkan anaknya di tempat penitipan ini. Dari semua variasi makanan dan minimum, Bu Sity harus memilih 2 jenis buah dari 4 jenis buah yang disediakan dan memilih 4 makanan dari 6 jenis makanan yang disediakan. Berapa banyak pilihan yang dimiliki oleh Bu Sity? Diasumsikan setiap anak makan juga harus makan buah.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui:

Tersedia 4 jenis buah dan akan dipilih 2 jenis buah.

Tersedia 6 jenis makanan dan akan dipilih 4 jenis makanan.

Setiap si anak makan harus makan bauh.

Ditanya:

Banyak pilihan jenis susu dan jenis makanan.

Untuk kasus ini, misalnya Bu Sity memilih jenis buah 1 (b_1) dan jenis buah 2 (b_2) sama saja dengan memilih b_2 dan b_1. Demikian juga makanan, jika Bu Sity makanan 1 (m_1) dan makanan 3 (m_3) sama saja dengan memilih m3 dan m1(mengapa?).

Dengan demikian kita menggunakan konsep kombinasi untuk menentukan banyak pilihan yang dimiliki oleh Bu Sity.

Karena setiap makan anak Bu Sity juga harus makan bauh, maka banyak kombinasi pilihan makanan dan minuman dinyatakan sebagai berikut:

$$C_2^4 \times C_4^6 = 6 \times 15 = 90 \text{ pilihan.}$$

- Menurut kamu, apa alasannya mengapa kita menggunakan operasi perkalian? Mengapa bukan operasi penjumlahan? Berikan alasanmu serta berikan contoh yang menggunakan operasi penjumlahan.

Contoh 8.7

Bu Jein Mumu, seorang guru matematika di Ambon. Suatu ketika dia ingin memberikan tugas kepada siswa yang sangat rajin dan memiliki daya tangkap di atas rata-rata teman satu kelasnya. Dia mempersiapkan 15 soal matematika berbentuk essai. Namun dari 15 soal itu, Bu Mumu hanya meminta si anak mengerjakan 10 soal, tetapi harus mengerjakan soal nomor 7, 12, dan 15.

Berapa banyak pilihan yang dimiliki anak itu?

Alternatif Penyelesaian

Siswa Bu Mumu harus memilih 7 soal lagi dari 12 soal sisa (mengapa) dan untuk mengetahui banyak cara memilih soal tersebut ditentukan dengan menggunakan kombinasi (beri alasannya), yaitu:

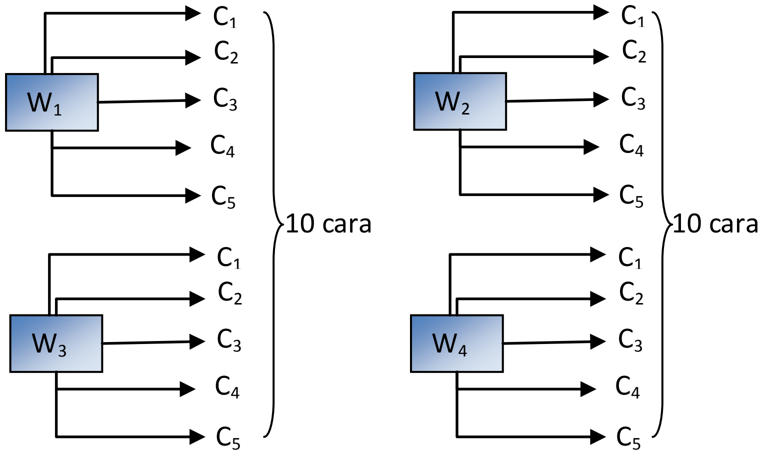
$$C_7^{12} = \frac{12!}{(12-7)!.7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 7!} = 729 \text{ cara.}$$

Contoh 8.8

Toko perhiasan yang berlokasi pusat perbelanjaan menerima 5 jenis cincin keluaran terbaru, misalkan C_1, C_2, C_3, C_4, dan C_5. Tidak lama setelah toko itu buka, 4 wanita berminat mencoba kelima cincin itu. Berapakah banyak cara pemasangan cincin tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Untuk menyelesaikan ini, kita menggunakan aturan kaidah pencahahan. Semua kemungkinan pemasangan cincin dengan keempat wanita tersebut, diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 8.6 Diagram pemasangan cincin

Dengan menggunakan permutasi pemasangan cincin ditentukan sebagai berikut:

$$P_1^5 \times P_1^4 = \frac{5!}{(5-4)!} \times \frac{4!}{(4-1)!} = 5 \times 4 = 20 \text{ cara.}$$

- ♦ Jelaskan mengapa perhitungan permutasi di atas menggunakan operasi perkalian!

Seandainya setiap dua wanita pertama ingin membeli masing-masing 1 cincin. Banyak pilihan cincin untuk kedua wanita itu dihitung dengan permutasi, yaitu:

$P_1^5 \times P_1^4 = 5 \times 4 = 20$ cara (selidiki dengan menggambarkan skema pencacahan).

Dari pembahasan kajian, masalah-masalah, dan contoh-contoh di atas perlu kita tarik kesimpulan penggunaan permutasi atau kombinasi dalam menentukan banyak susunan/cara dalam memilih k unsur dari n unsur yang tersedia. Kesimpulan itu dinyatakan dalam prinsip berikut ini.

Prinsip-8.1

Misalkan dipilih k unsur dari n unsur (secara acak) yang tersedia, dengan $n \geq k$,

i. Jika ada urutan dalam pemilihan k unsur, maka menentukan banyak cara pemilihan ditentukan dengan P_k^n.

ii. Jika tidak urutan dalam pemilihan k unsur, maka menentukan banyak cara pemilihan ditentukan dengan C_k^n.

Contoh 8.9

Dalam sebuah kantong berisi 8 manik putih dan 5 manik merah. Dari kantong itu diambil 6 buah manik. Berapa banyak pilihan untuk mengambil manik-manik itu, jika 6 buah manik itu terdiri atas:

a) 5 manik putih dan 1 manik merah?

b) 4 manik merah dan 2 manik putih?

Alternatif Penyelesaian

Objek yang akan diambil dari kantong adalah objek yang tidak memperhatikan urutan. Dengan demikian, menentukan banyak pilihan menggunakan konsep kombinasi, yaitu:

a) $C_5^8 \times C_1^5 = \dfrac{8!}{3!.5!} \times \dfrac{5!}{4!.1!} = 280$ cara.

b) $C_4^8 \times C_2^5 = \dfrac{8!}{4!.4!} \times \dfrac{5!}{2!.3!} = 700$ cara.

2.2 Peluang Kejadian Majemuk

Masih ingatkah kamu konsep peluang yang telah kamu pelajari pada kelas X SMA? Definisi 12.3 pada buku matematika kelas X menyatakan:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Pada kelas X, kamu sudah mempelajari bagaimana menentukan $n(E)$ dan $n(S)$ untuk kejadian tunggal. Pada Sub bab 2.1 di atas, kita sudah mengkaji bagaimana menentukan $n(E)$ dan $n(S)$ untuk suatu kejadian majemuk. Sekarang kita akan mempelajari menentukan peluang suatu kejadian dengan kejadian yang dimaksud adalah kejadian majemuk.

Mari kita mulai sub bab ini, dengan memecahkan masalah berikut ini.

Masalah-8.12

Dalam sebuah kolam kecil terdapat sebanyak 10 ikan lele dan sebanyak 5 ikan gurame. Dengan menggunakan jaring tangan, akan diambil 12 ikan secara acak. Hitunglah nilai peluangnya jika yang terambil itu adalah:

a) 10 ikan lele dan 2 ikan gurame,
b) 9 ikan lele dan 3 ikan gurame,
c) 7 ikan lele dan 5 ikan gurame.

Alternatif Penyelesaian

Jelas untuk kasus ini, banyak cara memilih 12 ikan dari 15 ikan yang ada dihitung dengan menggunakan kombinasi, yaitu: $C_{12}^{15} = \frac{15!}{3!.12!} = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{(3 \times 2 \times 1).12!} = 455$ cara.

Artinya banyak anggota ruang sampel memilih 12 ikan dari 15 ikan adalah 455.

a) Banyak cara memilih 10 ikan lele dari 10 ikan lele dan memilih 2 ikan gurame dari 5 ikan gurame, dihitung menggunakan konsep kombinasi, yaitu:

   $C_{10}^{10} \times C_2^5 = 1 \times 10 = 10$ cara.

   Artinya banyak kejadian terambilnya 10 ikan lele dan 2 ikan gurame adalah 10 cara.

   Jadi, peluang terambilnya 10 ikan lele dan 2 ikan gurame adalah:

   $$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \Leftrightarrow \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$$

- Bagian b) dan c) kerjakan sebagai latihanmu.

Uji Kompetensi 8.2

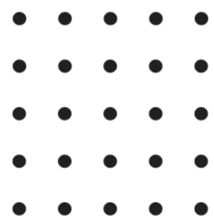
1. Di dalam sebuah kotak terdapat 10 bola yang sama tetapi berbeda warna. 5 bola berwarna merah, 3 bola berwarna putih, dan 2 bola berwarna kuning. Seorang anak mengambil 3 bola secara acak dari kotak. Tentukanlah:
   a) Banyak cara pengambilan ketiga bola tersebut.
   b) Banyak cara pengambilan ketiga bola dengan dua bola berwarna sama.
   c) Banyak cara pengambilan ketiga bola tersebut dengan banyak bola berwarna merah selalu lebih banyak daripada banyak bola berwarna lainnya.
   d) Banyak cara pengambilan ketiga bola jika bola berwarna kuning paling sedikit terambil 2.
2. Dari angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 akan dibuat bilangan dengan angka yang berbeda. Tentukanlah:
   a) Banyak bilangan yang dapat dibentuk.
   b) Banyak bilangan ribuan yang lebih besar atau sama dengan 4000.
   c) Banyak bilangan ratusan dengan angka ratusan adalah bilangan prima.
   d) Jika x adalah bilangan ratusan yang dapat dibentuk dari angka di atas, maka tentukan banyaknya bilangan ratusan yang memenuhi $250 < x < 750$.
   e) Banyak bilangan ratusan dengan angka di posisi puluhan selalu lebih dari angka di posisi satuan.
3. Tentukan banyak kata berbeda yang dapat dibentuk dari huruf pembentuk kata:
   a) ATURAN
   b) INDONESIA
   c) KURIKULUM
   d) STATISTIKA
4. Berapa banyak kata yang dapat dibentuk dari huruf pembentuk kata PERMUTASI dengan selalu mengandung unsur kata TAMU.
5. Sepuluh buku yaitu: 6 buku IPA, 2 buku IPS, dan 2 buku Bahasa akan disusun di atas meja. Tentukanlah:
   a) Banyak susunan jika disusun berjajar.
   b) Banyak susunan jika disusun berjajar dengan buku yang sejenis bidang ilmu berdekatan.
   c) Banyak susunan jika disusun berjajar dengan buku IPA selalu berada di pinggir.

d) Banyak susunan jika disusun secara siklis.

e) Banyak susunan jika disusun secara siklis dengan buku yang sejenis bidang ilmu berdekatan.

6. Bayu pergi menonton pertandingan sepak bola ke stadion. Jika stadion memiliki 5 pintu masuk/keluar maka tentukan banyak cara Bayu memilih masuk ke stadion dengan dan keluar melalui pintu yang berbeda.
7. Dua orang pergi menonton pertandingan sepak bola ke stadion. Jika stadion memiliki 6 pintu masuk/keluar maka:
   a. Tentukan banyak cara mereka memilih masuk ke stadion dengan masuk melalui pintu yang sama tetapi keluar dengan pintu yang berbeda.
   b. Tentukan banyak cara mereka memilih masuk ke stadion dengan masuk melalui pintu yang sama tetapi mereka keluar dengan pintu yang berbeda dan tidak melalui pintu di saat mereka masuk.
8. Didalam sebuah kotak terdapat 12 bola yang sama dan berbeda warna, yaitu 6 bola berwarna Merah, 4 bola berwarna Biru, dan 2 berwarna hijau. Jika, seorang anak mengambil 3 bola secara acak maka tentukan:
   a. Peluang pengambilan ketiga bola tersebut
   b. Peluang terambil 2 bola berwarna merah
   c. Peluang terambil ketiga bola berbeda warna
   d. Peluang terambil banyak bola berwarna merah selalu lebih banyak dari bola lainnya.
   e. Peluang terambil banyak bola berwana merah selalu lebih banyak dari banyak bola berwarna biru dan banyak bola berwarna berwarna biru lebih banyak dari bola berwarna hijau.
9. Di dalam kandang terdapat 40 ekor ayam, yaitu 18 ekor ayam jantan, 6 diantaranya berbulu tidak hitam dan 21 ekor ayam berwarna hitam. Ibu memilih 2 ekor ayam untuk dipotong, maka tentukanlah peluang bahwa ayam yang terpilih untuk dipotong adalah ayam betina berbulu tidak hitam.
10. Siti menyusun bilangan ratusan dari angka 0, 1, 2, 3, dan 5. Siti menuliskan setiap bilangan di kertas dan menggulungnya dan mengumpulkannya di dalam sebuak kotak. Siti meminta Udin mengambil sebuah gulungan secara acak. Tentukanlah:
    a. Peluang yang terambil adalah bilangan 123.
    b. Peluang yang terambil adalah bilangan ganjil
    c. Peluang yang terambil adalah bilangan dengan angka di posisi satuan adalah bilangan prima.
    d. Peluang yang terambil adalah bilangan diantara 123 dan 321

11. Dua puluh lima titik disusun membentuk pola bilangan persegi (5 5), seperi gambar



Jika dibentuk segitiga dengan menghubungkan tiga titik maka tentukan banyak segitiga yang dapat dibentuk.

12. Didalam kelas terdapat 10 siswa (6 pria dan 4 wanita) sebagai calon pengurus OSIS, yaitu ketua, sekretaris dan bendahara. Tentukan peluang terpilih kepengurusan dengan:
    a. Kepengurusan tidak mempunyai persyaratan atau mereka semua berhak menduduki salah satu posisi.
    b. Ketua dan sekretaris harus pria
    c. Ketua, sekretaris harus pria dan bendahara harus seorang wanita
    d. Ketua harus seorang pria.
13. Tunjukkan bahwa $C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + ... + C_n^n = 2^n$ dengan n bilangan bulat positif.
14. Jika P_k^n adalah permutasi k unsur dari n unsur dan C_k^n adalah kombinasi k unsur dari n unsur maka $C_{n+3}^{n+5} = 22$ maka tentukan nilai P_{n-5}^{n-3}
15. Jika P_k^n adalah permutasi k unsur dari n unsur dan C_k^n adalah kombinasi k unsur dari n unsur maka tentukan harga n yang memenuhi $P_{n-2}^n - P_{n-3}^n - P_{n-3}^{n+1} = C_{n-2}^n$

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep aturan pencacahan, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Aturan pencacahan merupakan metode untuk menentukan banyak cara/susunan/pilihan pada saat memilih k unsur dari n unsur yang tersedia. Aturan pencacahan ini meliputi perkalian berurut (faktorial), permutasi, dan kombinasi.
2. Faktorial dinyatakan dengan $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.
3. Permutasi adalah susunan k unsur dari n unsur tersedia dalam satu urutan. Terdapat tiga jenis unsur permutasi yakni 1. Permutasi dengan unsur-unsur yang berbeda, 2. Permutasi dengan unsur-unsur yang sama, dan 3. Permutasi siklis.

   Secara umum banyak permutasi dinyatakan dengan: $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, dengan $n \geq k$.

4. Kombinasi adalah susunan k unsur dari n unsur tersedia dengan tanpa memperhatikan urutannya, dinyatakan dengan $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$, dengan $n \geq k$.
5. Untuk kejadian majemuk, banyak anggota ruang sampel $n(S)$ suatu kejadian merupakan banyak cara/susunan suatu kejadian majemuk tersebut. Sedangkan banyak anggota kejadian $n(E)$ merupakan kombinasi atau permutasi suatu kejadian pada kejadian majemuk.
6. Peluang suatu kejadian *majemuk* (E) dirumuskan: $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$.

Dengan memiliki sikap, pengetahuan, dan keterampilan akan aturan pecacahan dapat kamu aplikasikan mengatasi masalah dunia nyata. Untuk selanjutnya, konsep dasar aturan pencacahan ini akan membantu kamu memahami konsep peluang majemuk dan matematika diskrit. Selanjutnya kita akan membahas materi lingkaran, tentunya pengalaman belajar yang kita peroleh pada Bab VIII ini harus membantu cara berpikir kita memecahkan masalah.

Bab 9

LINGKARAN

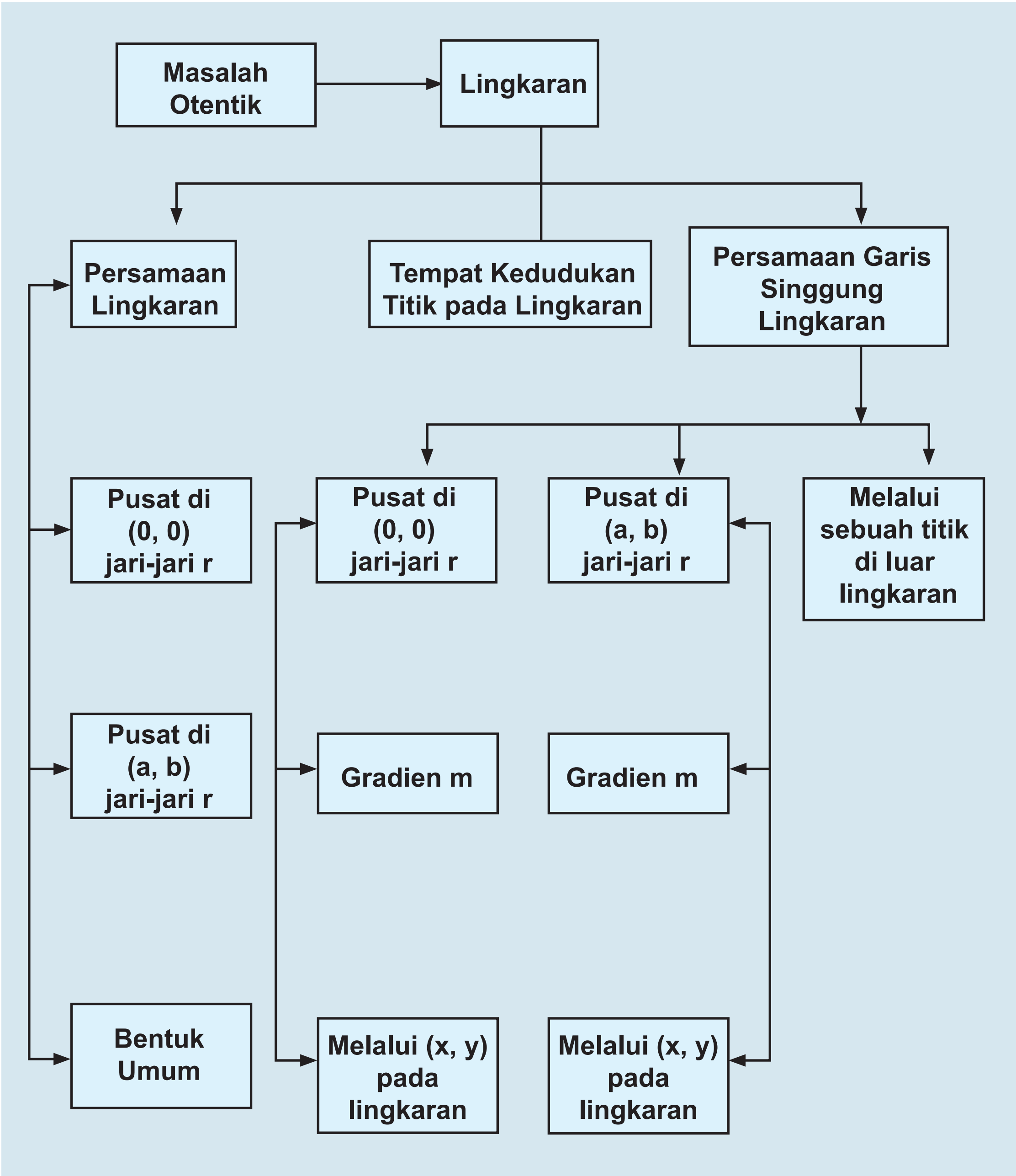
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran lingkaran siswa mampu: 1. Mendeskripsikan konsep persamaan lingkaran dan menganalisis sifat garis singgung lingkaran dengan menggu-nakan metode koordinat. 2. Mendeskripsikan konsep dan Kurva lingkaran dengan titik pusat tertentu dan menurunkan persamaan umum lingkaran dengan metode koordinat. 3. Mengolah informasi dari suatu masalah nyata, mengidentifikasi sebuah titik sebagai pusat lingkaran yang melalui suatu titik tertentu, membuat model Matematika berupa persamaan lingkaran dan menyelesaikan masalah tersebut. 4. Merancang dan mengajukan masalah nyata terkait garis singgung lingkaran serta menyelesaikannya dengan melakukan manipulasi aljabar dan menerapkan berbagai konsep lingkaran.	Melalui proses pembelajaran lingkaran, siswa memiliki pengalaman belajar sebagai berikut. • menemukan konsep persamaan lingkaran berpusat di (0, 0) dan (a, b) melalui pemecahan masalah otentik; • menemukan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik pada lingkaran; • Menemukan persamaan garis singgung yang gradiennya diketahui; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur dalam menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran dengan menggunakan diskriminan; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep lingkaran dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Persamaan lingkaran*
- *Persamaan garis singgung lingkaran*
- *Kedudukan garis pada lingkaran*
- *Kedudukan titik pada lingkaran*
- *Diskriminan*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Persamaan Lingkaran

Lingkaran adalah sebuah bangun datar yang sering digunakan sebagai alat bantu dalam menjelaskan ilmu pengetahuan lain maupun dalam berbagai penyelesaian masalah kehidupan sehari-hari.

Pada bab ini akan dibahas tentang lingkaran dan beberapa hal dasar yang pada akhirnya membantu kita untuk menemukan konsep tentang lingkaran itu sendiri.

Masalah-9.1

Gunung Sinabung di Kabupaten Karo, Sumatera Utara kembali meletus sekitar pukul 12.00 WIB hari Selasa tanggal 17 September 2013. Material yang dikeluarkan lebih banyak dibanding letusan pertama dua hari lalu. Akibat letusan ini banyak warga yang mengungsi. Pemerintah setempat pun memberikan peringatan agar masyarakat yang berada pada radius 3 km dari puncak gunung Sinabung harus segera mengungsi dan daerah tersebut harus bebas dari aktivitas dan dikosongkan untuk sementara. Bantulah pemerintah kabupaten Karo untuk menentukan daerah mana saja masyarakatnya harus mengungsi. (Petunjuk: Gunakan Peta Kabupaten Karo)

Alternatif Penyelesaian

Gambar 9.1: Peta Kabupaten Karo

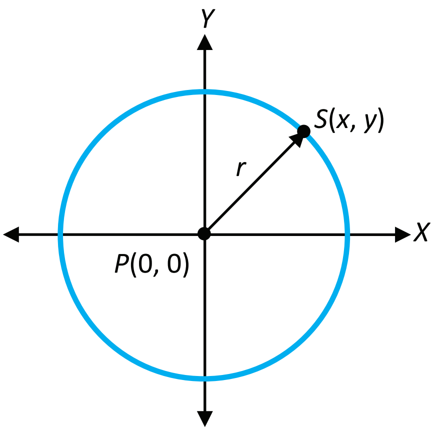
Pertama kali yang dilakukan adalah membuat radius (jari-jari) sepanjang 3 km dari titik pusatnya yaitu puncak Gunung Sinabung. Setelah itu tariklah secara melingkar dan terbentuklah sebuah lingkaran. Berdasarkan daerah lingkaran yang dibuat tersebut ternyata terdapat beberapa desa yang penduduknya harus mengungsi karena berada pada daerah radius 3 km yaitu Desa Simacem, Bekerah, Sigaranggarang, dan Kutatonggal di Kecamatan Naman Teran, serta Desa Sukameriah di Kecamatan Payung.

Definisi 9.1

Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada suatu bidang yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu

Masalah-9.2

Misalkan Gambar 9.1 pada Masalah 9.1 dipindahkan ke bidang koordinat cartesius dan gunung Sinabung berpusat di $P(0, 0)$ dan jari-jarinya r = 3. Misalkan salah satu desa yaitu Sigaranggarang berada pada titik $S(x, y)$ pada lingkaran tersebut, tentukanlah persamaan lingkaran tersebut!



Gambar 9.2: Lingkaran pusat $P(0, 0)$ dan jari-jari $r = 3$

Alternatif penyelesaian

jarak titik $S(x, y)$ ke titik $P(0, 0)$ dapat ditentukan dengan rumus:

$$|PS| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

Diketahui bahwa jari-jarinya adalah r dan $PS = r$, maka

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$$

Kuadratkan kedua ruas sehingga diperoleh

$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2$

Diketahui bahwa r = 3, maka diperoleh

$x^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$

Sifat 9.1

Persamaan lingkaran yang berpusat di P(0, 0) dan memiliki jari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$

Atau dengan kata lain

Jika L adalah himpunan titik-titik yang berjarak r terhadap titik $P(0, 0)$ maka L $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$

Contoh 9.1

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan jari-jari sebagai berikut:

a. 3 b. 4 c. 5 d. 6

Alternatif Penyelesaian

a. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan panjang jari-jari 3 adalah $x^2 + y^2 = 3^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$

b. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan panjang jari-jari 4 adalah $x^2 + y^2 = 4^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16$

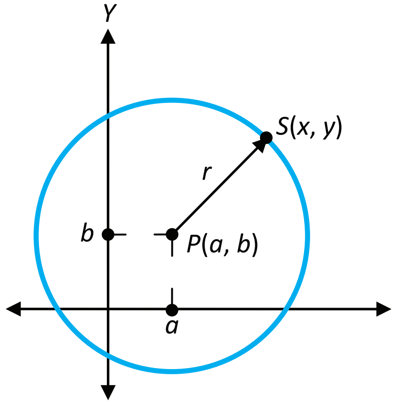
c. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan panjang jari-jari 5 adalah $x^2 + y^2 = 5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$

d. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik P(0, 0) dengan panjang jari-jari 6 adalah $x^2 + y^2 = 6^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 36$

Masalah-9.3

Misalkan gambar pada masalah 1 dipindahkan ke bidang koordinat Kartesius dan gunung Sinabung berpusat di $P(a, b)$ dan jari-jarinya $r = 3$ Misalkan salah satu desa yaitu Sukameriah berada pada titik $S(x, y)$, tentukanlah persamaan lingkaran tersebut!

Alternatif Penyelesaian:



Gambar 9.3: Lingkaran pusat $P(a, b)$ dilalui titik $S(x, y)$

Jarak titik $S(x, y)$ ke titik $P(a, b)$ adalah $|PS| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

Diketahui bahwa jari-jarinya adalah r dan $PS = r$, maka

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

Dikuadratkan kedua ruas maka diperoleh $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Berdasarkan informasi diketahui bahwa $r = 3$, maka diperoleh

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = 9$

Sifat 9.2

Persamaan lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan memiliki jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Atau dengan kata lain

Jika L adalah himpunan titik-titik yang berjarak r terhadap titik $P(a, b)$ maka L $\{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$

Contoh 9.2

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di (2, 2) dan berjari-jari $r = 2$.

Alternatif Penyelesaian:

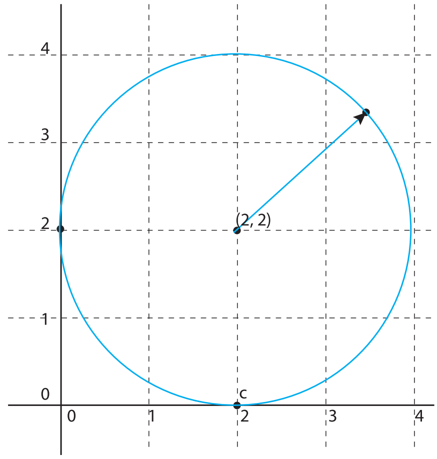
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$a = 2;\ b = 2;\ c = 2$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Jadi persamaan lingkaran yang berpusat di (2, 2) dan berjari-jari $r = 2$ adalah $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$



Gambar 9.4 : Lingkaran pusat (2, 2) dan $r = 2$

Contoh 9.3

Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran berikut!

a. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

b. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$

c. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$

d. $(x + 2)^2 + y^2 = 16$

Alternatif Penyelesaian:

a. $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$

$a = 2;\ b = -2;\ r = 2$

lingkaran tersebut berpusat di titik (2, – 2) dan berjari-jari 2

b. $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$

$a = -2;\ b = -2;\ r = 3$

Lingkaran tersebut berpusat di titik (–2, –2) dan berjari-jari 3

c. $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$

$a = -2$; $b = 2$; $r = 4$

Lingkaran tersebut berpusat di titik $(-2, 2)$ dan berjari-jari 4

d. $(x + 2)^2 + y^2 = 16$

$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 16$

$a = -2$; $b = 0$; $r = 4$

Lingkaran tersebut berpusat di titik $(-2, 0)$ dan berjari-jari 4

2. Bentuk Umum Persamaan Lingkaran

Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas tentang konsep persamaan lingkaran yaitu :

a. Lingkaran yang berpusat di $P(0, 0)$ dan berjari-jari r persamaannya adalah

$x^2 + y^2 = r^2$

b. Lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan berjari-jari r persamaannya adalah

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Jika diperhatikan kedua bentuk persamaan lingkaran tersebut, maka dapat langsung diketahui titik pusat lingkaran dan panjang jari-jarinya. Persamaan tersebut dinamakan bentuk baku persamaan lingkaran.

Kegiatan 9.1

Jabarkanlah persamaan $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Alternatif Penyelesaian

Untuk menyelesaikan persoalan di atas, maka kamu harus mengingat kembali tentang operasi bentuk aljabar yang telah kamu pelajari sebelumnya.

Contoh 9.4

Berdasarkan kegiatan 9.1 diperoleh persamaan $a^2 + b^2 - r^2 = C$ dengan $-a = A$; $-b = B$, tentukanlah nilai r.

Alternatif Penyelesaian

Karena $a^2 + b^2 - r^2 = C$ dan $-a = A; -b = B$, maka $r^2 = A^2 + B^2 - C^2 \Leftrightarrow r = \pm\sqrt{A^2 + B^2 - C}$

Contoh 9.5

Berdasarkan kegiatan 9.1 diperoleh persamaan $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, ubahlah persamaan tersebut ke dalam persamaan bentuk baku persamaan lingkaran!

Alternatif Penyelesaian

$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2Ax + 2By = -C$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2Ax + A^2) - A^2 + (y^2 + 2By + B^2) - B^2 = -C$

$\Leftrightarrow (x + A)^2 + (y + B)^2 = A^2 + B^2 = -C$

$\Leftrightarrow (x + A)^2 + (y + B)^2 = \left(\sqrt{A^2 + B^2 - C}\right)^2$

Berdasarkan penyelesaian Latihan 9.2 diperoleh bahwa persamaan $(x + A)^2 + (y + B)^2 = \left(\sqrt{A^2 + B^2 - C}\right)^2$ adalah persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(-A, -B)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

Sifat 9.3

Bentuk umum persamaan lingkaran adalah

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

dengan titik pusat $P(-A, -B)$ dan berjari-jari $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

dengan A, B, C bilangan real dan $A^2 + B^2 \geq C$

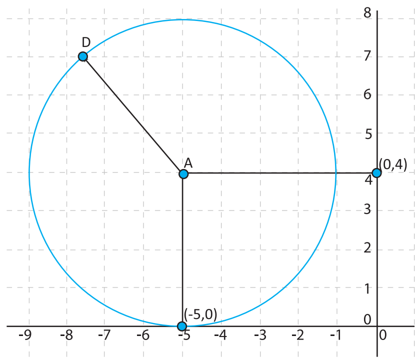
Pertanyaan Kritis

1. Berdasarkan Fakta 9.1 diperoleh bahwa $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$. Bagaimana jika $A^2 + B^2 = 0$? Apa yang kamu peroleh?
2. Mengapa $C^2 \leq A^2 + B^2$

Contoh 9.6

Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran yang memiliki persamaan $x^2 + y^3 + 10x - 8y + 25 = 0$, lalu gambarkan lingkaran tersebut dalam bidang Kartesius!

Alternatif Penyelesaian:



Gambar 9.5 : Lingkaran $x^2 + y^3 + 10x - 8y + 25 = 0$

$x^2 + y^3 + 10x - 8y + 25 = 0$

$A = -5$; $B = 4$, dan $C = 25$

Titik Pusat $(-5, 4)$

Jari-jari lingkaran

$$r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$$

$$r = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 - 25} = 4$$

Latihan 9.1

Tentukanlah persamaan-persamaan di bawah ini yang merupakan persamaan lingkaran.

a. $x - y = 16$

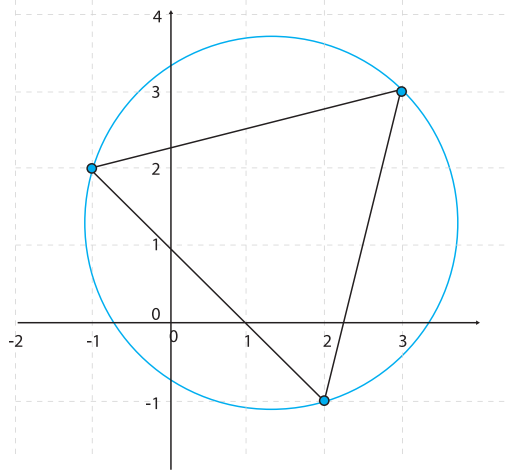
b. $x^2 + 4y^2 + 8x - 6 - 16y = 25$

c. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$

d. $x^2 - y^2 + 8x - 2y + 100 = 0$

Latihan 9.2

Misalkan pada bidang koordinat Kartesius desa Sigaranggarang terletak pada titik (3, 3), desa sukameriah terletak pada titik (–1, 2), dan desa Kutatonggal terletak pada titik (2, –1) yang terkena dalam radius daerah yang penduduknya harus mengungsi. Tentukanlah letak gunung Sinabung (titik pusat) dan radiusnya!



Gambar 9.6 Lingkaran dilalui titik (3, 3), (-1, 2), (2, -1)

Uji Kompetensi 9.1

1. Tulislah persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(0, 0)$ dan melalui titik berikut.
   a. (1, 2) c. (0, 1)
   b. (3, 2) d. (4, 0)

2. Tulislah persamaan lingkaran yang berpusat di titik $P(0, 0)$ dengan panjang jari-jari sebagai berikut.
   a. 1 c. 3
   b. 2 d. 4

3. Tulislah dan gambarkan pada bidang koordinat Kartesius persamaan lingkaran yang
   a. Pusat di titik $P(1, 2)$ dan panjang jari-jari 1
   b. Pusat di titik $P(-1, 2)$ dan panjang jari-jari 2
   c. Pusat di titik $P(1, -2)$ dan panjang jari-jari 3
   d. Pusat di titik $P(-1, -2)$ dan panjang jari-jari 4

4. Tentukan titik pusat dan jari-jari lingkaran berikut.

a. $x^2 + y^2 = 5$	e. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 31 = 0$
b. $x^2 + y^2 - 4 = 5$	f. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 4y - 10 = 0$
c. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 30$	g. $(x - p)^2 + (y - q)^2 = 25$
d. $x^2 + (y - 4)^2 = 15$	h. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 6y = 20$

5. Tulis dan gambarkanlah persamaan lingkaran yang melalui titik-titik berikut.
   a. Titik $A(-4 , 7)$, $B(-1, 7)$, dan $C(0, 5)$
   b. Titik $A(-2, 7)$, $B(2, 7)$, dan $C(0, 4)$
   c. Titik $A(0, 6)$, $B(0, 3)$, dan $C(-4, 3)$
   d. Titik $A(-2, 1)$, $B(1, 1)$, dan $C(-1, -1)$

6. Tentukan pusat lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 13 = 0$.

7. Tentukan pusat lingkaran $3x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

8. Nyatakanlah persamaan lingkaran-lingkaran berikut ini ke dalam bentuk umum
   a. Pusat $(1, 2)$, dan jari-jari 1
   b. Pusat $(-3, -4)$, dan jari-jari 2
   c. Pusat $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, dan jari-jari 3
   d. Pusat $\left(1\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, dan jari-jari $\frac{1}{2}$

9. Carilah pusat dan jari-jari lingkaran berikut ini.
   a. $x^2 + (y - 2)^2 = 1$
   b. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$
   c. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -3$
   d. $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$
   e. $x^2 + y^2 - 4y + 1 = 0$
   f. $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

10. Titik $A(-2, a)$ terletak di dalam lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$?

3. Kedudukan Titik terhadap Lingkaran

Masalah-9.4

Masih ingatkah kamu masalah gunung Sinabung. Jika disajikan letak beberapa desa di koordinat kartesius dengan menganggap gunung Sinabung berada pada titik $P(0, 0)$ dan berjari jari 5 satuan. Tentukan kedudukan titik desa Sigaranggarang di titik (0, 5), desa Sukatepu di titik (5, 4), dan desa Bekerah di titik (2, –1) terhadap lingkaran yang dengan pusat (0, 0) dan jari-jari 5 satuan. Apakah penduduk desa-desa tersebut perlu mengungsi?

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan permasalahan di atas maka persamaan lingkarannya adalah $x^2 + y^2 = 25$

Untuk desa Sigaranggarang dengan titik (0, 5)

Substitusikan titik (0, 5) pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ kemudian periksa apakah titik tersebut terletak di dalam lingkaran atau di luar lingkaran lalu simpulkan apakah desa tersebut perlu mengungsi atau tidak.

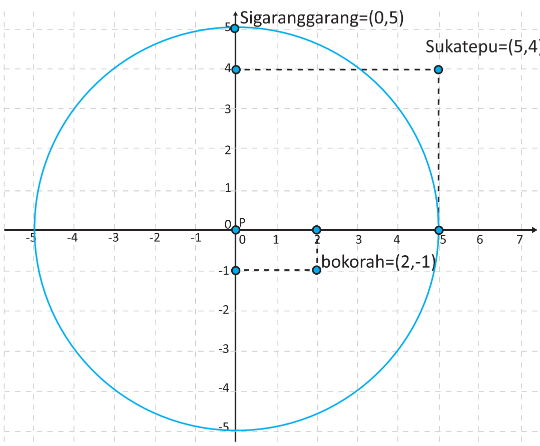
Untuk desa Sukatepu dengan titik (5, 4)

Substitusikan titik (5, 4) pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ kemudian periksa apakah titik tersebut terletak di dalam lingkaran atau di luar lingkaran lalu simpulkan apakah desa tersebut perlu mengungsi atau tidak.

Untuk desa Bekerah dengan titik (2, –1)

Substitusikan titik (2, –1) pada persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ kemudian periksa apakah titik tersebut terletak di dalam lingkaran atau di luar lingkaran lalu simpulkan apakah desa tersebut perlu mengungsi atau tidak.

Alternatif penyelesaian lainnya adalah dengan menggambar titik-titik letak desa di koordinat kartesius.



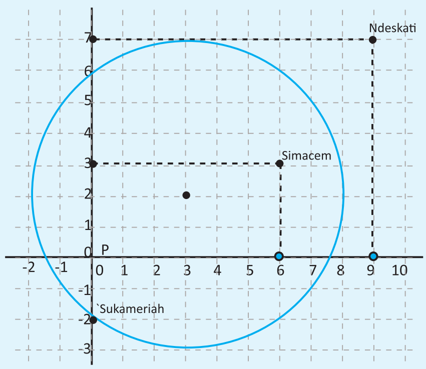
Gambar 9.7 Lingkaran dengan Pusat (0, 0) dan r = 5

Definisi 9.2

1. Suatu titik $A(v, w)$ terletak di dalam lingkaran yang berpusat di $P(0, 0)$ dan berjari-jari r jika $v^2 + w^2 < r^2$.
2. Suatu titik $A(v, w)$ terletak pada lingkaran yang berpusat di $P(0, 0)$ dan berjari-jari r jika $v^2 + w^2 = r^2$.
3. Suatu titik $A(v, w)$ terletak di luar lingkaran yang berpusat di $P(0, 0)$ dan berjari-jari r jika $v^2 + w^2 > r^2$.

Masalah-9.5

Misalkan Gambar 9.8 berikut menyajikan letak beberapa desa dengan menganggap gunung Sinabung berada pada titik $P(3, 2)$ dan berjari-jari 5 satuan. Tentukan kedudukan titik desa Sigaranggarang, desa Sukatepu, dan desa bekerah berdasarkan gambar di samping. Apakah penduduk desa-desa tersebut perlu mengungsi?



Gambar 9.8 : Lingkaran dengan Pusat $P(3, 2)$ dan $r = 5$

Alternatif Penyelesaian:

Berdasarkan permasalahan di atas maka persamaan lingkarannya adalah $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Untuk desa Sukameriah dengan titik (0, –2)

Substitusikan titik (0, 5) pada persamaan lingkaran $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ kemudian periksa apakah titik tersebut terletak di dalam lingkaran atau di luar lingkaran lalu simpulkan apakah desa tersebut perlu mengungsi atau tidak.

Untuk desa Simacem dengan titik (6, 3)

Substitusikan titik (6, 3) pada persamaan lingkaran $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ kemudian periksa apakah titik tersebut terletak di dalam lingkaran atau di luar lingkaran lalu simpulkan apakah desa tersebut perlu mengungsi atau tidak.

Untuk desa Ndeskati dengan titik (9, 7)

Substitusikan titik (9, 7) pada persamaan lingkaran $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$ kemudian periksa apakah titik tersebut terletak di dalam lingkaran atau di luar lingkaran lalu simpulkan apakah desa tersebut perlu mengungsi atau tidak.

Definisi 9.3

1. Suatu titik $A(v, w)$ terletak di dalam lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan berjari-jari r jika $(v-a)^2 + (w-b)^2 < r^2$.
2. Suatu titik $A(v, w)$ terletak pada lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan berjari-jari r jika $(v-a)^2 + (w-b)^2 = r^2$.
3. Suatu titik $A(v, w)$ terletak di luar lingkaran yang berpusat di $P(a, b)$ dan berjari-jari r jika $(v-a)^2 + (w-b)^2 > r^2$.

Contoh 9.7

Apakah titik-titik berikut terletak di luar, di dalam, atau pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$?

a. $Q(-1, -1)$ c. $S(0, 5)$

b. $R(2, -3)$ d. $T(-4, 0)$

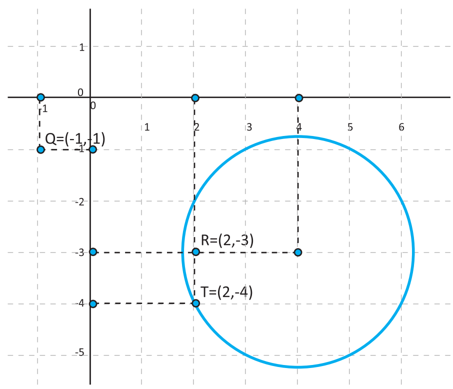
Alternatif Penyelesaian:

Persamaan lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$ diubah menjadi bentuk baku persamaan kuadrat menjadi $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5$

a. $Q(-1, -1)$ disubstitusikan ke persamaan $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5$ diperoleh

$(-1-4)^2 + (-1+3)^2 = (-5)^2 + 2^2 = 29 > 5$

Titik $Q(-1, -1)$ berada di luar lingkaran $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 5$



Gambar 9.9 : Titik-titik yang terletak di luar, di dalam, atau pada lingkaran $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 20 = 0$

b. $R(2, -3)$ disubstitusikan ke persamaan $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ diperoleh
$(2 - 4)^2 + (-3 + 3)^2 = (-2)^2 + 0 = 4 < 5$
Titik $R(2, -3)$ berada di dalam lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$

c. $S(4, -3)$ disubstitusikan ke persamaan $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ diperoleh
$(4 - 4)^2 + (-3 + 3)^2 = 0 + 0 = 0 < 5$
Titik $S(4, -3)$ berada di dalam lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$

d. $T(2, -4)$ disubstitusikan ke persamaan $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$ diperoleh
$(2 - 4)^2 + (-4 + 3)^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5 = 5$
Titik $T(2, -4)$ berada pada lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 5$

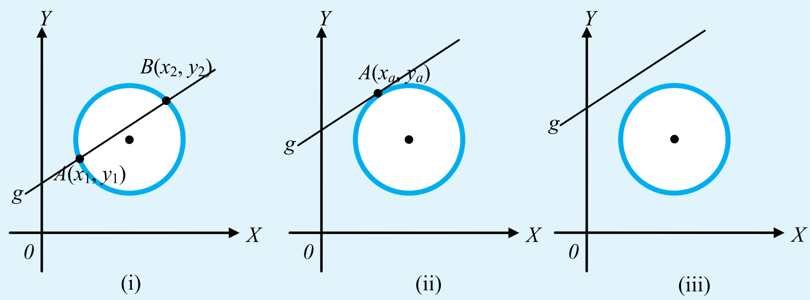
Pertanyaan Kritis

Mengapa (pada contoh 9.7) untuk menentukan suatu titik terletak di luar, di dalam, atau pada lingkaran, persamaan lingkaran harus kita ubah ke bentuk baku persamaan lingkaran?

4. Kedudukan Garis terhadap Lingkaran

Masalah-9.6

Perhatikan gambar berikut ini



Gambar 9.10 : Kedudukan Garis Terhadap Lingkaran

Gambar 9.10 merupakan kedudukan garis terhadap lingkaran. Berdasarkan gambar di atas, buatlah pendapatmu mengenai gambar tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Gambar 9.10 (i) merepresentasikan tentang sebuah garis yang memotong sebuah lingkaran di dua titik yang berlainan.

Gambar 9.10 (ii) merepresentasikan tentang sebuah garis yang memotong sebuah lingkaran pada suatu titik atau dengan kata lain menyinggung lingkaran.

Gambar 9.10 (iii) merepresentasikan tentang sebuah garis yang tidak memotong sebuah lingkaran.

Contoh 9.8

Diberikan sebuah garis $2x + y = 2$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$, selesaikanlah sistem persamaan linear-kuadrat tersebut! Kemudian tentukan nilai diskriminannya.

Alternatif Penyelesaian :

$2x + y = 2$ ....(1)

$x^2 + y^2 = 9$ ....(2)

digambarkan pada bidang Kartesius akan diperoleh seperti gambar 9.11. Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh:

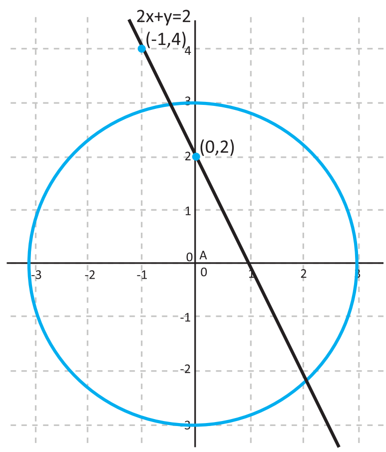
$x^2 + y^2 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + (2 - 2x)^2 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + 4 - 8x + 4x^2 = 5$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 8x - 1 = 0$

Sehingga selesaian dari sistem persamaan linear-kuadrat tersebut adalah $5x^2 - 8x - 1 = 0$, dengan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(5)(-1) = 64 + 20 = 84$



Gambar 9.11: garis $2x + y = 2$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

Contoh 9.9

Diberikan sebuah garis $2x + y = 5$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$, selesaikanlah sistem persamaan linear-kuadrat tersebut! Kemudian tentukan nilai diskriminannya.

Alternatif Penyelesaian:

$2x + y = 5$ ....(1)

$x^2 + y^2 = 5$ ....(2)

Digambarkan pada bidang kartesius akan diperoleh seperti gambar 9.12. Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$x^2 + y^2 = 5$

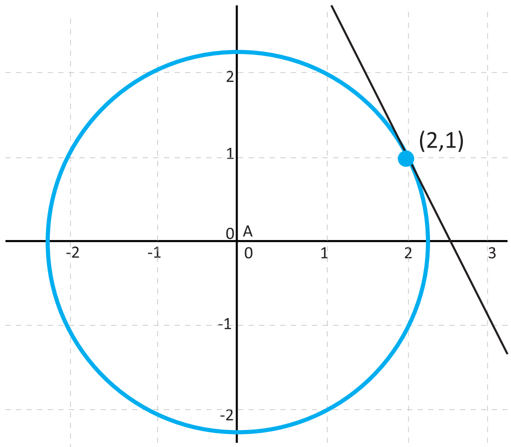
$\Leftrightarrow x^2 + (-2x + 5)^2 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x^2 - 20x + 25 - 5 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 20x^2 + 20 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$

Sehingga selesaian dari sistem persamaan linear-kuadrat tersebut adalah $x^2 + 4x + 4 = 0$ dengan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(4) = 16 - 16 = 0$



Gambar 9.12 : garis $2x + y = 5$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$

Contoh 9.10

Diberikan sebuah garis $-x + y = 3$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$, selesaikan-lah sistem persamaan linear-kuadrat tersebut! Kemudian tentukan nilai diskriminannya.

Alternatif Penyelesaian:

$-x + y = 3$ ....(1)

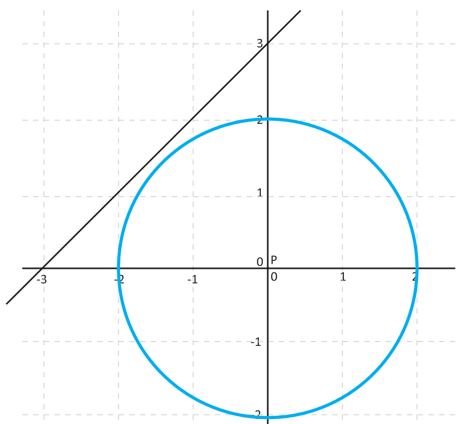
$x^2 + y^2 = 5$....................................(2)

Digambarkan pada bidang kartesius akan diperoleh seperti gambar 9.13. Berdasarkan persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$x^2 + y^2 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + (3 + x)^2 = 5$

$\Leftrightarrow x^2 + 9 + 6x + x^2 = 5$



Gambar 9.13 garis $-x + y = 3$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 5$

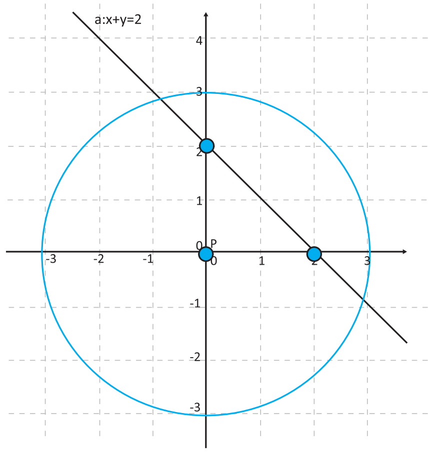
$\Leftrightarrow\ 2x^2 + 6x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow\ x^2 + 3x + 2 = 0$

Sehingga selesaian dari sistem persamaan linear-kuadrat tersebut adalah $x^2 + 3x + 2$ dengan nilai diksriminan

Latihan 9.3

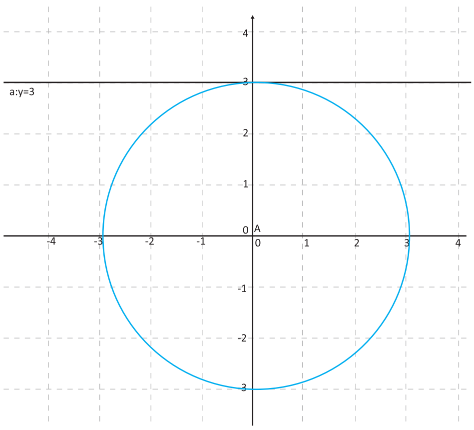
Diketahui sebuah garis $x + y = 2$ dan sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ seperti yang disajikan pada gambar 9.14, kemudian tentukan persamaan kuadrat gabungan antara garis dan lingkaran, kemudian tentukan nilai diskriminannya.



Gambar 9.14 garis $x + y = 2$ dan sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

Latihan 9.4

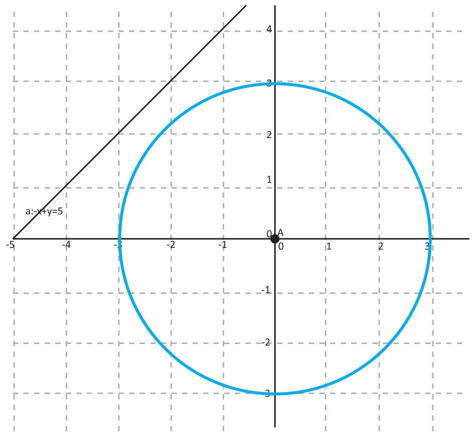
Diketahui sebuah garis $y = 3$ dan sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ seperti yang disajikan pada gambar 9.15, kemudian tentukan persamaan kuadrat gabungan antara garis dan lingkaran, kemudian tentukan nilai diskriminannya.



Gambar 9.15 garis $y = 3$ dan sebuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

Latihan 9.5

Diketahui sebuah garis $-x + y = 5$ dan sbuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ seperti yang disajikan pada gambar 9.16, kemudian tentukan persamaan kuadrat gabungan antara garis dan lingkaran, kemudian tentukan nilai diskriminannya.



Gambar 9.16 garis $-x + y = 5$ dan sbuah lingkaran $x^2 + y^2 = 9$

Latihan 9.6

Berdasarkan penyelesaian Latihan 9.1, 9.2, dan 9.3 syarat apa yang harus dipenuhi agar garis memotong lingkaran di dua titik yang berlainan, garis menyinggung lingkaran, dan garis tidak memotong maupun menyinggung lingkaran?

Sifat 9.4

Misalkan g garis dengan persamaan $y = ax + b$ dan L lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = r^2$

Kedudukan garis g terhadap sebuah lingkaran ditentukan oleh nilai diskriminan $D = (1 + a^2)r^2 - b^2$, yaitu:

(1) $D > 0 \Leftrightarrow$ garis g memotong lingkaran di dua titik yang berlainan

(2) $D = 0 \Leftrightarrow$ garis g menyinggung lingkaran

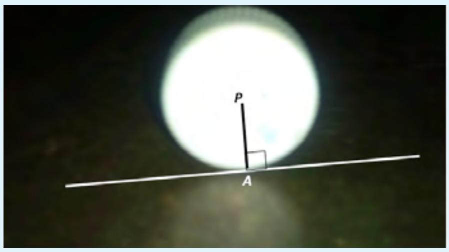
(3) $D < 0 \Leftrightarrow$ garis g tidak memotong maupun menyinggung lingkaran

5. Persamaan Garis Singgung Lingkaran

a. Persamaan Garis Singgung melalui Suatu Titik pada Lingkaran berpusat *P*(0, 0) dan berjari-jari *r*

Masalah-9.7

Beberapa anak berkumpul dan sedang bermain. Di tangan mereka terdapat beberapa tutup botol plastik yang dijadikan permainan ibarat kelereng. Tutup botol dibuat berdiri, lalu bagian atasnya ditekan dengan telunjuk agar tutup botol itu meluncur ke depan. Setelah itu mereka lalu berlari mengejar tutup botol yang melaju kencang itu.



Gambar 9.17 Tutup Botol terletak di lantai

Dari gambar 9.17 di atas jelas terlihat bahwa lantai yang dilalui tutup botol selalu menyinggung di titik $A(x_1, y_1)$. Garis di lantai yang dilalui tutup botol dapat disebut garis singgung dan titik yang bersinggungan antara tutup botol dan lantai disebut titik singgung. Perhatikan bahwa jari-jari yang melalui titik singgung $A(x_1, y_1)$ tegak lurus dengan lantai. Misalkan titik P adalah titik pusat lingkaran di (0, 0). Berdasarkan keadaan di atas tentukanlah persamaan garis g tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalnya titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada sebuah lingkaran yang berpusat di $O(0, 0)$ dan berjari-jari r yaitu, $x^2 + y^2 = r^2$. Asumsikan $x_1 \neq 0$ dan $y_1 \neq 0$ Gradien garis PA adalah

$m_{op} = \dfrac{y_1}{x_1}$, garis singgung g tegak lurus dengan garis PA. Gradien garis g adalah

$m_g = -\dfrac{1}{m_{OP}} = -\dfrac{1}{\frac{y_1}{x_1}} = -\dfrac{x_1}{y_1}$. Akibatnya, persamaan garis singgung g adalah

$y - y_1 = m_g\,(x - x_1)$

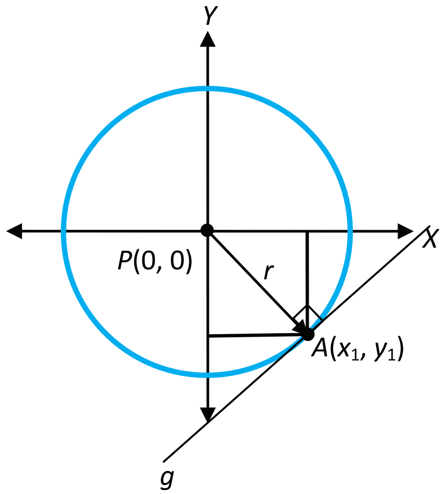
$$\Leftrightarrow y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow (y - y_1)y_1 = -x_1\,(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow yy_1 - y_1^{\,2} = -xx_1^{\,2}$$

$$\Leftrightarrow xx_1 - yy_1^{\,2} = x_1^{\,2} + y_1^{\,2}$$

Karena $A(x_1,\ y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka diperoleh $x_1^{\,2}\ y_1^{\,2}\ r$. Jadi, persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik $P(0,\ 0)$ dan berjari-jari r yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = r$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$



Gambar 9.18 : Lingkaran Pusat (0, 0) dan jari-jari *r*

Sifat 9.5

Persamaan garis singgung yang melalui titik (x1, y1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $x_1x + y_1y = r^2$

Contoh 9.11

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik (2, 0) dengan pusat P(0,0) dan berjari-jari 3!

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan lingkaran dengan pusat (0, 0) dan berjari-jari 3 adalah $x_2 + y_2 = 9$
Persamaan garis singgung lingkaran $x_2 + y_2 = 9$ yang melalui titik (2, 0) adalah

$$x_1x + y_1y = r^2$$

$$\Leftrightarrow xx_1 + yy_1 = 9$$

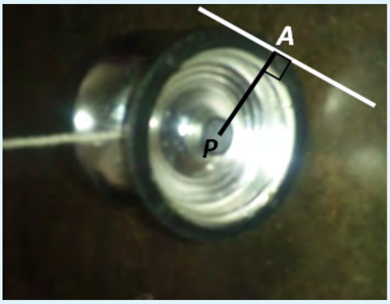
$$\Leftrightarrow x(2) + y(0) = 9$$

$$\Leftrightarrow 2x - 9 = 0$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat (0, 0) dan berjari-jari 3 adalah $2x - 9 = 0$

b. Persamaan Garis Singgung melalui Suatu Titik pada Lingkaran berpusat P (a, b) dan berjari-jari r

Masalah-9.8



Gambar 9.19 : Yoyo menyinggung dinding

Seorang anak tampak asyik bermain yoyo bersama teman-temannya yang lain. Mainan Yoyo tersebut dimainkan sambil sesekali berjalan dan bergesekan dengan lantai, kadang-kadang juga dengan lihainya anak-anak tersebut melemparkannya sambil sesekali berjalan dan bersinggungan dengan tembok.

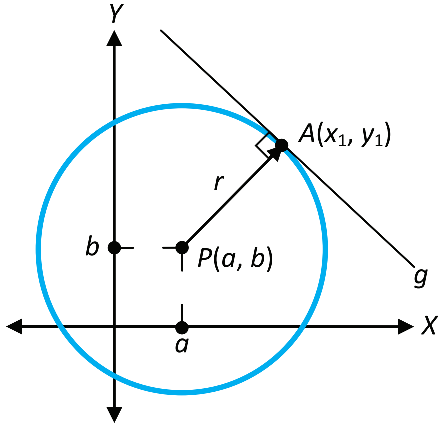
Dari gambar di atas jelas terlihat bahwa dinding yang disinggung yoyo selalu menyinggung di titik $A(x_1, y_1)$. Garis di dinding yang dilalui yoyo dapat disebut garis singgung dan titik yang bersinggungan antara yoyo dan dinding disebut titik singgung. Perhatikan bahwa jari-jari yang melalui titik singgung $A(x_1, y_1)$ tegak lurus dengan dinding. Misalkan titik P adalah titik pusat lingkaran di (a, b). Berdasarkan keadaan di atas tentukanlah persamaan garis g tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Perhatikan gambar 9.20.

Gradien garis PA adalah $m_{PA} = \dfrac{y_1 - b}{x_1 - a}$.

Garis singgung g tegak lurus garis PA, sehingga gradien garis singgung g adalah $m_g = -\frac{1}{m_{PA}} = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}$



Gambar 9.20 : Lingkaran dilalui titik A(x_1, y_1)

Persamaan garis singgung g adalah

$$y - y_1 \; m_g\,(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow \; y - y_1 = -\frac{x_1 - a}{y_1 - b}(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow \; (y - y_1)(y1 - b) = -(x_1 - a)(x - x_1)$$

$$\Leftrightarrow \; yy_1 - yb - y_1^2 + y_1 b = -(x_1 x - x_1^2 - ax + ax_1)$$

$$\Leftrightarrow \; yy_1 - yb - y_1^2 + yb = -x_1 x + x_1^2 + ax - ax_1$$

$$\Leftrightarrow \; xx_1 - xa + x_1 a + yy_1 - yb + y_1 b = x_1^2 - y_1^2$$

Karena $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maka diperoleh

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \; x_1^2 - 2x_1 a + a^2 + y_1^2 - 2y_1 b + b^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \; x_1^2 + y_1^2 = r^2 + 2x_1 - a^2 + a^2 + 2y_1 b - b^2$$

Substitusikan $x_1^2 + y_1^2 = r^2 + 2x_1 - a^2 + a^2 + 2y_1 b - b^2$ ke persamaan garis singgung di atas, diperoleh

$$xx_1 - xa + x_1 a + yy_1 - yb + y_1 b = r^2 + \; 2x_1 a - a^2 + 2_1 yb - b^2$$

$$\Leftrightarrow \; (xx_1 - xa + x_1 a + a^2) + (yy_1 - yb + y_1 b + b^2) = r^2$$

$$\Leftrightarrow \; (x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$

Jadi, persamaan garis singgung lingkaran yang berpusat di titik P(a, b) dan berjari-jari r yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$

Sifat 9.6

Persamaan garis singgung yang melalui titik (x_1, y_1) pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ adalah $(x - a)(x_1 - q) + (y_1 - b) = r^2$

Contoh 9.12

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik (2, 4) dengan persamaan lingkarannya adalah $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

Alternatif Penyelesaian:

Persamaan garis singgung lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ yang melalui titik (2, 4) adalah

$$(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x_1 - 1) + (y - 2)(y_1 - 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(2 - 1) + (y - 2)(4 - 2) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)1 + (y - 2)2 = 5$$

$$\Leftrightarrow x - 1 + 2y - 4 = 5$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 0$$

Jadi persamaan garis singgung lingkaran $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ adalah $x + 2y = 0$

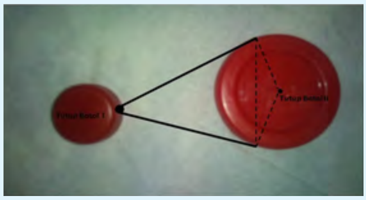
Latihan 9.7

1. Misalkan titik $A(x_1, y_1)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Tentukanlah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ yang melalui titik $A(x_1, y_1)$!
2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 25 = 0$ di titik
   a. (5, 12)
   b. (1, 6)
   c. (–5, 0)

c. Persamaan Garis Singgung Lingkaran melalui Suatu Titik di Luar Lingkaran

Masalah-9.9

Permainan tutup botol juga dapat dimainkan dengan versi yang berbeda. Beberapa membuat tutup botol dalam keadaan tertidur (seperti pada gambar), lalu bagian belakangnya disentil dengan jari telunjuk ataupun jari tengah agar tutup botol itu meluncur ke depan.

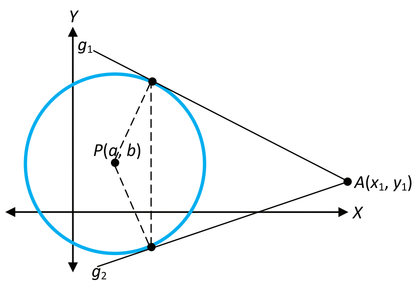


Gambar 9.21 Dua buah tutup botol

Setelah itu mereka lalu berlari mengejar tutup botol yang melaju kencang itu. Mereka tertawa ketika tutup botol salah satu pemain berhasil meluncur dan mengenai tutup botol lainnya. Dari gambar di atas jelas terlihat bahwa salah satu tutup botol akan menyinggung tutup botol yang lain di dua titik. Misalkan $A(x_1, y_1)$ adalah titik yang berada pada tutup botol I dan sasarannya adalah tepi tutup botol II. Berdasarkan keadaan di atas tentukanlah persamaan garis g_1 dan g_2 tersebut!

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan titik $A(x_1, y_1)$ terletak di luar lingkaran. Terdapat dua garis singgung lingkaran yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ dan digambarkan sebagai berikut.



Gambar 9.22 : Dua Buah garis yang menyinggung Lingkaran

Langkah-langkah untuk menentukan persamaan garis singgungnya adalah sebagai berikut:

1. Misalkan gradien garis singgung yang melalui titik $A(x_1, y_1)$ adalah m sehingga diperoleh persamaan.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$\Leftrightarrow y - y_1 = mx - mx_1$$
$$\Leftrightarrow y = mx - mx_1 + y_1$$

2. Dari langkah 1 substitusikan nilai $y = mx - mx_1 + y_1$ ke dalam persamaan lingkaran, sehingga diperoleh persamaan kuadrat dalam variabel x, kemudian tentukan nilai diskriminannya, dari persamaan kuadrat tersebut.
3. Karena garis singgung itu merupakan garis lurus dan menyinggung lingkaran akibatnya nilai diskriminan nol, Setelah itu carilah nilai m. Selanjutnya nilai m tersebut substitusikan ke persamaan $y = mx - mx_1 + y_1$ sehingga diperoleh persamaan-persamaan garis singgung tersebut.

Contoh 9.13

Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran dengan pusat P(0, 0) dan berjari-jari 5 yang melalui titik (7, 1).

Alternatif Penyelesaian:

Titik (7, 1) berada di luar lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ sebab jika titik (7, 1) disubstitusikan ke persamaan lingkaran tersebut diperoleh 72 + 12 = 50 > 25

Persamaan lingkaran dengan pusat $P(0, 0)$ dan berjari-jari 5 adalah

$x^2 + y^2 = 25$

Garis yang melalui titik (7, 1) dengan gradient m, memiliki persamaan

$$y = mx - mx_1 + y_1$$
$$\Rightarrow y = mx - 7m + 1$$

Substitusikan nilai $y = mx - 7m + 1$ ke persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ diperoleh

$$x^2 + (mx - 7m + 1)^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 - 49m^2 + 1 - 14m^2x + 2m - 14m = 25$$
$$\Leftrightarrow (1 + m^2)x^2 + (2m - 14m^2)x + (-49m^2 - 14m - 24) = 0$$

Selanjutnya ditentukan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$

$$
\begin{aligned}
D &= (2m - 14\, m^2)^2 - 4(1 + m^2)(49m^2 - 14m - 24) \\
&= 4m^2 - 56m^3 + 196m^4 - 4(49m^2 - 14m - 24 + 49m^4 - 14m^3 - 24m^2) \\
&= 4m^2 - 56mm^3 + 1196m^4 - 196m^2 + 56m + 96 - 196m^4 + 56m^3 + \\
&\quad 96m^2 = 4m^2 + 96m^2 - 196m^2 + 56m + 96 \\
&= -96m^2 + 56m + 96
\end{aligned}
$$

Syarat $D = 0$

$-96m^2 + 56m + 96 = 0$

$\Leftrightarrow 96m^2 - 56m - 96 = 0$

$\Leftrightarrow 12m^2 - 7m - 12 = 0$

$\Leftrightarrow (4m + 3)(3m - 4) = 0$

$\Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{4}$ atau $m = \dfrac{4}{3}$

Sehingga diperoleh persamaan garis singgung

$3x - 4y - 25 = 0$ atau $4x - 3y - 25 = 0$

Latihan 9.8

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik (0, 2).

Uji Kompetensi 9.2

1. Tentukanlah nilai C agar garis $y = x + C$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$.
2. Berapakah nilai r jika r positif dan $x + y = r$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r$?
3. Tentukanlah gradien garis singgung jika kedua garis lurus yang ditarik dari titik (0, 0) dan menyinggung sebuah lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$!
4. Tentukanlah persamaan garis yang sejajar dengan $x - 2y = 0$ dan membagi lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0$ menjadi dua bagian yang sama!
5. Tentukanlah persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ melalui titik (6, –6)!

6. Jika lingkaran $x^2 + y^2 - 2ax + 6y + 49 = 0$ menyinggung sumbu x, tentukanlah nilai a!
7. Tentukanlah persamaan lingkaran yang berpusat di (3, 4) dan menyinggung sumbu x kemudian tentukan persamaan lingkaran hasil pencerminan lingkaran terhadap gaaris $y = -x$!
8. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ bergradien 1!
9. Tentukanlah persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang melalui titik $(-3, -4)$!
10. Tentukanlah nilai q jika diberikan garis $x + y = q$, menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 8$ di titik A pada kuadran pertama!
11. Tentukanlah nilai k, jika titik $(-5, k)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 5y - 12 = 0$!
12. Tentukanlah nilai C agar garis $y = x + C$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$!
13. Tentukanlah persamaan garis lurus yang melalui pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ tegak lurus garis $2x - y + 3 = 0$!

D. PENUTUP

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi Lingkaran, disajikan sebagai berikut:

1. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik pada bidang yang berjarak sama terhadap titik tertentu.
2. Persamaan lingkaran adalah sebagai berikut
   a. Persamaan lingkaran yang berpusat di P(0, 0) dan memiliki jari-jari r adalah $x^2 + y^2 + r^2$
   b. Persamaan lingkaran yang berpusat di P(a, b) dan memiliki jari-jari r adalah $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
   c. Bentuk Umum persamaan lingkaran yang memiliki jari-jari r dengan $r = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$ dan A, B, C bilangan real adalah $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$
3. Kedudukan suatu titik terhadap lingkaran ada tiga yaitu di dalam lingkaran, pada lingkaran, dan di luar lingkaran.
4. Misalkan g garis dengan persamaan $y = ax + b$ dan L lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + r^2$ sehingga membentuk sistem persamaan linear-kuadrat. Persamaan garis singgung lingkaran dapat ditentukan dengan menentukan persamaan garis $y = mx - mx_1 + y_1$ yang bergradien m dengan syarat diskriminan pada selesaian sistem persamaan linear-kuadrat sama dengan nol kemudian mensubstitusikan nilai m ke persamaan $y = mx - mx_1 + y_1$

Bab 10

TRANSFORMASI

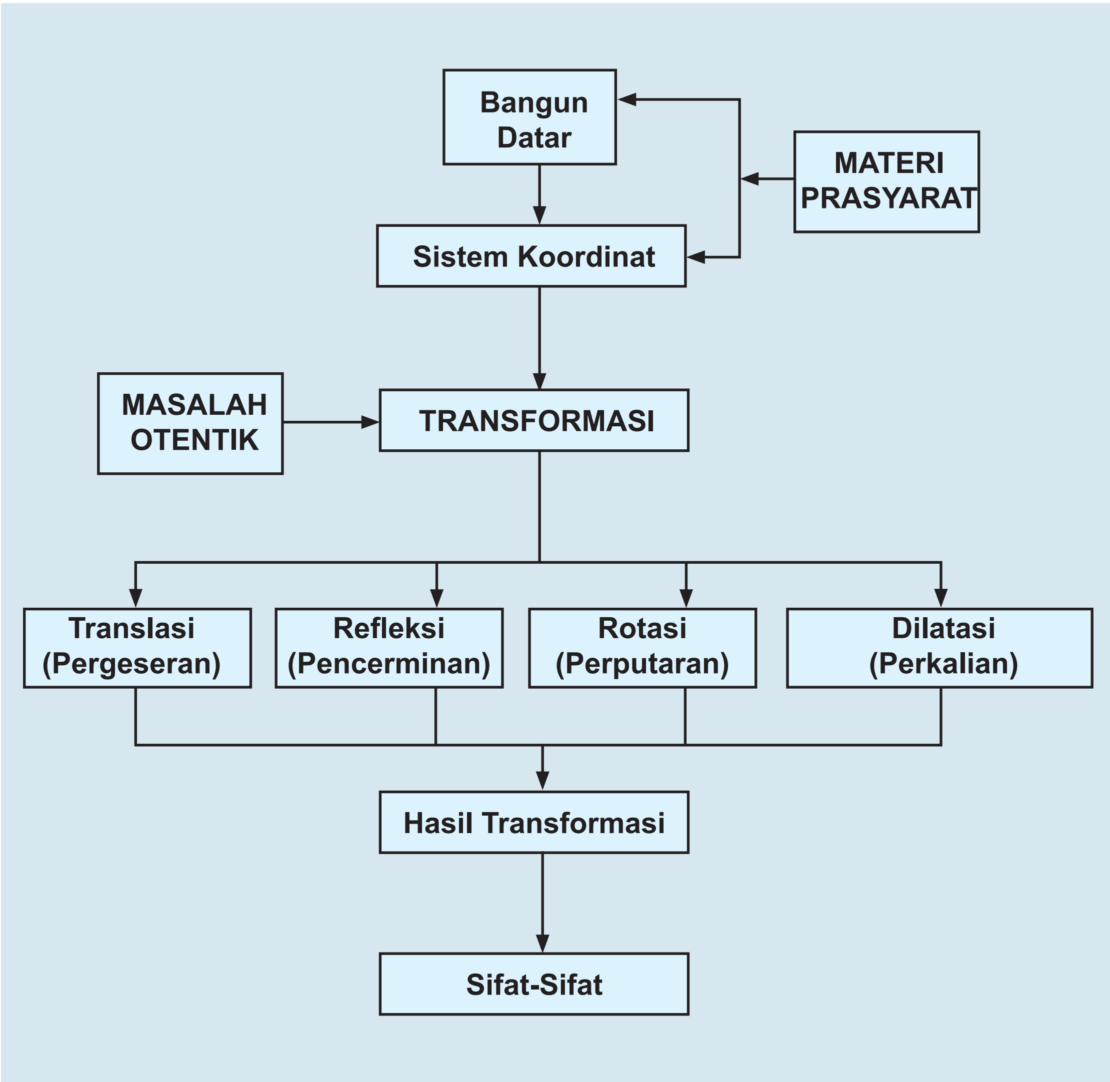
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran transformasi siswa mampu: 1. Memiliki motivasi internal, kemampuan bekerjasama, konsisten, sikap disiplin, rasa percaya diri, dan sikap toleransi dalam perbedaan strategi berpikir dalam memilih dan menerapkan stra-tegi menyelesaikan masalah. 2. Menganalisis sifat-sifat transformasi geometri (translasi, refleksi garis, dilatasi dan rotasi) dengan pendekatan koordinat dan menerapkannya dalam menyelesaikan masalah. 3. Menyajikan objek kontekstual, menganalisis informasi terkait sifat-sifat objek dan menerapkan aturan transformasi geometri (refleksi, translasi, dilatasi, dan rotasi) dalam memecahkan masalah.	Melalui proses pembelajaran transformasi, siswa memiliki pengalaman belajar sebagai berikut. • Terlatih berpikir kritis dan berpikir kreatif. • Menemukan ilmu pengetahuan dari pemecahan masalah nyata • Mengajak untuk melakukan penelitian dasar dalam membangun konsep. • Dilatih bekerjasama dalam tim untuk menemukan solusi permasalahan. • Dilatih mengajukan ide-ide secara bebas dan terbuka • Merasakan manfaat matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Istilah Penting

- *Translasi*
- *Refleksi*
- *Rotasi*
- *Dilatasi*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

Kamu masih ingat pelajaran transformasi di kelas VII, bukan? Nah, kita akan melanjutkan pelajaran transformasi tersebut ke bentuk analitik atau dengan pendekatan koordinat. Sebagai langkah awal, kita akan mengingat kembali sifat-sifat transformasi dengan menggunakan media atau obyek nyata dalam kehidupan sehari-hari dan objek (titik, bidang dan kurva) dalam bidang koordinat kartesius. Menemukan kembali konsep transformasi translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perkalian) dengan pendekatan koordinat.

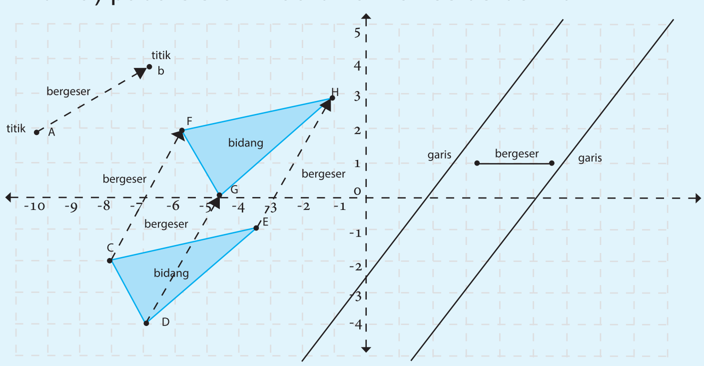
1. Memahami dan Menemukan Konsep Translasi (Pergeseran)

Untuk mengingat kembali sifat-sifat translasi, kita akan mencoba mengamati dan mempelajari serta mengambil kesimpulan terhadap pergeseran beberapa benda.

1.1 Menemukan Sifat-Sifat Translasi

Masalah-10.1

Coba kamu perhatikan dan amati bentuk dan ukuran setiap benda yang bergerak (bergeser) atau berpindah tempat yang ada di sekitarmu. Sebagai contoh, kendaraan yang bergerak di jalan raya, orang yang sedang berjalan ataupun berlari, bola yang memantul ataupun menggelinding, dan lain-lain. Menurutmu, apakah bentuk objek tersebut berubah? atau apakah ukuran objek tersebut berubah oleh karena perpindahan tersebut? Tentu tidak, bukan? Jika demikian, pada sistem koordinat Kartesius, apakah kurva berubah bentuk dan ukuran bila digeser? Perhatikan pergeseran objek (titik, bidang dan kurva) pada sistem koordinat kartesius berikut.



Gambar 10.1 Pergeseran titik, bidang dan kurva pada bidang koordinat Kartesius

Secara analitik, titik, bidang dan kurva (garis) pada gambar di atas tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran oleh pergeseran, bukan? Tetapi letak mereka pasti berubah; artinya, koordinat benda setelah mengalami pergeseran akan berubah dari koordinat semula. Dengan demikan, kita akan mempelajari lebih lanjut tentang koordinat pergeseran suatu titik pada sistem koordinat. Berikut adalah sifat-sifat pergeseran atau translasi.

Sifat 10.1

Bangun yang digeser (ditranslasikan) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Sifat 10.2

Bangun yang digeser (ditranslasikan) mengalami perubahan posisi.

1.2 Menganalisis Konsep Translasi

Masalah-10.2

Empat orang anak dan seorang guru olahraga sedang berlatih mengover bola voli di lapangan olahraga. Mereka membuat formasi sebagai berikut: Keempat anak berdiri di empat penjuru (utara, selatan, timur, dan barat) sedangkan guru mereka berdiri sebagai pusat penjuru. Tiap-tiap anak berjarak 4 meter ke guru olah raga mereka. Aturan latihan sebagai berikut:

1. Guru mengirim bola ke anak yang di utara dan anak tersebut akan mengirimnya kembali ke gurunya, kemudian
2. Guru langsung mengirim bola ke anak yang di timur dan anak tersebut akan mengirim kembali ke gurunya,
3. Demikian seterusnya, bola selalu dikirim ke gurunya, dan guru mengirim bola secara siklis dari utara ke timur, ke selatan, ke barat dan kembali ke utara.

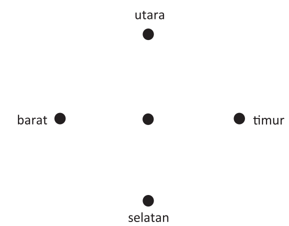
Permasalahan:

1. Dapatkah kamu gambarkan formasi cara berdiri keempat anak dan guru mereka sesuai permasalahan di atas?
2. Seandainya mereka dianggap sebagai titik, dapatkah kamu kembali menggambarkan formasi mereka dalam sistem koordinat Kartesius? Anggap guru olah raga tersebut adalah titik pusat $O(0, 0)$.

3. Seandainya posisi guru dianggap sebagai titik $P(1, 3)$, dapatkah kamu menggambar kembali formasi mereka di koordinat Kartesius?
4. Jika guru olah raga mengintruksikan kepada siswa untuk bebas mengover bola ke teman-temannya maka dapatkah kamu temukan pola pergeseran bola voli tersebut? Coba kamu amati, teliti dengan baik hubungan koordinat Kartesius pada setiap titik. Dapatkah kamu temukan konsep pergeseran?

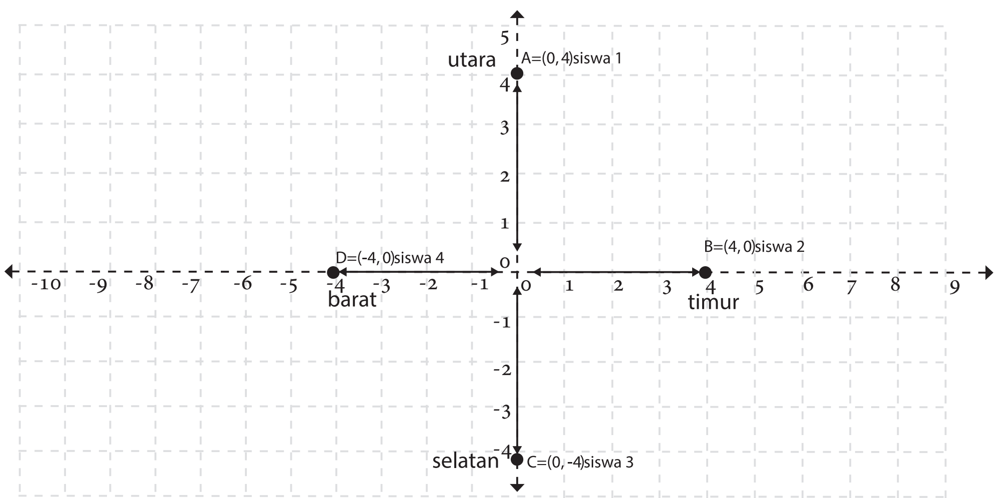
Alternatif Penyelesaian.

1. Gambar formasi cara berdiri keempat anak dan guru mereka pada latihan mengirim bola boli sesuai permasalahan di atas adalah sebagai berikut:



Gambar 10.2: Formasi guru dan siswa dalam latihan bola voli

2. Formasi mereka dalam sistem koordinat Kartesius. Anggap guru olah raga tersebut adalah titik pusat $O(0, 0)$.



Gambar 10.3 Formasi 4 orang siswa dan 1 orang guru pada koordinat kartesius

3. Coba kamu gambarkan formasi mereka dalam bidang koordinat kartesius dengan posisi guru olah raga tersebut adalah titik pusat P(1, 3).

Langkah 1.	Letakkanlah titik P(1, 3) di koordinat kartesius.
Langkah 2.	Buatlah garis berarah di empat penjuru (utara, timur, selatan, dan barat) dengan titik P adalah titik pusatnya.
Langkah 3.	Bergeraklah 4 satuan ke masing-masing penjuru dan letakkanlah sebuah titik serta berilah nama titik A, B, C atau D.
Langkah 4.	Tentukanlah koordinat titik A, B, C dan D tersebut.

4. Perhatikan tabel berikut.

Tabel 10.1 Posisi keempat siswa dalam bidang koordinat Kartesius dan hubungannya.

Dari/ke	Siswa 1 A(0, 4)	Siswa 2 B(4, 0)	Siswa 3 C(0, -4)	Siswa 4 D(-4, 0)
Siswa 1 A(0,4)	$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$	. . .
Siswa 2 B(4,0)	. . .	$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	. . .	. . .
Siswa 3 C(0,-4)	. . .	$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	. . .
Siswa 4 D(-4,0)	. . .	. . .	. . .	$\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

Coba kamu isi sel yang masih kosong pada tabel di atas. Secara umum dapat kita lihat bahwa: jika titik $A(x, y)$ ditranslasi oleh $T(a, b)$, koordinat hasil translasinya adalah $A'(x + a, y + b)$. Perhatikan definisi berikut.

Definisi 10.1

Misalkan x, y, a, dan b adalah bilangan real,

Translasi titik $A(x, y)$ dengan $T(a, b)$ menggeser absis x sejauh a dan menggeser ordinat y sejauh b, sehingga diperoleh titik $A'(x + a, y + b)$, secara notasi ditulis:

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\xrightarrow{T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}A'\begin{pmatrix}x+a\\y+b\end{pmatrix}$$

Mari kita pelajari beberapa soal berikut yang diselesaikan dengan definisi di atas.

Contoh 10.1

Sebuah titik $A(10, -8)$ ditranlasikan berturut-turut dengan $T_1(-1, 2)$ dilanjutkan $T_2(1,-12)$ kemudian dilanjutkan lagi dengan $T_3(-5, -6)$ dan tentukan koordinat titik banyangan A tersebut setelah ditranslasikan.

Alternatif Penyelesaian-1

Permasalahan di atas dapat kita notasikan dengan:

$$A\begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2\begin{pmatrix}1\\-12\end{pmatrix}} A''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} \xrightarrow{T_3\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}} A'''\begin{pmatrix}x'''\\y'''\end{pmatrix}$$

Dengan demikian, proses translasi dapat dilakukan secara bertahap (3 tahap)

Tahap 1.

$$A\begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix} \xrightarrow{T_1\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}10\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1+10\\2-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan pada tahap 1 adalah $A'(9,-6)$.

Tahap 2.

$$A'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} \xrightarrow{T_2\begin{pmatrix}1\\-12\end{pmatrix}} A''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+9\\-12-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-18\end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan pada tahap 2 adalah $A''(10, -18)$.

Tahap 3.

$$A''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix} \xrightarrow{T_3\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}} A'''\begin{pmatrix}x'''\\y'''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+10 \\ -6-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Jadi, koordinat bayangan pada tahap 3 adalah $A'''(5, -24)$. Dengan demikian, bayangan titik $A(10, -8)$ setelah ditranlasikan berturut-turut dengan $T_1(-1, 2)$, $T_2(1, -12)$, dilanjutkan dengan $T_3(-5, -6)$ adalah $A'''(5, -24)$.

Alternatif Penyelesaian-2

Permasalahan translasi di atas, dapat juga kita proses secara langsung atau tidak bertahap sebagai berikut:

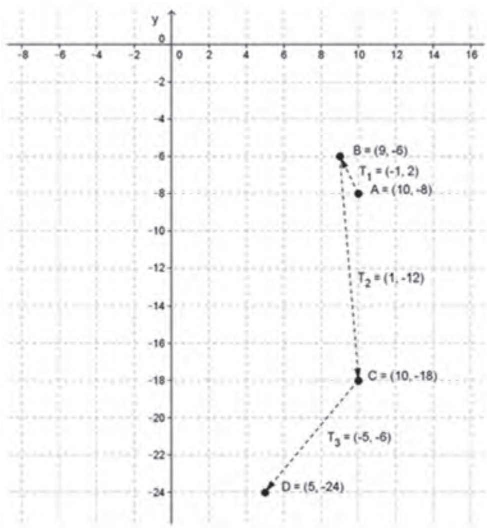
$$A\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{T_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix}} A''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \xrightarrow{T_3\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}} A'''\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+1-1+10 \\ -6-12+2-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, bayangan titik A(10, −8) setelah ditranlasikan berturut-turut dengan $T_1(-1, 2)$, $T_2(1, -12)$ dilanjutkan dengan $T_2(-5, -6)$ adalah $A'''(5, -24)$.

Alternatif Penyelesaian-3

Permasalahan di atas, dapat kita selesaikan secara geometri atau dengan menggambar pada bidang koordinat Kartesius.



Gambar 10.4 Pergeseran bertahap sebuah titik

Contoh 10.2

Sebuah garis g dengan persamaan $y = mx$, ditranslasikan dengan $T(x_1, y_1)$ sehingga terbentuk garis g'. Jika garis g' melalui titik $A(x_2, y_2)$ maka tentukanlah nilai m.

Alternatif Penyelesaian

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x \\ y_1 + y \end{pmatrix}$$

Diperoleh $x' = x_1 + x$ atau $x = x' - x_1$ serta $y = y' - y_1$ atau $y' = y_1 - y$ sehingga dengan mensubstitusi ke persamaan garis g diperoleh garis g' dengan persamaan:

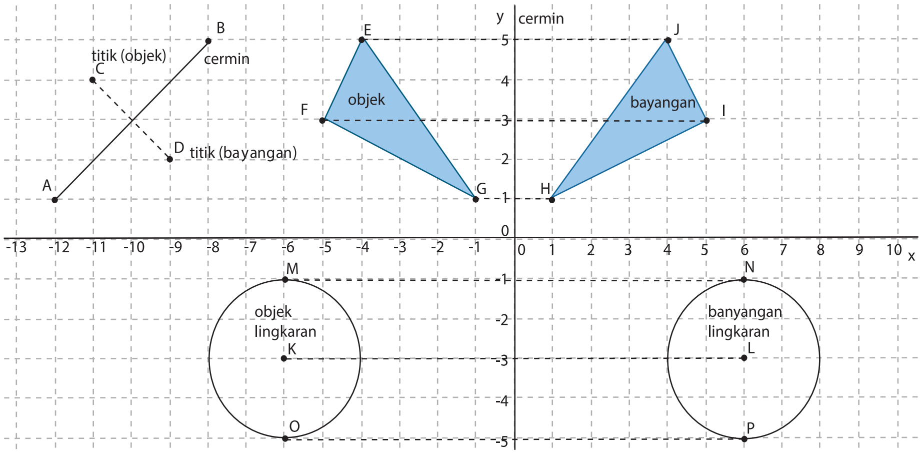
$$y = mx \Rightarrow y' - y_1 = m(x - x_1)$$

Karena garis g' melalui titik $A(x_2, y_2)$ maka $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$ sehingga $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2. Memahami dan Menemukan Konsep Refleksi (Pencerminan)

2.1 Menemukan Sifat-Sifat Refleksi

Pada saat kamu berdiri di depan cermin (cermin datar), kemudian kamu berjalan mendekati cermin dan mundur menjauhi cermin, bagaimana dengan gerakan bayanganmu? Tentu saja bayanganmu mengikuti gerakanmu bukan? Bagaimana dengan jarak dirimu dan bayanganmu dengan cermin? Jarak dirimu dengan cermin sama dengan jarak bayanganmu dengan cermin. Mari kita lihat dan amati bentuk, ukuran dan posisi suatu objek bila dicerminkan pada sistem koordinat. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 10.5 Pencerminan titik, bidang dan kurva pada sistem koordinat Kartesius.3

Pada sistem koordinat kartesius di atas, objek (titik, bidang, kurva lingkaran) mempunyai bayangan dengan bentuk dan ukuran yang sama tetapi letak berubah bila dicerminkan (dengan garis). Perhatikan sifat- sifat pencerminan berikut.

Sifat 10.3

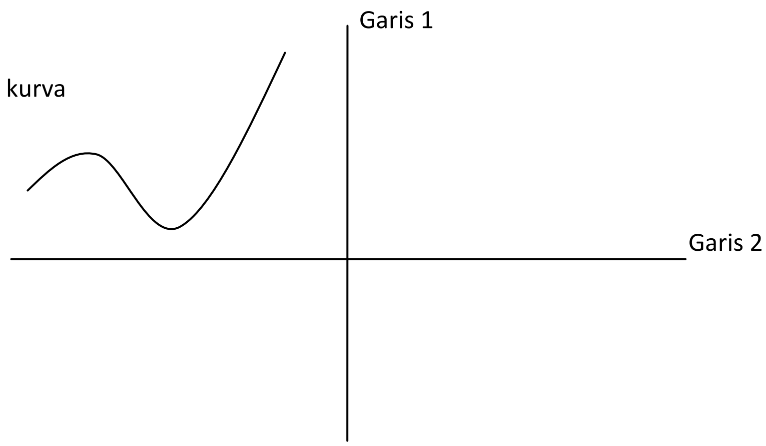
Bangun (objek) yang dicerminkan (*refleksi*) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Sifat 10.4

Jarak bangun (objek) dari cermin (cermin datar) adalah sama dengan jarak bayangan dengan cermin tersebut.

Kerja kelompok.

Perhatikan gambar berikut. Jika garis 1 dan garis 2 adalah cermin maka berdasarkan sifat pencerminan, gambarkanlah bayangan kurva 1 dan kurva 2!



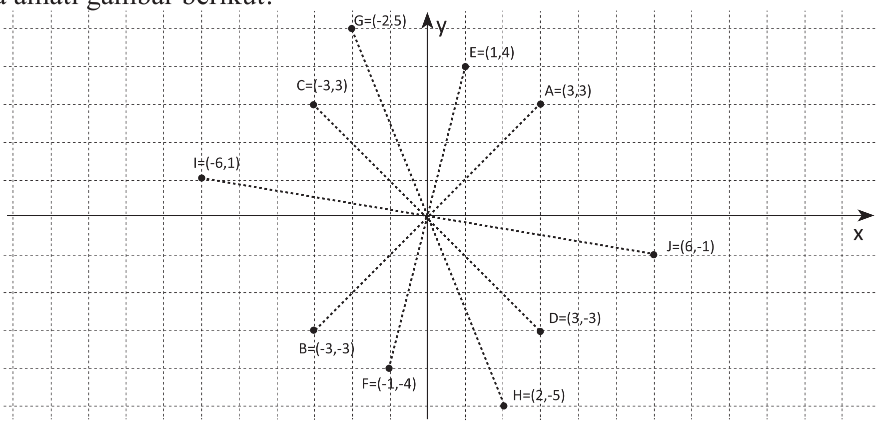
Gambar 10.6 Pencerminan kurva oleh cermin garis 1 dan garis 2

2.2 Menganalisis Konsep Refleksi

Berdasarkan sifat pencerminan (pada cermin datar), jarak objek dengan cermin sama dengan jarak bayangan objek tersebut ke cermin. Secara analitik, konsep dapat kita temukan dengan melakukan beberapa percobaan. Objek yang digunakan adalah titik pada koordinat kartesius dan garis sebagai cermin. Dengan demikian, kamu diminta mengamati perubahan koordinat titik menjadi bayangan titik oleh cermin. Tentu garis sebagai cermin yang kita kaji adalah garis lurus. Ingatlah kembali (atau pelajari kembali) buku Matematika di kelas VII pada pokok bahasan Transformasi.

Menemukan konsep pencerminan terhadap titik asal O(0,0)

Coba amati gambar berikut!



Gambar 10.7 Pencerminan terhadap titik asal koordinat

Setiap pasangan titik dan banyangan pada gambar mendefinisikan garis melalui titik asal O(0,0). Jarak setiap titik ke titik asal sama dengan jarak banyangan titik tersebut ke titik asal. Sebagai contoh, titik A berpasangan dengan titik B dan jarak A ke O sama dengan jarak B ke O. Dengan demikian, titik O adalah sebuah cermin.

Tabel 10.2 Koordinat titik objek dan bayangannya oleh pencerminan terhadap titik O

Koordinat objek	**Koordinat bayangan**
A (3, 3)	B (-3, -3)
C (-3, 3)	D (3, -3)
E (-3, 3)	F (-1, -4)
G (-2, 5)	H (2, -5)
I (-6, 1)	J (6, -1)

Berdasarkan pengamatanmu terhadap koordinat objek dengan koordinat bayangan dari setiap titik pada tabel di atas, dapatkah kamu ambil pola hubungan setiap pasangan titik tersebut? Jika koordinat objek adalah titik A(a, b) maka koordinat bayangan adalah A'(-a, -b). Ingat konsep matriks! Koordinat A(a, b) dapat dituliskan dengan

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Perhatikan definisi berikut.

Definisi 10.2

Pencerminan terhadap titik asal (0,0)

Jika titik P(a, b) dicerminkan terhadap/ke titik asal (0, 0) maka bayangannya adalah P'(-a, -b).

Dituliskan, $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$

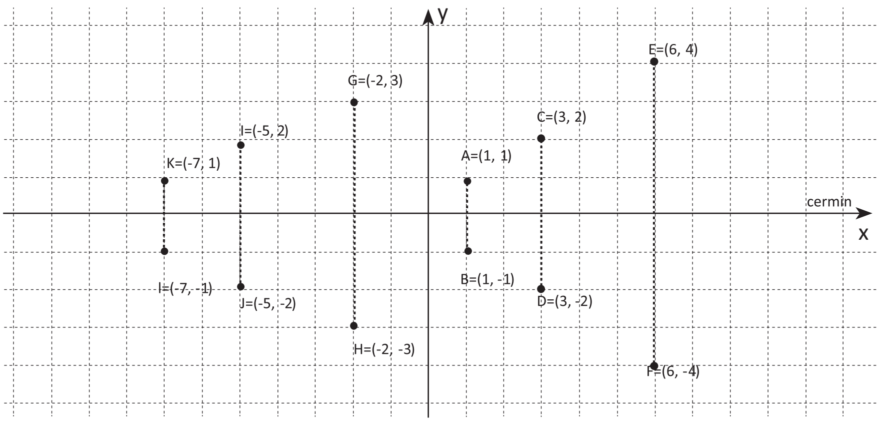
dengan $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Dengan demikian pencerminan terhadap titik O ditunjukkan dengan matriks

$$C_{O(0,\,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu *x* (atau *y* = 0)

Perhatikan pencerminan beberapa titik berikut terhadap sumbu x!



Gambar 10.8 Pencerminan titik terhadap sumbu x

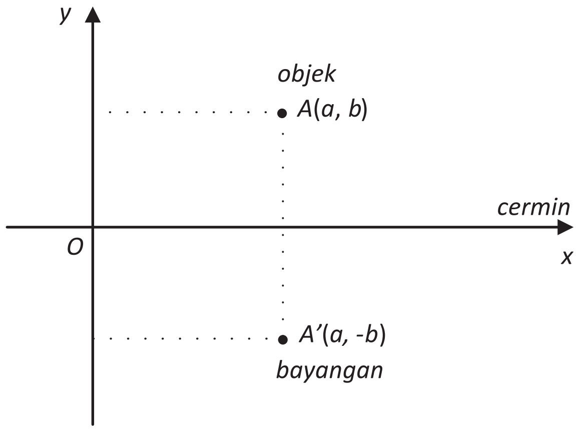
Mari kita sajikan setiap pasangan titik pada tabel berikut.

Tabel 10.3 Koordinat titik dan bayangannya oleh pencerminan terhadap sumbu x

Objek	A(1, 1)	C(3, 2)	E(6, 4)	G(-2,3)	I(-5, 2)	K(-7, 1)
Bayangan	B(1, -1)	D(3, -2)	F(6, -4)	H(-2,-3)	J(-5, -2)	L(-7, -1)

Secara umum, pencerminan titik $A(a, b)$ terhadap sumbu x (garis dengan persamaan $y = 0$) akan menghasilkan koordinat bayangan $A'(a', b')$.

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 10.9 Pencerminan terhadap sumbu x

Jika kamu amati gambar di atas, dengan menentukan koordinat bayangan dari setiap objek yang dicerminkan terhadap sumbu *x* maka nilai absis tetap tetapi nilai ordinat berubah yaitu: jika koordinat objek adalah A(*a*, *b*) maka koordinat bayangan adalah A'(*a*, -*b*). Ingat konsep matriks bahwa koordinat A(*a*, -*b*) dapat dituliskan dengan .

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Perubahan koordinat bayangan tersebut dapat diformulasikan pada konsep sebagai berikut:

Pencerminan terhadap sumbu *x* (garis *y* = 0)

Jika titik A(*a*, *b*) dicerminkan terhadap sumbu *x* (garis *y* = 0) maka bayangannya adalah A'(*a*,-*b*). Dituliskan,

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A'\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$$

dengan $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

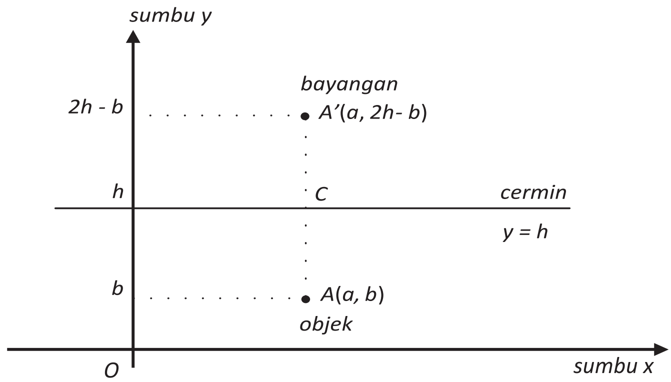
Dengan demikian pencerminan terhadap sumbu *x* ditunjukkan dengan matriks .

$$C_{sumbu\ x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Menemukan konsep pencerminan terhadap garis $y = h$

Misalkan titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap sumbu x atau garis dengan persamaan $y = h$ akan menghasilkan koordinat bayangan $A'(a', b')$.

Perhatikan gambar berikut!



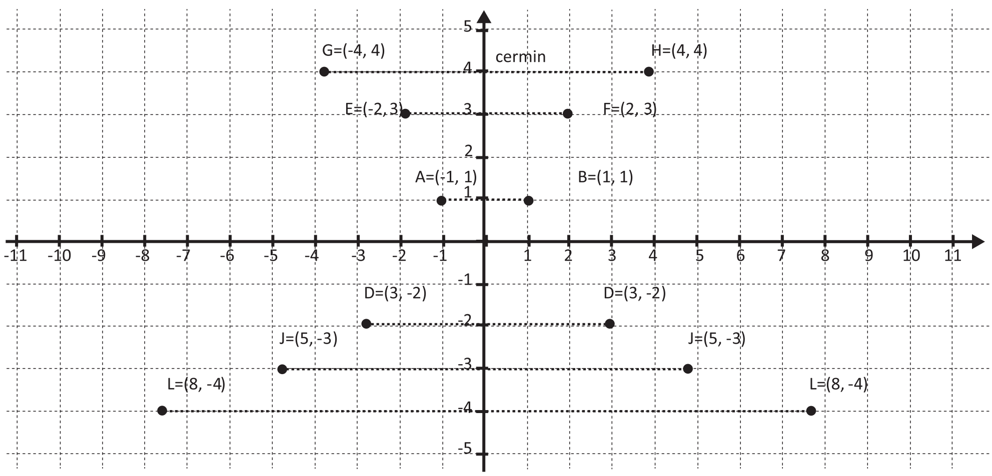
Gambar 10.10 Pencerminan terhadap garis $y = h$

Kerja Kelompok

Perhatikan gambar di atas! Berikan komentar anda, mengapa koordinat bayangan $A'(a, 2h - b)$ jika objek $A(a, b)$ dicerminkan ter-hadap garis $y = k$. Untuk menjawabnya, kamu harus menggunakan sifat pencerminan, yaitu AC sama dengan A'C.

Menemukan konsep pencerminan terhadap sumbu *y* (atau *x* = 0)

Perhatikan pencerminan titik terhadap sumbu y atau garis $x = 0$ berikut.



Gambar 10.11 Pencerminan titik terhadap sumbu y

Perhatikan tabel berikut

Tabel 10.4 Koordinat titik dan bayangannya oleh pencerminan terhadap sumbu y

Objek	A(-1, 1)	C(-3, -2)	E(-2, 3)	G(-4, 4)	I(-5, -3)	K(-8, -4)
Bayangan	B(1, 1)	D(3, -2)	F(2, 3)	H(4, 4)	J(5, -3)	L(8, -4)

Misalkan titik $A(a, b)$ dicerminkan terhadap sumbu y atau garis dengan persamaan $x = 0$ akan menghasilkan koordinat bayangan $A'(a', b')$.

Pencerminan terhadap sumbu *y* (garis *x* = 0)

Jika titik A(*a*, *b*) dicerminkan terhadap sumbu *y* (garis *x* = 0) maka bayangannya adalah A'(-*a*, *b*).

$$\text{Dituliskan, } A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{sumbu\ y}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\text{dengan } \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & `1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Tugas Kelompok

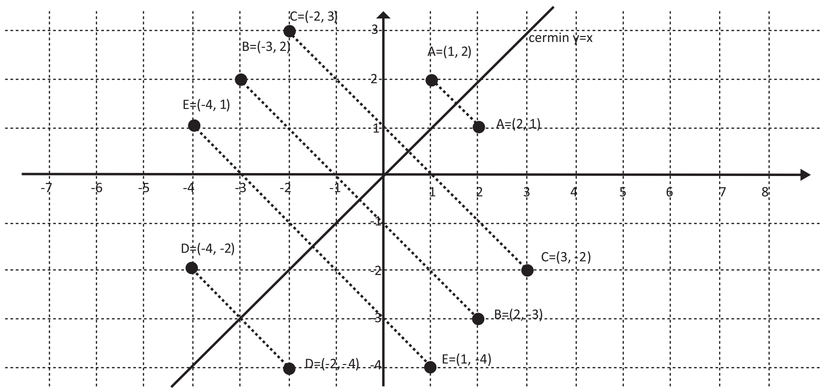
Coba kamu temukan konsep pencerminan dengan garis $x = k$

Menemukan konsep pencerminan terhadap garis $y = k$

Masalah-10.3

Kamu pernah berbelanja sepatu di sebuah toko, bukan? Jika kita memilih sepatu dan mencobanya, maka toko tersebut menyediakan sebuah cermin yang membuat kita bisa melihat sepatu yang sedang kita pakai, bukan. Cermin tersebut adalah cermin datar namun diletakkan miring terhadap objek yang dicerminkan. Seandainya, permasalahan ini, kita bawakan ke pendekatan koordinat dengan memisalkan kembali bahwa objek yang dicerminkan adalah sebuah titik pada koordinat kartesius dengan cermin tersebut adalah sebuah garis, maka dapatkah kamu temukan hubungan koordinat objek dengan koordinat bayangannya? Ingat, kamu harus memegang sifat pencerminan bahwa jarak objek ke cermin sama dengan jarak bayangan ke cermin. Mari kita kaji konsep pencerminan pada garis $y = x$ dan $y = -x$.

Coba kamu amati pencerminan titik A(1, 2), B(2, -3), C(-2, 3), D(-4, -2), dan E(1, -4) terhadap garis $y = x$ berikut.



Gambar 10.12 Pencerminan beberapa titik terhadap garis $y = x$

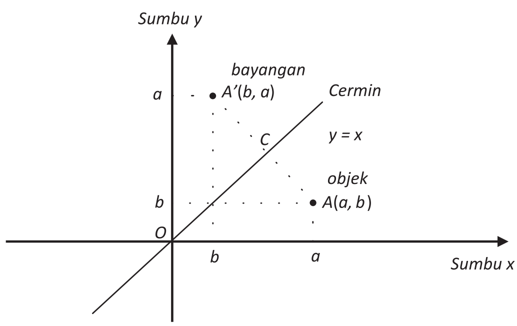
Perhatikan tabel berikut.

Tabel 10.5 Koordinat titik dan bayangannya oleh pencerminan terhadap garis $y = x$

Koordinat objek	Koordinat bayangan
A (1, 2)	A (2, 1)
B (2, -3)	B (-3, 2)
C (-2, 3)	C (3, -2)
D (-4, -2)	D (-2, -4)
E (1, -4)	E (-4, 1)

Secara umum, jika titik A(a, b) dicerminkan dengan garis maka koordinat bayangannya adalah A'(b, a).

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 10.13 Pencerminan terhadap garis y = x

Dapatkah kamu melihat hubungan koordinat objek dengan koordinat bayangannya. Perhatikanlah, jika titik A(a, b) dicerminkan dengan garis maka koordinat bayangannya adalah A'(b, a). Ingat pada matriks bahwa koordinat A(b, a) dapat dituliskan dengan

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Perhatikan konsep berikut.

> **Pencerminan terhadap garis $y = x$**
>
> Jika titik A(a, b) dicerminkan terhadap garis $y = x$) maka bayangannya adalah A'(b, a). Dituliskan, $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{y=x}} A'\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ dengan $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Dengan demikian pencerminan terhadap garis $y = x$ ditunjukkan dengan matriks

$C_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Tugas Kelompok

Coba kamu tunjukkan bahwa pencerminan terhadap garis $y = -x$ diwakili dengan matriks $C_{y=-x} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Dengan demikian, matriks pencerminan dapat disajikan seperti berikut ini.

> Matriks pencerminan terhadap
>
> 1. Titik O(0,0) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
> 2. Sumbu x $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
> 3. Sumbu y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
> 4. Garis $y = x$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
> 5. Garis $y = -x$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Contoh 10.3

Tentukan bayangan titik A(1, -2) dan B(-3, 5) setelah dicerminkan terhadap sumbu x.

Alternatif Penyelesaian.

Permasalahan di atas dapat kita notasikan dengan:

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{sumbu\ x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan titik A(1, -2) setelah dicerminkan terhadap sumbu x adalah A'(1, 2).

$$B\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{sumbu\ x}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} B'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Jadi bayangan titik A(-3, 5) setelah dicerminkan terhadap sumbu x adalah A'(-3, -5).

Contoh 10.4

Sebuah titik $P(10, 5)$ dicerminkan terhadap sumbu y kemudian dilanjutkan dicerminkan terhadap garis $y = x$. Tentukan bayangan titik tersebut.

Alternatif Penyelesaian-1

$$P\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{sumbu\ y}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} P'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{y=x}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} P''\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Permasalahan ini dapat diselesaikan secara bertahap, sebagai berikut:

Tahap 1.

$$P\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{\text{sumbu } y}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}}P'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-5\end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P(10, -5) setelah dicerminkan terhadap sumbu y adalah P'(-10, -5). Bayangan ini akan dilanjutkan dicerminkan terhadap garis $y = x$ pada tahap 2, sebagai berikut:

Tahap 2.

$$P'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{y=x}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}P''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-10\end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan titik P'(-10, -5) setelah dicerminkan terhadap sumbu $y = x$ adalah P"(-5, -10).

Dengan demikian, bayangan titik P(10, -5) setelah dicerminkan terhadap sumbu y, dilanjutkan terhadap garis $y = x$ adalah P"(-5, -10).

Alternatif Penyelesaian-2

Permasalahan di atas, dapat juga diselesaikan secara langsung sebagai berikut:

$$P\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{\text{sumbu } y}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}}P'\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\xrightarrow{C_{y=x}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}}P''\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-10\end{pmatrix}$$

Dengan demikian, bayangan titik P(10, -5) setelah dicerminkan terhadap sumbu y, dilanjutkan terhadap garis $y = x$ adalah P''(-5, -10).

Contoh 10.5

Sebuah lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ dicermin-kan terhadap garis $y = -x$. Tentukan persamaan bayangan lingkaran yang terjadi.

Alternatif Penyelesaian-1

Misalkan titik $P(x, y)$ dilalui oleh lingkaran tersebut atau terletak pada kurva lingkaran sehingga permasalahan di atas dapat dinotasikan sebagai berikut:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{y=-x}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} P'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Diperoleh $x' = -y$ atau $y = -x'$ serta $y' = -x$ atau $x = -y'$ sehingga dengan mensubstitusikan ke persamaan lingkaran maka diperoleh bayangan lingkaran dengan persamaan:

$$(-y)^2 + (-x)^2 - 2(-y) + 2(-x) - 3 = 0 \Leftrightarrow y^2 + x^2 + 2y - 2x - 3 = 0\,.$$

Dengan demikian, bayangan lingkaran: $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ setelah dicerminkan terhadap garis $y = -x$ adalah $y^2 + x^2 + 2y - 2x - 3 = 0$.

Uji Kompetensi 10.1

1. Tunjukkanlah secara gambar pergeseran dari beberapa titik berikut! Asumsikan arah ke kanan adalah arah sumbu x positif dan arah ke atas adalah ke arah sumbu y positif.
   a. Titik $A(2, -3)$ bila digeser 2 satuan ke kanan dan 3 satuan ke bawah.
   b. Titik $A(-3, 4)$ bila digeser 4 satuan ke kiri dan 2 satuan ke atas.
   c. Titik $A(1, 2)$ bila digeser 2 satuan ke kiri dan 3 satuan ke atas dilanjutkan dengan pergeseran 3 satuan ke kanan dan 2 satuan ke atas.
   d. Segitiga PQR dengan koordinat $P(2, 0)$, $Q(-3, 3)$ dan R(8, 0) bila digeser 3 satuan ke kiri dan 6 satuan ke bawah. Tentukanlah luas segitiga dan bayangannya.

2. Tentukanlah persamaan kurva oleh translasi T berikut, kemudian tunjukkanlah sketsa pergeseran kurva tersebut. Asumsikan arah ke kanan adalah arah sumbu x positif dan arah ke atas adalah ke arah sumbu y positif.
   a. Garis lurus $2x - 3y + 4 = 0$ digeser 2 satuan ke kiri dan 3 satuan ke bawah.
   b. Parabola $y = x^2 - 2x - 8$ ditranslasikan oleh $T(-3, 9)$.
   c. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ ditranslasikan dengan $P(a, b)$ di mana $P(a, b)$ adalah koordinat lingkaran tersebut.
3. Titik A(-2, 1) ditranslasikan berturut-turut dengan translasi $T_n = \begin{pmatrix} 2n-1 \\ n+2 \end{pmatrix}$ untuk $n \in$ N. Tentukan posisi titik pada translasi ke-2013.
4. Tunjukkanlah secara gambar pencerminan dari beberapa titik berikut!
   a. Titik $A(2, -3)$bila dicerminkan terhadap sumbu x.
   b. Titik $A(-3, 4)$ bila dicerminkan terhadap garis $x = 5$.
   c. Titik $A(1, 2)$ bila bila dicerminkan dengan garis $y = x$ dilanjutkan terhadap garis $y = -2$.
   d. Segitiga PQR dengan koordinat $P(2, 0)$, $Q(-3, 3)$ dan $R(8, 0)$ bila dicerminkan dengan sumbu x. Tentukanlah luas segitiga dan bayangannya.

5. Tentukanlah persamaan kurva oleh pencerminan C berikut, kemudian tunjukkanlah sketsa pencerminan kurva tersebut.
   a. Garis lurus $2x - 3y + 4 = 0$ dicerminkan terhadap sumbu x.
   b. Garis lurus $x + 2y + 3 = 0$ dicerminkan terhadap garis $y = -x$.
   c. Parabola $y = -x^2 - 2x - 8$ dicerminkan terhadap garis $x = 1$.
   d. Parabola $y = x^2 + x - 6$ dicerminkan terhadap garis $y = 1$.
   e. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ dicerminkan terhadap 4 cermin yaitu dengan garis $y = -4$, dengan garis $y = 6$, dengan garis $y = -1$, dan terhadap garis $x = 6$.

6. Tunjukkan dan berilah tanda “v” pada tabel di bawah ini, pencerminan yang mungkin ada pada setiap kurva berikut.

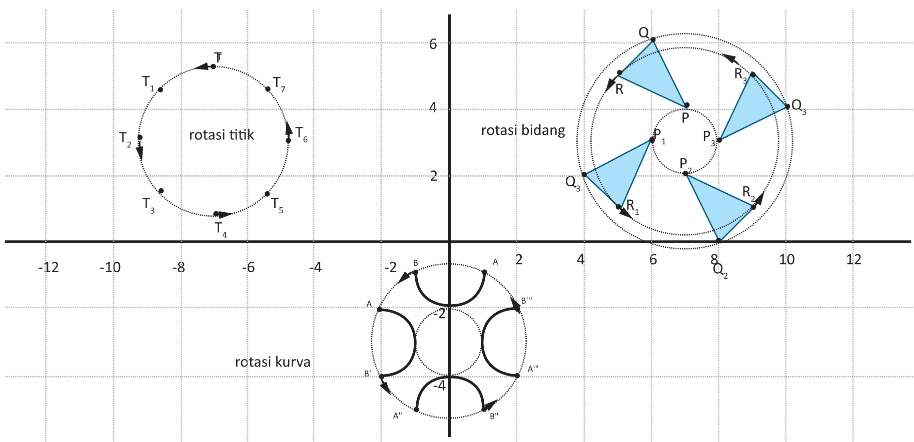
No.	Pers. Kurva	Pencerminan terhadap				
		Titik O(0, 0)	Sumbu x	Sumbu y	$y = x$	$y = -x$
1	Lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, $r > 0$					

No.	Pers. Kurva	Pencerminan terhadap				
		Titik O(0, 0)	Sumbu x	Sumbu y	$y = x$	$y = -x$
2	Parabola $y = x^2$					
3	Parabola $x = y^2$					
4	Kurva $y = x^3$					
5	Kurva $y = \|x\|$					
6	Kurva $y = \cos x$					
7	Kurva $y = \sin^{2013}x$					

3. Memahami dan Menemukan Konsep Rotasi (Perputaran)

3.1 Menemukan Sifat-Sifat Rotasi

Coba kamu perhatikan benda-benda yang berputar di sekelilingmu. Contohnya, jarum jam dinding, kincir angin, dan lain-lain. Menurutmu apakah bentuk dan ukuran benda tersebut berubah oleh perputaran tersebut? Tentu tidak, bukan. Bagaimana dengan objek yang diputar pada sistem koordinat, apakah bentuk dan ukurannya berubah juga? Perhatikan gambar berikut!



Gambar 10.14 Rotasi titik, bidang dan kurva pada sistem koordinat Kartesius

Coba kamu amati perputaran objek (titik, bidang dan kurva) pada sistem koordinat di atas. Titik, bidang dan kurva bila diputar tidak berubah bentuk dan ukuran tetapi mengalami perubahan posisi atau letak. Jadi, bentuk dan ukuran objek tidak berubah karena rotasi tersebut tetapi posisinya berubah. Perhatikan sifat-sifat rotasi berikut.

Sifat 10.5

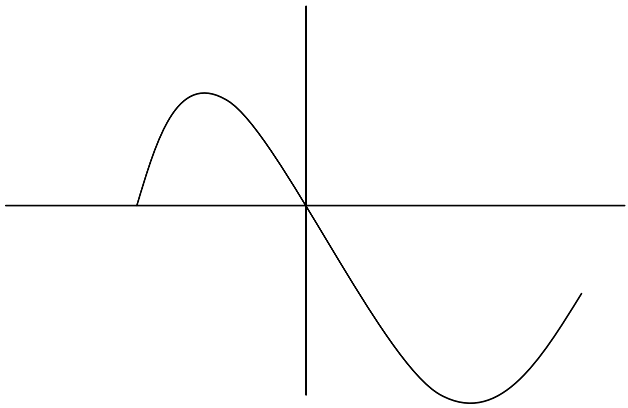
Bangun yang diputar (rotasi) tidak mengalami perubahan bentuk dan ukuran.

Sifat 10.6

Bangun yang diputar (rotasi) mengalami perubahan posisi.

Tugas kelompok.

Putarlah kurva berikut sebesar 270^0 searah putaran jarum jam dengan pusat O (0,0). Tunjukkanlah bahwa rotasi kurva tersebut memenuhi sifat-sifat rotasi.



Gambar 10.15 Kurva yang akan dirotasikan sebesar 270^o dengan pusat O(0,0)

3.2 Menemukan Konsep Rotasi

Percobaan 10.1

Bahan.

Selembar kertas karton

Selembar bidang berbentuk persegi panjang (beri nama bidang *ABCD*)

Sebuah pensil (atau alat tulis lainnya)

Sebuah paku payung

Sebuah lidi

Lem secukupnya

Percobaan 1.

Letakkanlah bidang *ABCD* di atas kertas karton. Lukislah garis di atas kertas karton tersebut mengikuti keliling bidang *ABCD* dan berilah nama di kertas karton tersebut mengikuti nama bidang *ABCD* tersebut. Tusuklah dengan paku payung di pusat bidang *ABCD* menembus bidang di bawahnya. Putarlah bidang *ABCD* sesuai keinginanmu.

Percobaan 2.

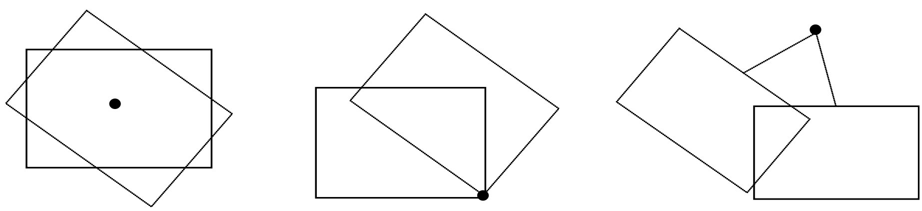
Tusuklah dengan paku payung di salah satu titik sudut bidang *ABCD* menembus bidang di bawahnya. Putarlah bidang *ABCD* sesuai keinginanmu.

Percobaan 3.

Rekatlah salah satu ujung sebuah lidi pada bidang *ABCD*, kemudian peganglah lidi di ujung yang lain. Putarlah lidi tersebut sesuai keinginanmu.

Dari percobaan 1, 2, dan 3, kesimpulan apa yang dapat kamu berikan. Mari kaji lebih lanjut percobaan ini. Misalkan percobaan 1, 2, dan 3 ditunjukkan dengan gambar dibawah ini.

Perhatikan beberapa gambar berikut.



a *b* *c*

Gambar 10.16 Sebidang kertas dirotasi dengan pusat rotasi yang berbeda

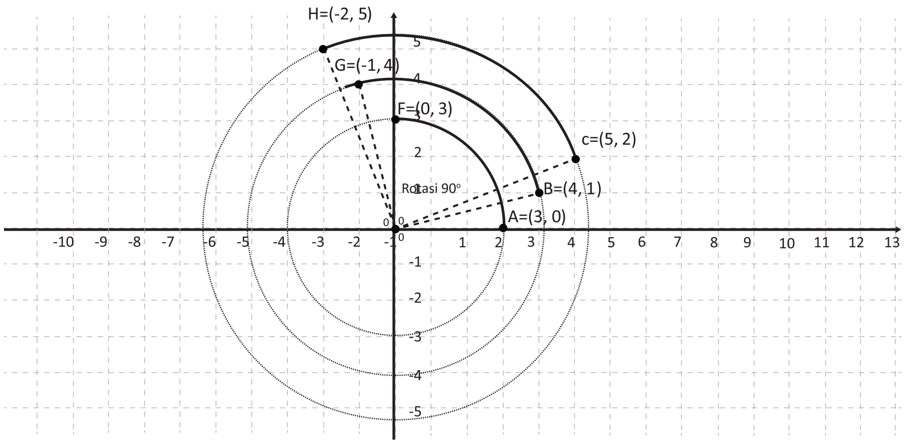
Berdasarkan gambar di atas, letak sebuah titik atau bidang setelah rotasi dipengaruhi oleh titik pusat rotasinya. Dengan demikian, mari kita temukan konsep rotasi sebuah titik dengan menampilkan percobaan tersebut ke dalam koordinat kartesius. Kamu diharapkan aktif dalam mengamati rotasi titik di pokok bahasan ini.

Rotasi pada Pusat O(0, 0)

Mari kita amati beberapa contoh rotasi titik dengan pusat O(0, 0) sebagai berikut.

Contoh 10.6

Rotasi titik sebesar 90^0 dengan pusat $O(0, 0)$



Gambar 10.17 Rotasi 90^0 beberapa titik pada bidang koordinat Kartesius dengan pusat O(0,0)

Rotasi titik pada gambar di atas disajikan pada tabel berikut.

Tabel 10.6 Koordinat titik dan bayangannya oleh rotasi sejauh 90^0 dengan pusat O(0, 0)

Rotasi sejauh 90^0 dengan Pusat Rotasi O(0, 0)		
Titik Objek	**Titik Bayangan**	**Pola**
A(3, 0)	A'(0, 3)	$\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$
B(4, 1)	B'(-1, 4)	$\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$
C(5, 2)	C'(-2, 5)	$\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$

Dengan demikian, rotasi 90^0 dengan pusat O(0, 0) diwakili dengan matriks

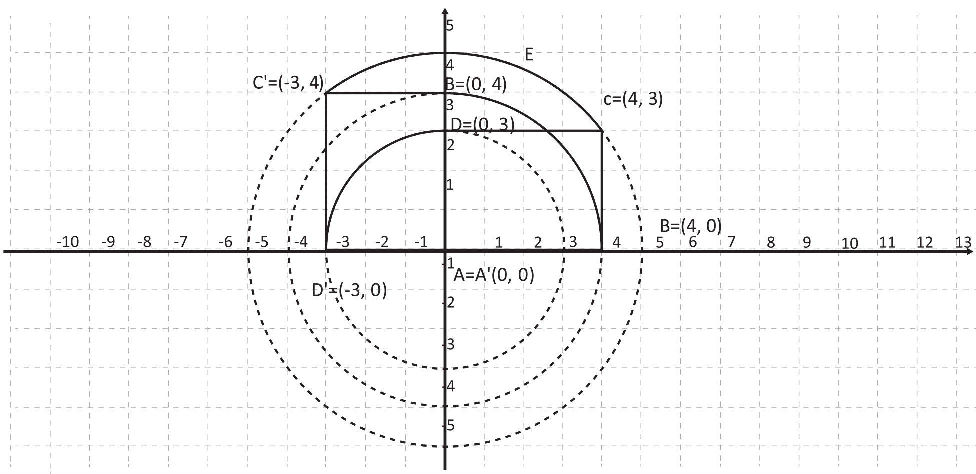
$$R_{[0^o, O(0,0)]} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 10.7

Bidang *ABCD* dengan A(0, 0), B(4, 0), C(4, 3) dan D(0, 3) dirotasikan sebesar 90^0 dengan pusat A(0, 0). Tunjukkan dan tentukan koordinat objek setelah dirotasikan.

Alternatif Penyelesaian

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 10.18 Rotasi sebuah bidang ABCD dengan pusat O(0, 0)

Hasil rotasi setiap titik A, B, C, dan D menghasilkan bayangan titik A', B', C', dan D' yang dapat kita ketahui koordinatnya seperti pada tabel berikut.

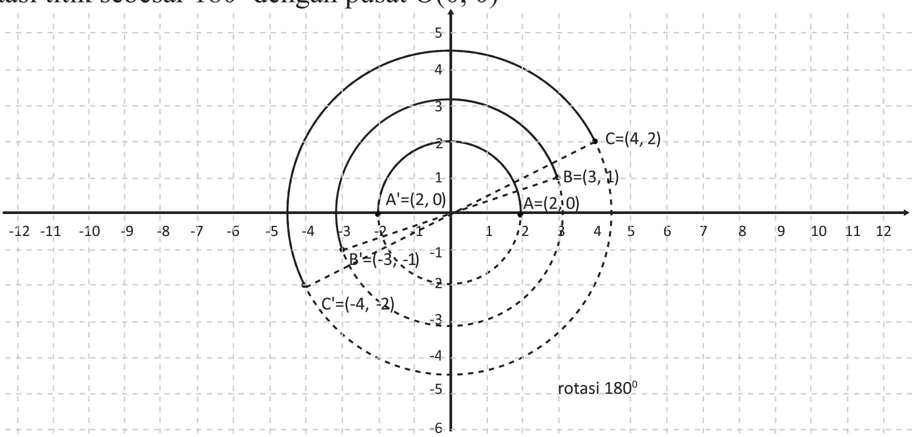
Tabel 10.7 Koordinat titik dan bayangan bidang ABCD oleh rotasi sejauh 90^0 dengan pusat O(0, 0)

Rotasi sejauh 90^0 dengan Pusat Rotasi A(0, 0)	
Titik Objek	**Titik Bayangan**
A(0, 0)	A'(0, 0)
B(4, 0)	B'(0, 4)
C(4, 3)	C'(-3, 4)
D(0, 3)	D'(-3, 0)

Secara umum, kamu pasti sudah dapat melihat pola atau hubungan antara koordinat objek dengan koordinat bayangan, bukan? Jika sebuah titik A(a, b) dirotasikan dengan sudut 90^0 searah jarum jam dan pusat rotasi O(0, 0) maka koordinat bayangan adalah A'(-b, a). Ingat koordinat A'(-b, a) dapat dituliskan dengan $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Contoh 10.8

Rotasi titik sebesar 180^0 dengan pusat O(0, 0)



Gambar 10.19 Rotasi 180^0 titik pada koordinat kartesius dengan pusat O(0, 0)

Rotasi titik pada gambar 10.19 di atas disajikan pada tabel berikut.

Tabel 10.8 Koordinat titik dan bayangan titik oleh rotasi sejauh 180^0 dan pusat O(0, 0)

Rotasi sejauh 180^0 dengan Pusat Rotasi O(0, 0)		
Titik Objek	**Titik Bayangan**	**Pola**
A(2, 0)	A'(-2, 0)	$\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$
B(3, 1)	B'(-3, -1)	$\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$
C(4, 2)	C'(-4, -2)	$\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$

Dengan demikian, rotasi 180^0 dengan pusat O(0,0) diwakili dengan matriks $R_{[180^o,\, O(0,\,0)]} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$

Tugas Kelompok

Tunjukkan matriks yang mewakili rotasi titik sebesar -90^0 dengan pusat O(0, 0)

Dengan demikian, matriks rotasi dapat disajikan pada tabel berikut:

Matriks rotasi dengan sudut

1. 270^o	$\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$	4. -90^o	$\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}$
2. 180^o	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$	5. -180^o	$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$
3. 90^o	$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$	6. -270^o	$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$

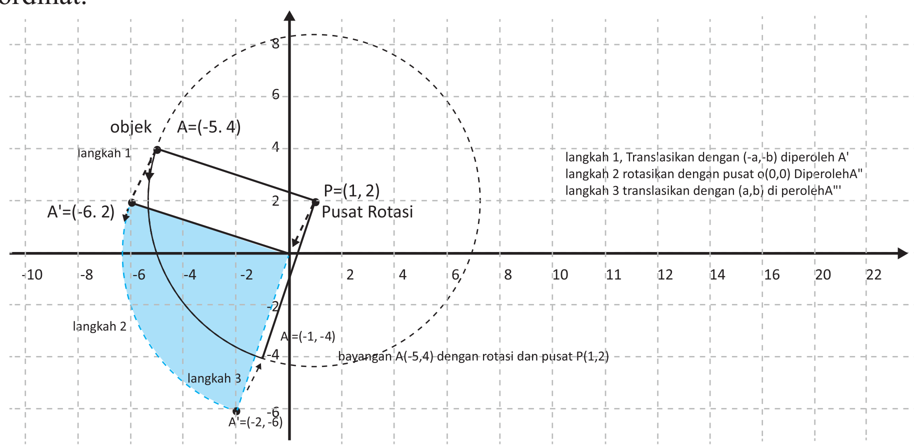
Rotasi pada Pusat P(a,b)

Mari kita amati beberapa contoh rotasi titik dengan pusat P(a, b) sebagai berikut.

Contoh 10.9

Rotasi titik sebesar 90^0 dengan pusat $P(a, b)$

Tunjukkanlah rotasi titik A(-5, 4) sebesar 90^0 dengan pusat P(1, 2) pada sistem koordinat.



Gambar 10.20 Rotasi 90^0 titik A(-5,4) pada sistem koordinat Kartesius dengan pusat P(1, 2)

Langkah-langkah rotasi sebagai berikut.

Langkah 1. Translasikan koordinat objek dengan (-a, -b) sehingga pusat rotasi berubah menjadi O(0, 0)
Titik A(-5, 4) ditranslasi dengan T(-1, -2) diperoleh A'(-6, -2)

Langkah 2. Rotasikan objek yang telah ditranslasikan sebesar sudut rotasi.
Titik A'(-6, -2) dirotasikan sebesar 90^0 dan pusat O(0, 0) diperoleh A"(-2, -6)

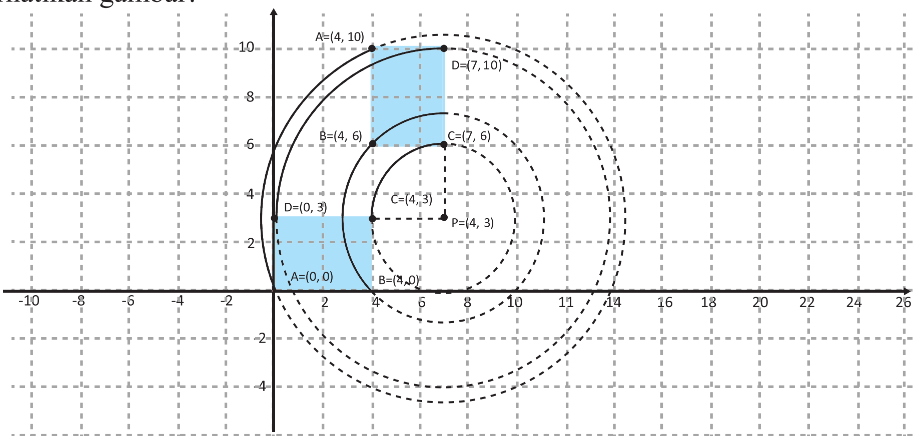
Langkah 3. Translasikan kembali koordinat hasil langkah 2 dengan pusat rotasi P(a, b). Titik A"(-2, -6) ditranslasikan kembali dengan (1, 2) diperoleh A'''(-1,-4)

Jadi, banyangan rotasi titik A(-5, 4) dengan rotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi P(1, 2) adalah A'''(-1, -4)

Contoh 10.10

Perhatikan bidang *ABCD* adalah A(0, 0), B(4, 0), C(4,3) dan D(0, 3) dirotasikan sebesar -90^0 dengan pusat rotasi P(7, 3).

Perhatikan gambar!



Gambar 10.21 Rotasi sebuah bidang ABCD dengan pusat P(7,3)

Tabel 10.9 Koordinat titik dan bayangan titik oleh rotasi sejauh -90^0 dan pusat P(7, 3)

Rotasi sejauh -90^0 dengan Pusat Rotasi P(7, 3)			
Titik Objek	**Tranlasi T(-7, -3)**	**Rotasi -90^0 Pusat O(0, 0)**	**Translasi P(7, 3) = Titik Bayangan**
A(0, 0)	A_1 (-7, -3)	A_2 (-3, 7)	(-3,7) + (7,3) = A'(4, 10)
B(4, 0)	B_1 (-3, -3)	B_2 (-3, 3)	(-3, 3) + (7,3) = B'(4,6)
C(4, 3)	C_1 (-3, 0)	C_2 (0, 3)	(0, 3) + (7,3) = C'(7, 6)
D(0, 3)	D_1(-7, 0)	D_2 (0, 7)	(0, 7) + (7, 3) = D'(7,10)

Rotasi dengan matriks rotasi M_R dan pusat $P(p,q)$

Jika titik $A(a,b)$ dirotasi dengan matriks rotasi M_R dan pusat $P(p,q)$ adalah $A'(b,a)$.

Dituliskan, $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = M_R \begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Contoh 10.11

Sebuah garis $2x - 3y - 4 = 0$ dirotasikan sebesar 180^0 dengan titik pusat rotasi P(1, -1). Tentukanlah persamaan garis setelah dirotasikan.

Alternatif Penyelesaian.

Dengan menggunakan konsep yang telah ditemukan. Misalkan titik A(x, y) adalah sembarang titik yang dilalaui oleh garis tersebut, sehingga:

$$A(x, y) \xrightarrow{R_{[P(1,-1)\ 180^0]}} A'(x', y')$$

Langkah 1. Translasi dengan T(-1,1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}$$

Langkah 2. Rotasi dengan sudut 180^0 dan pusat O(0,0)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1 \\ -y-1 \end{pmatrix}$$

Langkah 3. Translasi dengan P(1,-1)

$$\begin{pmatrix} -x+1 \\ -y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ -y-2 \end{pmatrix}$$

Jadi, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2 \\ -y-2 \end{pmatrix}$ atau $x = -x'+2$ dan $y = -y'-2$ sehingga persamaan garis setelah dirotasikan adalah:

$$2(-x+2) - 3(-y-2) - 4 = 0$$

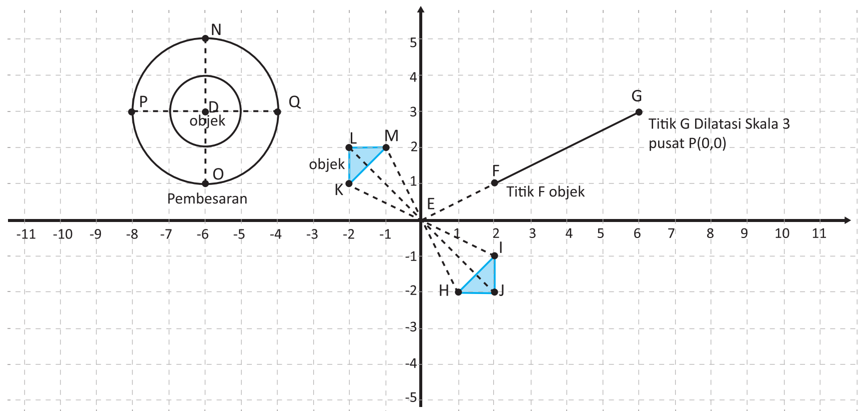
$$-2x + 4 + 3y + 6 - 4 = 0$$

$$-2x + 3y + 6 = 0$$

4. Memahami dan Menemukan Konsep Dilatasi (Perkalian)

4.1 Menemukan Sifat-Sifat Dilatasi

Kamu pernah mengamati sebuah balon yang dihembus atau diisi dengan udara, bukan? Makin banyak udara yang dipompa ke balon balon makin membesar. Pembesaran tersebut merupakan dilatasi sebuah benda. Perhatikan dilatasi beberapa objek pada gambar berikut.



Gambar 10.22 Dilatasi titik, bidang dan kurva pada koordinat kartesius.

Berdasarkan gambar di atas, bentuk suatu objek bila dilatasi tidak akan berubah, bukan? Tetapi bagaimana dengan ukurannya? Ukuran objek yang didilatasi akan berubah. Perhatikan sifat-sifat dilatasi berikut.

Perhatikan sifat-sifat dilatasi berikut.

Sifat 10.7

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $k > 1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Sifat 10.8

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $k = 1$ maka bangun tidak mengalami perubahan ukuran dan letak.

Sifat 10.9

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $0 < k < 1$ maka bangun akan diperkecil dan terletak searah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Sifat 10.10

Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $-1 < k < 0$ maka bangun akan diperkecil dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

Sifat 10.11

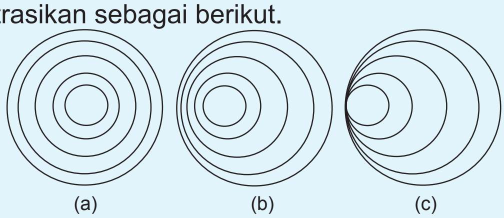
Bangun yang diperbesar atau diperkecil (dilatasi) dengan skala k dapat mengubah ukuran atau tetap ukurannya tetapi tidak mengubah bentuk. Jika $k < -1$ maka bangun akan diperbesar dan terletak berlawanan arah terhadap pusat dilatasi dengan bangun semula.

4.2 Menemukan Konsep Dilatasi

Masalah-10.4

Pernahkah kamu melihat gelombang di permukaan air yang tenang. Coba kamu isi air pada ember dengan permukaan berbentuk lingkaran kemudian biarkan sejenak agar permukaan air tidak beriak atau tenang. Kemudian, coba kamu jatuhkan setetes air ke permukaan air yang tenang tersebut. Pengamatan apa yang kamu peroleh?

Tentu kamu melihat ada gelombang di permukaan air. Misalkan gelombang air tersebut kita ilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 10.23 Bentuk gelombang pada permukaan air

Gambar 10.23 *a* terjadi jika kamu jatuhkan setetes air di tengah permukaan air tersebut. Coba kamu lakukan sebuah percobaan tersebut di sekolah atau di rumah. Gambar 10.23 *b* terjadi jika kamu menjatuhkan air di permukaan di luar titik pusatnya. Jika demikian, dapatkah kamu berikan komentar, di manakah dijatuhkan setetes air pada permukaan air agar terbentuk pola gelombang air pada gambar 10.23 *c*? Kamu dapat melakukan pengamatan pada beberapa percobaan sederhana di rumahmu.

Mari kita lakukan kembali pengamatan pada gambar 10.23 *a*, 10.23 *b*, 10.23 *c* di atas. Berdasarkan gambar tersebut, gelombang diperbesar atau diperkecil bergantung kepada sebuah faktor pengali. Perhatikan kembali sifat-sifat dilatasi. Perhatikan kembali gambar tersebut, bentuk dilatasi gelombang tersebut juga bergantung pada pusat dilatasi. Dengan demikian, kita akan mempelajari kasus ini kembali untuk membangun konsep dilatasi. Ingat kembali materi dilatasi pada pokok bahasan transformasi di saat kamu di kelas VII.

Mari kita angkat kembali permasalahan dilatasi bangun tersebut. Amatilah perkalian bangun pada koordinat kartesius berikut.

Contoh 10.12

Sketsalah dilatasi titik berikut:

Titik A(1, 3) dengan skala 2 dan pusat O(0, 0)

Titik B(3, 2) dengan skala 3 dan pusat O(0, 0)

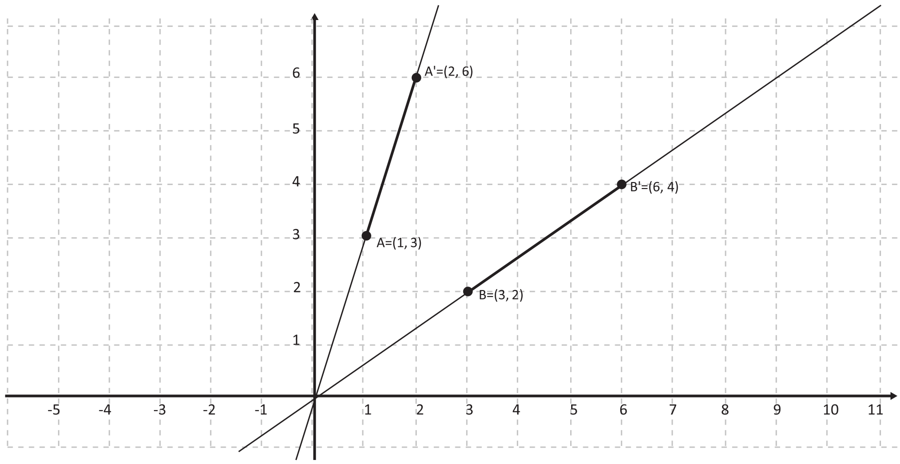
Alternatif Penyelesaian

Langkah 1 : Letakkanlah titik A atau titik B pada bidang koordinat Kartesius

Langkah 2 : Tariklah sebuah garis lurus yang menghubungkan titik A atau titik B ke titik pusat dilatasi.

Langkah 3 : Tentukanlah titik A' atau B' yang jaraknya 2 kali dari titik A atau titik B dengan pusat dilatasi.

Langkah 4 : Titik tersebut adalah dilatasi titik A dengan faktor skala 2 dan pusat dilatasi.



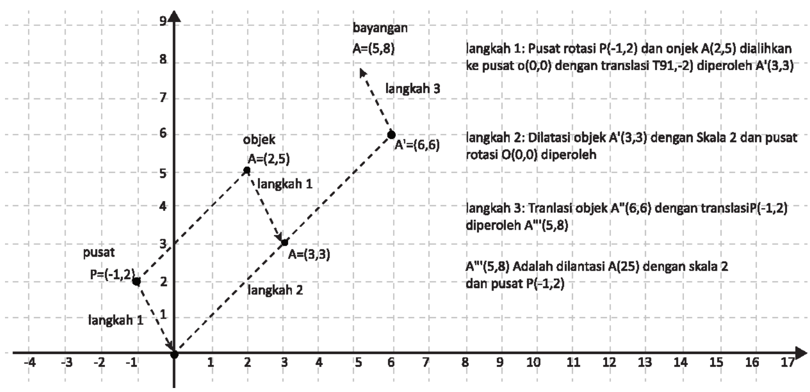
Gambar 10.24 Dilatasi dua buah titik dengan pusat O(0, 0)

Dengan demikian bayangan titik A atau B oleh didilatasi dengan faktor skala 2 dengan pusat O(0, 0) adalah A'(2, 6) atau B'(6, 4).

Contoh 10.13

Sketsalah dilatasi titik A(2, 5) dengan pusat P(-1, 2) dan skala 2

Perhatikan sketsa dilatasi titik di atas.



Gambar 10.25 Dilatasi titik A(2, 5) dengan pusat P(-1, 2)

Agar proses dilatasi titik dengan pusat P(p, q) dan skala k dapat dengan mudah diproses maka perlu dialihkan ke dilatasi dengan pusat O(0, 0), yaitu dengan melakukan translasi T(-p, -q), hasil dilatasi akan ditranslasikan kembali dengan translasi P(p, q). Dengan demikian, proses dilatasi adalah:

Langkah 1. Translasikan pusat P(p, q) dan objek A(a, b) dengan translasi T(-p, -q).

Diperoleh: $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix}$

Langkah 2. Dilatasikan A'($a - p$, $b - q$) dengan skala k dan pusat O(0, 0)

Diperoleh: $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix}$

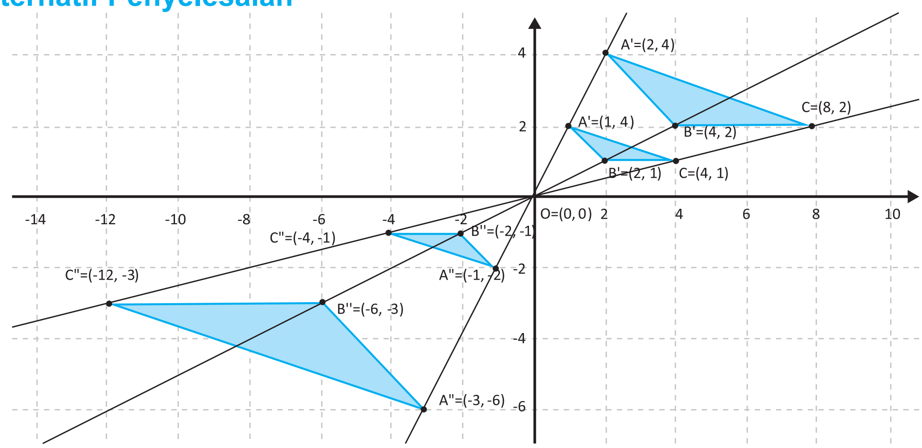
Langkah 3. Translasikan A" dengan P(p, q)

Diperoleh: $\begin{pmatrix} a''' \\ b''' \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a-p \\ b-q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

Contoh 10.14

Sebuah segitiga ABC, dengan A(1, 2), B(2, 1) dan C(4, 1) didilatasi dengan faktor skala k = 2, k = -1, dan k = -3 serta pusat O(0, 0) sehingga diperoleh berturut-turut segitiga A'B'C', A"B"C", dan A'"B'"C'"

Alternatif Penyelesaian



Gambar 10.26 Dilatasi bidang pada pusat O(0, 0) dan faktor berbeda

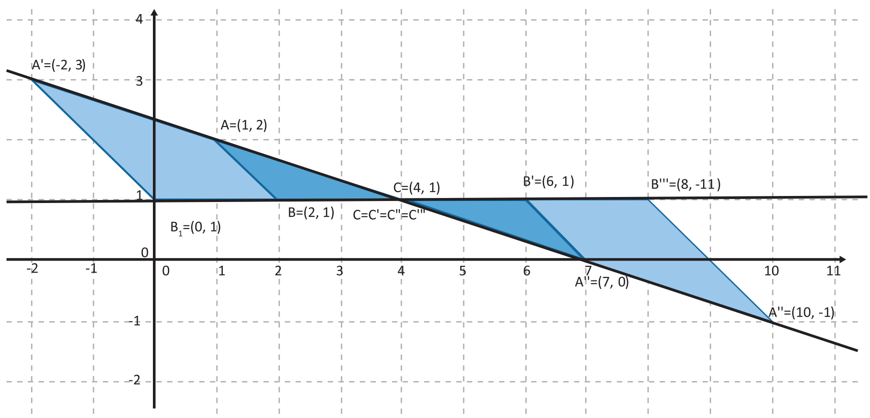
Perhatikan tabel berikut.

Tabel 10.10 Dilatasi bidang ABC pada pusat O(0,0) dan faktor berbeda

Titik Obyek	$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	**Faktor skala**
Pusat	$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	$O\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$	
Titik Bayangan 1	$A'\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B'\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C'\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = 2
Titik Bayangan 2	$A''\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B''\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C''\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = -1
Titik Bayangan 3	$A'''\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B'''\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C'''\begin{pmatrix}-12\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = -3

Contoh 10.15

Sebuah segitiga ABC, dengan A(1, 2), B(2, 1) dan C(4, 1) didilatasi dengan faktor skala $k = a$, $k = b$, dan $k = c$ serta pusat C(4, 1) sehingga diperoleh berturut-turut segitiga A'B'C', A"B"C", dan A'''B'''C'''



Gambar 10.27 Dilatasi sebuah bidang dengan pusat pada salah satu titik pojoknya

Perhatikan tabel berikut.

Tabel 10.11 Dilatasi bidang ABC pada pusat P(4, 1) dan faktor berbeda

Titik Obyek	$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	Faktor skala
Pusat	$C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	$C\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	
Titik Bayangan 1	$A'\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B'\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C'\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = 2
Titik Bayangan 2	$A''\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B''\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C''\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = -1
Titik Bayangan 3	$A'''\begin{pmatrix}-3\\-6\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$B'''\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$	$C'''\begin{pmatrix}-12\\-3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$	k = -3

1. Dilatasi dengan pusat O(0, 0) dan faktor skala k

   $$A(a,b)\xrightarrow{D_{[O,k]}}A'(a',b')$$

   $$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

2. Dilatasi dengan pusat $P(p, q)$ dan faktor skala k

   $$A(a,b)\xrightarrow{D_{[P(p,q)\,k]}}A'(a',b')$$

   $$\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a-p\\b-q\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$$

Contoh 10.16

Sebuah garis g: $2x-3y-6=0$ didilatasikan dengan faktor $k = 3$ dan pusat dilatasi pada titik $P(1,-2)$. Tentukanlah bayangannya.

Alternatif Penyelesaian.

Misalkan titik $A(x, y)$ adalah sembarang titik pada garis yang akan didilatasikan, sehingga:

$$A(x, y) \xrightarrow{D[P(1,-2)\ 3]} A'(x', y')$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x-2 \\ 3y+4 \end{pmatrix}$$

sehingga $x' = 3x - 2$ atau $x = \dfrac{x'+2}{3}$ dan $y' = 3y + 4$ atau $y = \dfrac{y'-4}{3}$

sehingga bayangan garis $2x - 3y - 6 = 0$ adalah $2(\dfrac{x+2}{3}) - 3(\dfrac{y-4}{3}) - 6 = 0$ atau $2x - 3y - 2 = 0$.

Uji Kompetensi 10.2

1. Tunjukkanlah secara gambar perputaran dari beberapa titik berikut!
   a. Titik $A(2, -3)$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   b. Titik $A(2, -3)$ dirotasi sebesar -90^0 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   c. Titik $A(-3, 4)$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi P(-1, 1).
   d. Titik $A(-3, 4)$ dirotasi sebesar -180^0 dengan pusat rotasi P(-1, 1).
   e. Titik $A(1, 2)$ bila dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi O(0, 0) kemudian dilanjutkan dengan rotasi sebesar -270^0 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   f. Titik$A(-1, 3)$ bila dirotasi sebesar -90^0 dengan pusat rotasi P(1, 2) kemudian dilanjutkan dengan rotasi sebesar 180^0 dengan pusat rotasi Q(-1, 1).
   g. Segitiga *PQR* dengan koordinat *P*(2, 0), *Q*(–3, 3) dan *R*(8, 0) bila dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi salah satu titik pojoknya.

2. Tentukanlah persamaan kurva oleh rotasi R berikut!
   a. Garis lurus $2x-3y+4=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   b. Garis lurus $2x-3y+4=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi P(1, -1).
   c. Parabola $y-x^2-3x+4=0$ dirotasi sebesar 180^0 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   d. Parabola $y-x^2-3x+4=0$ dirotasi sebesar 270^0 dengan pusat rotasi pada titik puncaknya.
   e. Lingkaran $x^2+y^2-2x-4x-20=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi pada titik O(0, 0).
   f. Lingkaran $x^2+y^2-2x-4x-20=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi pada titik P(6, 3).
   g. Lingkaran $x^2+y^2-2x-4x-20=0$ dirotasi sebesar 90^0 dengan pusat rotasi pada titik P(8, 1).
3. Tunjukkanlah secara gambar dilatasi dari beberapa titik berikut!
   a. Titik $A(2, -3)$ bila didilatasikan dengan skala 2 dan pusat P(0, 0).
   b. Titik $A(-3, 4)$ bila didilatasikan dengan skala -2 dan pusat P(0, 0).
   c. Titik $A(1, 2)$ bila didilatasikan dengan skala 2 dan pusat P(0, 0) dilanjutkan dengan dilatasi dengan skala -3 dan pusat P(0, 0).
   d. Titik $A(-3, 4)$ bila didilatasikan dengan skala -2 dan pusat P(1, -1).
   e. Titik $A(2, -3)$ bila didilatasikan dengan skala 2 dan pusat P(-2, 0).
   f. Titik $A(2, -3)$ bila didilatasikan dengan skala 2 dan pusat P(-1, 1) dilanjutkan dengan dilatasi dengan skala -1 dan pusat P(2, -1).
   g. Segitiga *PQR* dengan koordinat $P(2, 0)$, $Q(-3, 3)$ dan $R(8, 0)$ bila didilatasikan dengan faktor skala 2 dengan pusat P(0, 0).
   h. Segitiga PQR dengan koordinat $P(2, 0)$, $Q(-3, 3)$ dan $R(8, 0)$ bila didilatasikan dengan faktor skala -3 dengan pusat P(1, 1).

4. Tentukanlah persamaan kurva oleh Dilatasi D berikut!
   a. Parabola $y - x^2 - x^3 + 4 = 0$ didilatasi dengan faktor skala 2 dengan pusat rotasi O(0, 0).
   b. Parabola $y - x^2 - x^3 + 4 = 0$ didilatasi dengan faktor skala -2 dengan pusat rotasi pada titik puncaknya.
   c. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4x - 20 = 0$ didilatasi dengan faktor skala 1/2 dengan pusat rotasi pada titik O(0, 0).
   d. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4x - 20 = 0$ didilatasi dengan faktor skala -1 dengan pusat rotasi pada titik P(1,-5).
   e. Lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4x - 20 = 0$ didilatasi dengan faktor skala -1 dan pusat P(0,0) dilanjutkan dilatasi dengan faktor skala -1 dengan pusat rotasi pada titik P(1,5).

D. PENUTUP

Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep transoformasi di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut.

1. Translasi atau pergeseran adalah suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada sebuah bidang berdasarkan jarak dan arah tertentu. Misalkan *x, y, a*, dan *b* adalah bilangan real, translasi titik A (x, y) dengan T (a, b) adalah menggeser absis x sejauh a dan menggeser ordinat y sejauh b, sedemikian hingga diperoleh

   A′$(x + a, y + b)$, secara notasi dilambangkan dengan: $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}} A'\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$

2. Refleksi atau pencerminan adalah satu jenis transformasi yang memindahkan setiap titik pada suatu bidang dengan mengggunakan sifat bayangan cermin dari titik-titik yang dipindahkan.

   a. Pencerminan titik A(a, b) terhadap titik asal (0, 0) $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{O(0,0)}} A'\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ dengan $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

   b. Pencerminan titik A (a, b) terhadap sumbu $x = h$ didefinisikan dengan:

   $A(a, b) \xrightarrow{C_{x=h}} A'(2h - a, b)$, sedangkan pencerminan titik A (a, b) terhadap sumbu $y = k$ didefinisikan dengan: $A(a, b) \xrightarrow{C_{y=k}} A'(a, 2k - b)$

c. $A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{C_{sumbu\ x}} A'\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$ dengan $\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

d. Pencerminan titik A (a, b) terhadap sumbu x

e. Pencerminan A(a, b) terhadap garis $y = x$ dengan $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

3. Rotasi atau perputaran adalah transformasi yang memindahkan suatu titik ke titik lain dengan perputaran terhadap titik pusat tertentu. Rotasi terhadap titik O(0, 0) sebesar 90^0 dirumuskan dengan: $A(a,b) \xrightarrow{R_{[O(0,0),90^0]}} A'(-b, a)$.

4. Dilatasi atau perubahan skala adalah suatu transformasi yang memperbesar atau memperkecil bangun tetapi tidak mengubah bentuk. Dilatasi dengan pusat O(0, 0) dan faktor skala k dirumuskan dengan $A(a,b) \xrightarrow{D_{[O,k]}} A'(ka,kb),$: sedangkan dilatasi dengan pusat $P(p, q)$ dan faktor skala k dirumuskan dengan: $A(a,b) \xrightarrow{D_{[P(p,q),k]}} A'[p + k(a-p), q + k(b-q)]$.

Catatan:

Bab 11

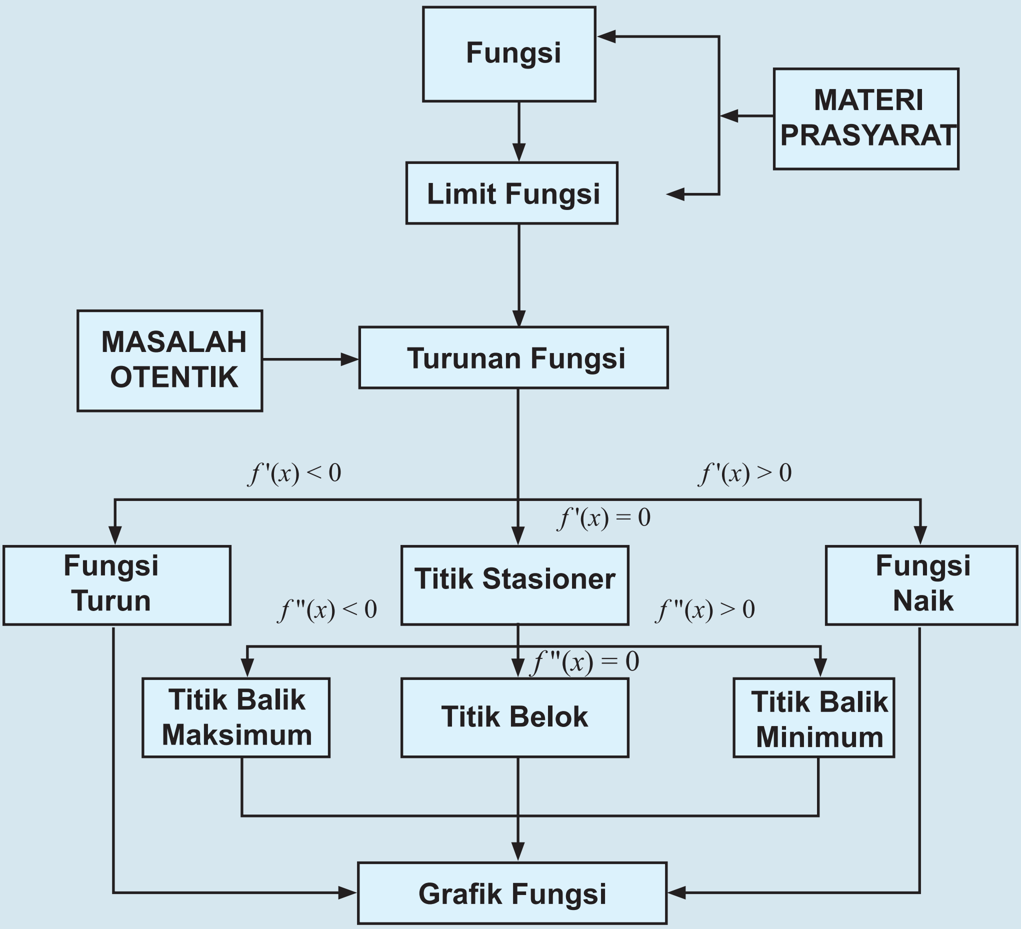
TURUNAN

A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran turunan siswa mampu: 1. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 2. Mendeskripsikan konsep turunan dengan menggunakan konteks matematik atau konteks lain dan menerapkannya. 3. Menurunkan aturan dan sifat turunan fungsi aljabar dari aturan dan sifat limit fungsi. 4. Mendeskripsikan konsep turunan dan menggunakannya untuk menganalisis grafik fungsi dan menguji sifat-sifat yang dimiliki untuk mengetahui fungsi naik dan fungsi turun. 5. Menerapkan konsep dan sifat turunan fungsi untuk menentukan gradien garis singgung kurva, garis tangen, dan garis normal. 6. Mendeskripsikan konsep dan sifat turunan fungsi terkait dan menerapkannya untuk menentukan titik stasioner (titik maksimum, titik minimum dan titik belok).	Melalui pembelajaran materi turunan, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Terlatih berpikir kritis, kreatif dalam menganalisis permasalahan. • Bekerjasama dalam tim dalam menemukan solusi permaslahan melalui pengamatan, diskusi, dan menghargai pendapat dalam saling memberikan argumen. • Terlatih melakukan penelitian dasar terhadap penemuan konsep. • Mengkomunikasikan karakteristik masalah otentik yang pemecahannya terkait turunan. • Merancang model matematika dari sebuah permasalahan otentik yang berkaitan dengan turunan.

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran turunan siswa mampu: 7. Menganalisis bentuk model matematika berupa persamaan fungsi, serta menerapkan konsep dan sifat turunan fungsi dalam memecahkan masalah maksimum dan minimum. 8. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata tentang turunan fungsi aljabar. 9. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika dalam memecahkan masalah nyata tentang fungsi naik dan fungsi turun. 10 Merancang dan mengajukan masalah nyata serta menggunakan konsep dan sifat turunan fungsi terkait dalam titik stasioner (titik maksimum, titik minimum dan titik belok). 11.Menyajikan data dari situasi nyata, memilih variabel dan mengkomunikasikannya dalam bentuk model matematika berupa persamaan fungsi, serta menerapkan konsep dan sifat turunan fungsi dalam memecahkan masalah maksimum dan minimum.	Melalui pembelajaran materi turunan, siswa memperoleh pengalaman belajar: • Menyelesaikan model matematika untukmenganalisis dan mendapatkan solusi permasalahan yang diberikan. • Menuliskan dengan kata-katanya sendiri konsep turunan berdasarkan ciri-ciri yang dituliskan sebelumnya. • Membuktikan sifat-sifat dan aturan matematika yang berkaitan dengan turunan berdasarkan konsep yang sudah dimiliki. • Menerapkan berbagai sifat turunan dalam pemecahan masalah.

B. PETA KONSEP



B. PETA KONSEP

1. Menemukan Konsep Turunan Suatu Fungsi

Turunan merupakan salah satu dasar atau fundasi dalam analisis sehingga penguasaan kamu terhadap berbagai konsep dan prinsip turunan fungsi membantu kamu memecahkan suatu permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Suatu fungsi dapat dianalisis berdasarkan ide naik/turun, keoptimalan dan titik beloknya dengan menggunakan konsep turunan. Pada bagian berikut, kita akan mencoba mengamati berbagai permasalahan nyata dan mempelajari beberapa kasus dan contoh untuk menemukan konsep turunan. Kita memulainya dengan menemukan konsep persamaan garis tangen/singgung.

1.1 Menemukan Konsep Garis Sekan dan Garis Tangen

Coba kamu amati dan cermati berbagai masalah nyata yang diajukan, bermanfaat sebagai sumber abstraksi kita dalam menemukan konsep dan hubungan antara garis sekan atau tali busur dan garis singgung.

Masalah-11.1

Seorang pemain ski meluncur kencang di permukaan es yang bergelombang. Dia meluncur turun kemudian naik mengikuti lekukan permukaan es sehingga di suatu saat, dia melayang ke udara dan turun kembali ke permukaan. Perhatikan gambar di bawah ini.

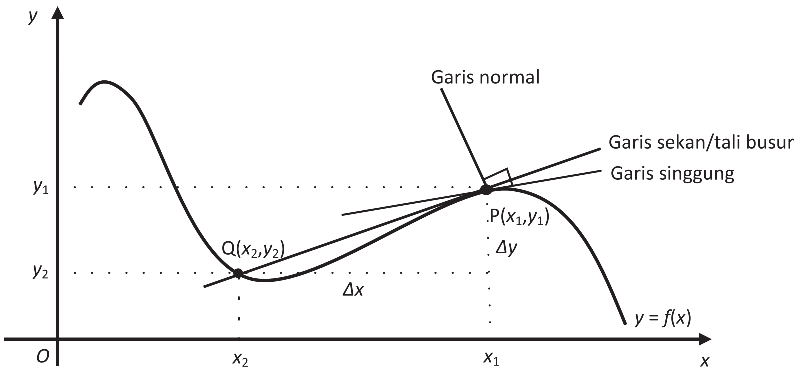
Gambar 11.1 Bermain ski

Permasalahan

Secara analitik, misalkan bahwa bukit es disketsa pada bidang (dimensi dua) dengan sudut pandang tegak lurus ke depan sehingga terdapat garis dan papan ski adalah sebuah garis lurus. Dapatkah kamu tunjukkan hubungan kedua garis tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Coba kamu amati gambar di bawah ini. Misalkan deskripsi permasalahan di atas ditampilkan dalam bentuk gambar berikut.



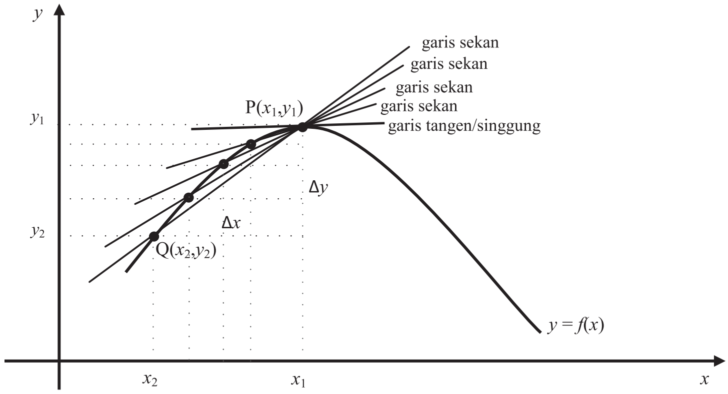
Gambar 11.2 Garis sekan, garis singgung, dan garis normal

Posisi tegak pemain terhadap papan ski adalah sebuah garis yang disebut garis normal. Papan ski yang menyinggung permukaan bukit es di saat melayang ke udara adalah sebuah garis yang menyinggung kurva disebut garis singgung. Jadi, garis singgung tegak lurus dengan garis normal. Tujuan kita adalah mendapatkan persamaan garis singgung (PGS).

Misalkan pemain ski mulai bergerak dari titik $Q(x_2, y_2)$ dan melayang ke udara pada saat titik $P(x_1, y_1)$ sehingga ia akan bergerak dari titik Q mendekati titik P. *Garis yang menghubungkan kedua titik disebut garis tali busur atau garis sekan.* Sepanjang pergerakan tersebut, terdapat banyak garis sekan yang dapat dibentuk dari titik Q menuju titik P dengan gradien awal $m_{\sec} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Coba kamu amati proses matematis berikut. Misalkan $x_2 = x_1 + \Delta x$ dan $y_2 = y_1 + \Delta y$ sehingga: jika Δx makin kecil maka Q akan bergerak mendekati P atau jika $\Delta x \to 0$ maka $Q \to P$.

Perhatikan gambar!



Gambar 11.3 Gradien garis sekan mendekati gradien garis singgung

Karena $y = f(x)$ maka gradien garis sekan PQ adalah

$$m_{PQ} = m_{\sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$$m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{(x_1 + \Delta x) - x_1} \Leftrightarrow m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Definisi 11.1

Misalkan $f : R \rightarrow R$ adalah fungsi kontinu dan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan menghubungkan titik P dan Q dengan gradien

$$m_{\sec} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Amati kembali gambar di atas. Jika titik Q mendekati P maka $\Delta x \rightarrow 0$ sehingga diperoleh garis singgung di titik P dengan gradien:

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (\text{jika limitnya ada}).$$

Definisi 11.2

Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva f. Gradien garis singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah limit gradien garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis:

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} m_{\sec} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (\text{Jika limitnya ada})$$

Contoh 11.1

Tentukanlah persamaan garis singgung di titik dengan absis $x = -1$ pada kurva $f(x) = x^4$.

Alternatif Penyelesaian.

Misalkan $x_1 = -1$ dan $y_1 = (-1)^4 = 1$ sehingga titik singgung $P(-1,1)$. Jadi, gradien garis singgung adalah: $m_{PGS} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

$$m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-1 + \Delta x)^4 - (-1)^4}{\Delta x}$$

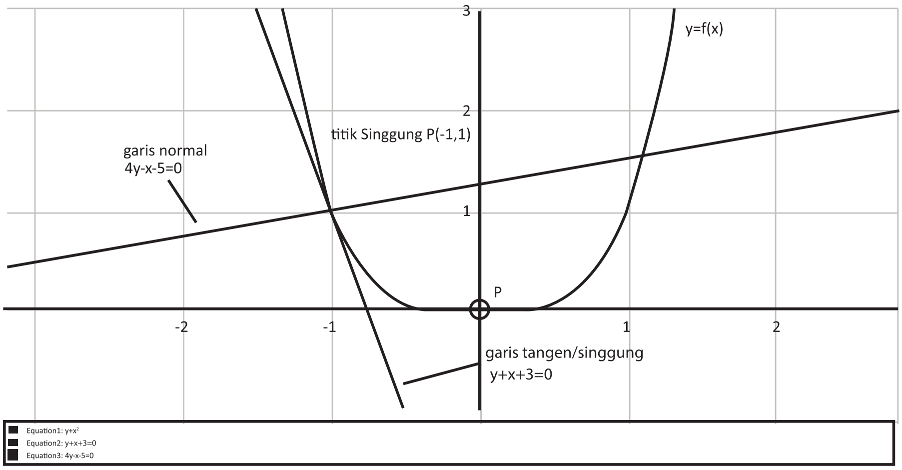
$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + (-1)^2][(-1 + \Delta x)^2 - (-1)^2]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + (-1)^2][(-1 + \Delta x) + (-1)][(-1 + \Delta x) - (-1)]}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(-1 + \Delta x)^2 + 1][-2 + \Delta x]\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow m_{PGS} = \lim_{\Delta x \to 0} [(-1 + \Delta x)^2 + 1][-2 + \Delta x] = -4$$

Jadi, persamaan garis singgung adalah $y - 1 = -4(x - (-1))$ atau $y + 4x + 3 = 0$. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 11.4 Garis singgung dan garis normal kurva $f(x) = x^4$ di titik P(-1,1)

1.2 Turunan sebagai Limit Fungsi

Kita telah menemukan konsep garis singgung grafik suatu fungsi dan hubungannya dengan garis sekan dan garis normal. Berikutnya, kita akan mempelajari lebih dalam lagi konsep garis singgung grafik suatu fungsi tersebut untuk mendapatkan konsep turunan.

Coba kamu perhatikan dan amati kembali sketsa kurva pada Gambar 11.3. Dengan memisalkan $x_2 = x_1 + \Delta x$ dan $y_2 = y_1 + \Delta y$ maka titik Q akan bergerak mendekati P untuk Δx makin kecil. Gradien garis singgung di titik P disebut turunan fungsi pada titik P yang disimbolkan dengan:

$$m_{\tan} = f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \ (\text{jika limitnya ada}).$$

Jika f kontinu maka titik P dapat berada di sepanjang kurva sehingga turunan suatu fungsi pada setiap x dalam daerah asal adalah:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ (\text{jika limitnya ada}).$$

Perlu diinformasikan, penulisan simbol turunan dapat berbeda-beda. Beberapa simbol turunan yang sering dituliskan adalah:

Notasi Newton

- $f'(x)$ atau y' turunan pertama fungsi

Notasi Leibniz

- $\dfrac{df(x)}{dx}$ atau $\dfrac{dy}{dx}$ turunan pertama fungsi

Definisi 11.3

Misalkan fungsi $f : S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x)$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

Definisi 11.4

Misalkan $f : S \to R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan di setiap titik c di S.

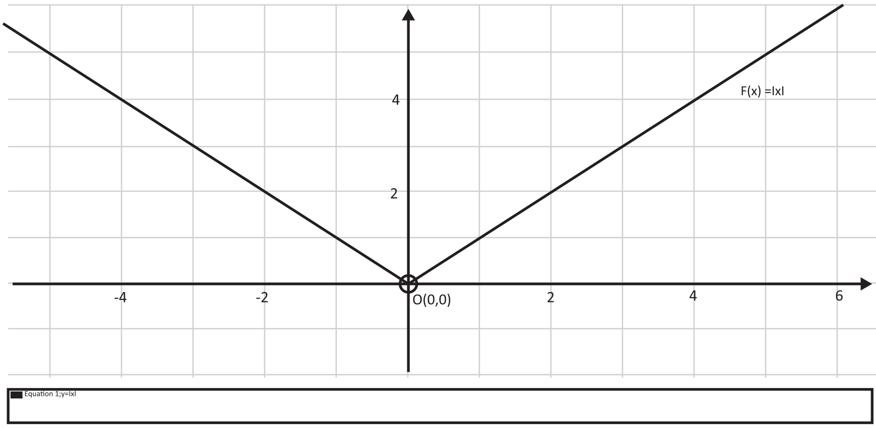
Masalah-11.2

Seekor burung camar terbang melayang di udara dan melihat seekor ikan di permukaan laut. Burung tersebut terbang menukik dan menyambar ikan kemudian langsung terbang ke udara. Lintasan burung mengikuti pola fungsi $f(x) = |x|$. Dapatkah kamu sketsa grafik tersebut. Coba amati dan teliti dengan cermat turunan fungsi tersebut pada titik O(0,0).

Alternatif Penyelesaian

Ingat kembali pelajaran nilai mutlak pada bab 2 kelas X

Misalkan posisi ikan di permukaan laut adalah titik O(0,0) sehingga sketsa permasalahan di atas adalah sebagai berikut (ingat cara meng-gambar kurva $f(x) = |x|$ di kelas X):



Gambar 11.5 Kurva fungsi $f(x) = |x|$

Berdasarkan konsep turunan di atas maka $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ bila limitnya ada.

i. Jika $x \geq 0$ maka $f(x) = x$ sehingga:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1 \text{ (limit kanan ada).}$$

ii. Jika $x < 0$ maka $f(x) = -x$ sehingga:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(x+\Delta x)-(-x)}{\Delta x}=-1 \text{ (limit kiri ada).}$$

Coba kamu amati proses tersebut, jika Δx menuju 0 didekati dari kanan dan Δx menuju 0 didekati dari kiri, maka $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ tidak sama, bukan? Hal ini mengakibatkan turunan fungsi $f(x) = |x|$ di titik $x = 0$ tidak ada atau fungsi tidak dapat diturunkan di $x = 0$.

Definisi 11.5

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x) \subseteq S$

- Fungsi f memiliki turunan kanan pada titik c jika dan hanya jika

  $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ ada.

- Fungsi f memiliki turunan kiri pada titik c jika dan hanya jika

  $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$ ada.

Berdasarkan pembahasan Masalah 11-2 di atas, suatu fungsi akan dapat diturunkan pada suatu titik jika memenuhi sifat berikut.

Sifat 11.1

Misalkan fungsi $f: S \to R$, $S \subseteq R$ dengan $x \subseteq S$ dan $L \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik x jika dan hanya jika turunan kiri sama dengan turunan kanan, ditulis:

$$f'(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = L$$

Keterangan:

1. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kanan pada domain S.
2. $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ adalah turunan fungsi f di titik x yang didekati dari kiri pada domain S.

Contoh 11.2

Tentukan turunan fungsi $y = \sqrt{2x}$

Alternatif Penyelesaian

Jika $f(x) = \sqrt{2x}$

$$\text{maka } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x + 2\Delta x} - \sqrt{2x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x + 2\Delta x} - \sqrt{2x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{2x + 2\Delta x} + \sqrt{2x}}{\sqrt{2x + 2\Delta x} + \sqrt{2x}} \quad \text{(ingat perkalian sekawan)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x(\sqrt{2x + 2\Delta x} + \sqrt{2x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\sqrt{2x + 2\Delta x} + \sqrt{2x}}$$

1.3 Turunan Fungsi Aljabar

Mari kita temukan aturan-aturan turunan suatu fungsi berdasarkan limit fungsi yang telah dijelaskan di atas. Coba pelajari permasalahan berikut.

Masalah-11.3

Pada subbab di atas, telah dijelaskan bahwa turunan merupakan limit suatu fungsi, yaitu: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Coba kamu amati dan pelajari beberapa contoh penurunan beberapa fungsi berikut dengan konsep limit fungsi:

Contoh 11.3

$$\text{Jika } f(x) = x^2 \text{ maka } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

$$= 2x$$

Contoh 11.4

Jika $f(x) = x^4$

$$\begin{aligned}
\text{maka } f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^4 + 4x^3\Delta x + 6x^2(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\right)\Delta x}{\Delta x} \\
&= 4x^3
\end{aligned}$$

Contoh 11.5

$$\begin{aligned}
\text{Jika } f(x) = x^{100} \text{ maka } f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{100} - x^{100}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{?}{\Delta x} \\
&= \ldots ?
\end{aligned}$$

(dengan menjabarkan; proses semakin sulit, bukan?)

Contoh 11.6

$$\text{Jika } f(x) = x^{\frac{3}{5}} \text{ maka } f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\frac{3}{5}} - x^{\frac{3}{5}}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{?}{\Delta x}$$

$$= \ldots ?$$

(dengan menjabarkan; proses juga semakin sulit, bukan?)

Dari keempat contoh di atas, kesimpulan apa yang kamu peroleh? Jelas, kita kesulitan dan harus mempunyai banyak strategi aljabar untuk melanjutkan proses pada Contoh 11.5 dan 11.6. Bentuk suatu fungsi beragam sehingga penurunannya dengan menggunakan limit fungsi akan ada yang sederhana diturunkan dan ada yang sangat sulit diturunkan. Kita harus mempermudah proses penurunan suatu fungsi dengan menemukan aturan-aturan penurunan.

1.3.1 Menemukan turunan fungsi $f(x) = ax^n$, untuk n bilangan asli.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x+\Delta x)^n - ax^n}{\Delta x} \quad (\text{Gunakan Binomial Newton})$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ax^n + anx^{n-1}\Delta x + aC_2^n x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + a\Delta x^n - ax^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(anx^{n-1} + aC_2^n x^{n-2}\Delta x + \ldots + a\Delta x^{n-1})}{\Delta x}$$

$$= anx^{n-1}$$

- Coba kamu buktikan sendiri jika $f(x) = au(x)$ dan $u'(x)$ ada, maka $f'(x) = au'(x)$

1.3.2 Menemukan turunan jumlah fungsi *f*(*x*) = *u*(*x*) + *v*(*x*) dengan *u′*(*x*) dan *v′*(*x*) ada.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]-[v(x+\Delta x)-v(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \\
&= \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} \\
&= u'(x)+v'(x) \quad \text{(Ingat Sifat 10.6 pada Bab 10 di kelas X)}
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama, buktikan sendiri bahwa turunan fungsi $f(x) = u(x) - v(x)$ adalah $f'(x) = u'(x) - v'(x)$

Contoh 11.7

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut!

a. $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Alternatif Penyelesaian

$f'(x) = 5.4x^{4-1} - 4.3x^{3-1} + 3.2x^{2-1} - 2.1x^{1-1} + 1.0x^{0-1}$

$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$

b. $f(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{4}} - \frac{2}{5}x^{\frac{1}{3}}$

Alternatif Penyelesaian

$$f'(x) = \frac{1}{3}.\frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} - \frac{2}{5}.\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{12}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{2}{15}x^{-\frac{2}{3}}$$

1.3.3 Menemukan turunan fungsi $f(x) = [u(x)]^n$ dengan $u'(x)$ ada, n bilangan asli.

Dengan konsep limit fungsi.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)]^n - [u(x)]^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x) - u(x) + u(x)]^n - [u(x)]^n}{\Delta x}$$

Misal $P = [u(x+\Delta x) - u(x)]$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[P + u(x)]^n - [u(x)]^n}{\Delta x} \quad \text{(Gunakan Binomial Newton)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P^n + C_1^n P^{n-1}[u(x)] + C_2^n P^{n-2}[u(x)]^2 + \ldots + C_{n-1}^n P[u(x)]^{n-1} + [u(x)]^n - [u(x)]^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P^n + nP^{n-1}[u(x)] + C_2^n P^{n-2}[u(x)]^2 + \ldots + C_{n-2}^n P^2[u(x)]^{n-2} + C_{n-1}^n P[u(x)]^{n-1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(P^{n-1} + nP^{n-2}[u(x)]^2 + \ldots + C_{n-2}^n P[u(x)]^{n-2} + C_{n-1}^n [u(x)]^{n-1})}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} (P^{n-1} + nP^{n-2}[u(x)]^2 + \ldots + C_{n-2}^n P[u(x)]^{n-2} + C_{n-1}^n [u(x)]^{n-1})$$

(Ingat Sifat 10.5 pada Bab X di kelas X)

Karena $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u'(x)$ (lihat Definisi 11.3)

$\lim_{\Delta x \to 0} P = \lim_{\Delta x \to 0} u(x+\Delta x) - u(x) = 0$

$$= u'(x)[0 + n[u(x)]^{n-1}$$

$$= nu'(x)[u(x)]^{n-1}$$

Aturan Turunan:

Misalkan *f*, *u*, *v* adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan di interval I, *a* bilangan real dapat diturunkan maka:

$f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$

$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = nax^{n-1}$

$f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$

$f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v(x)$

$f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Dengan menggunakan aturan turunan tersebut, gradien garis singgung suatu kurva akan lebih mudah ditentukan, bukan? Perhatikan contoh berikut!

Contoh 11.11

Tentukan persamaan garis singgung kurva $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ di titik $P(2, 4)$.

Alternatif Penyelesaian.

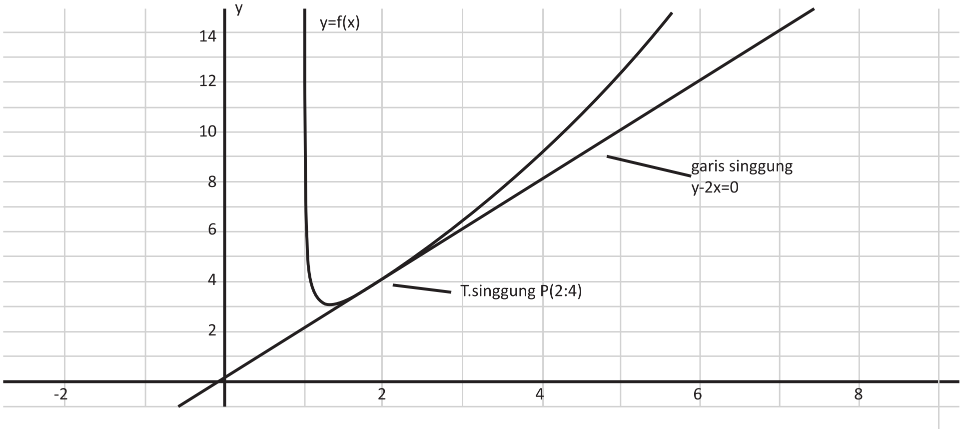
Titik $P(2, 4)$ berada pada kurva $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ sebab jika kita subtitusikan nilai $x = 2$ maka $f(2) = \frac{2^2}{\sqrt{2-1}} = 4$.

Pertama, kita tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ dengan memisalkan $u(x) = x^2$ sehingga $u'(x) = 2x$ dan $v(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{\frac{1}{2}}$ sehingga $v'(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}$

. Dengan demikian, turunan pertama fungsi adalah $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$ atau

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x-1} - \frac{x^2}{2}(x-1)^{-\frac{1}{2}}}{x-1}.$$

Gradien garis singgung kurva di titik $P(2, 4)$ adalah $f'(2) = \frac{4-2}{1} = 2$ sehingga persamaan garis singgung tersebut adalah $y - 4 = 2(x - 2)$ atau $y - 2x = 0$.



Gambar 11.5 Garis singgung kurva $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$ di titik P(2, 4).

Uji Kompetensi 11.1

1. Tentukanlah persamaan garis singgung di titik dengan absis $x = 1$ pada tiap-tiap fungsi berikut. Petunjuk: carilah gradien persamaan garis singgung dengan menggunakan limit fungsi.

   a. $f(x) = 2x$

   b. $f(x) = 2x^2$

   c. $f(x) = 2x^3 - 1$

   d. $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$

   e. $f(x) = \dfrac{2}{x^2}$

2. Misalkan $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $h(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan. Dengan menggunakan konsep turunan sebagai limit fungsi, tentukanlah turunan dari fungsi-fungsi berikut:

   a. $f(x) = (2x + 1)^2$

   b. $f(x) = (x^2 - x + 1)^2$

   c. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x+4}$

d. $f(x) = u(x)v(x)w(x)$

e. $f(x) = (h \circ g)(x)$

3. Dengan menggunakan konsep turunan, tentukanlah turunan dari fungsi-fungsi berikut.

   a. $f(x) = x^3(2x + 1)^5$

   b. $f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{4}}$

   c. $f(x) = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x)^{\frac{1}{4}}$

   d. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$

   e. $f(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

5. Tentukanlah persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(-1,1)$ pada masing-masing fungsi berikut. Petunjuk: carilah gradien persamaan garis singgung dengan menggunakan konsep turunan.

   a. $f(x) = (x + 2)^{-9}$

   b. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - 1}$

   c. $f(x) = -x^3(x + 2)^{-2}$

   d. $f(x) = -x\sqrt{2 - \sqrt{x+2}}$

   e. $f(x) = \frac{x+2}{2x^2 - 1}$

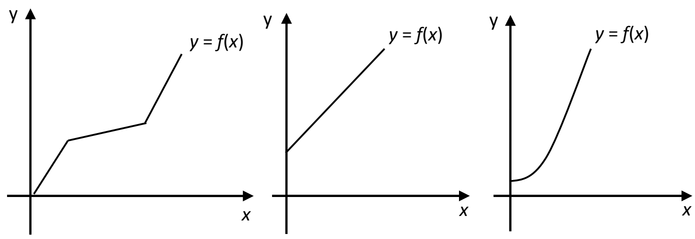
2. Aplikasi Turunan

Konsep turunan adalah subjek yang banyak berperan dalam aplikasi matematika di kehidupan sehari-hari di berbagai bidang. Konsep turunan digunakan untuk menentukan interval fungsi naik/turun, keoptimalan fungsi dan titik belok suatu kurva.

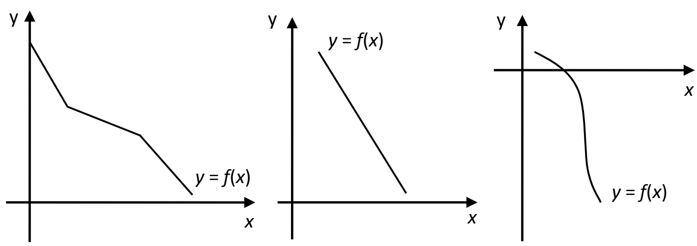
2.1 Fungsi Naik dan Turun

Coba bayangkan ketika kamu pergi ke plaza atau mall, di sana kita temukan ekskalator atau *lift*. Gerakan lift dan ekskalator saat naik dapat diilustrasikan sebagai fungsi naik. Demikian juga gerakan lift dan ekskalator saat turun dapat diilustrasikan sebagai fungsi turun. Amatilah beberapa grafik fungsi naik dan turun di bawah ini dan coba tuliskan ciri-ciri fungsi naik dan fungsi turun sebagai ide untuk mendefinisikan fungsi naik dan turun.

Beberapa grafik fungsi turun dari kiri ke kanan



Beberapa grafik fungsi naik dari kiri ke kanan



Dari beberapa contoh grafik fungsi naik dan turun di atas, mari kita definisikan fungsi naik dan turun sebagai berikut.

Definisi 11.5

Misalkan fungsi,
- Fungsi f dikatakan naik jika $\forall\, x_1, x_2 \in S,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Fungsi f dikatakan turun jika $\forall\, x_1, x_2 \in S,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Contoh 11.12

Tunjukkan grafik fungsi $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ adalah fungsi naik.

Alternatif Penyelesaian

$f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x > 0$ Ambil sebarang $x_1, x_2 \in R$ dengan $0 < x_1 < x_2$

$x = x_1 \Rightarrow f(x_1) = x_1^{\,3}$

$x = x_1 \Rightarrow f(x_2) = x_2^{\,3}$

Karena $0 < x_1 < x_2$ maka $x_1^{\,3} < x_2^{\,3}$

Karena $x_1^{\,3} < x_2^{\,3}$ maka $f(x_1) < f(x_2)$

Dengan demikian $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Dapat disimpulkan f adalah fungsi naik. Bagaimana jika $f(x) = x^3$, $x \in R$ dan $x < 0$, apakah grafik fungsi f adalah fungsi naik? Selidiki!

2.2 Aplikasi Turunan dalam Permasalahan Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Mari kita bahas aplikasi turunan dalam permasalahan fungsi naik dan fungsi turun dengan memperhatikan dan mengamati permasalahan berikut.

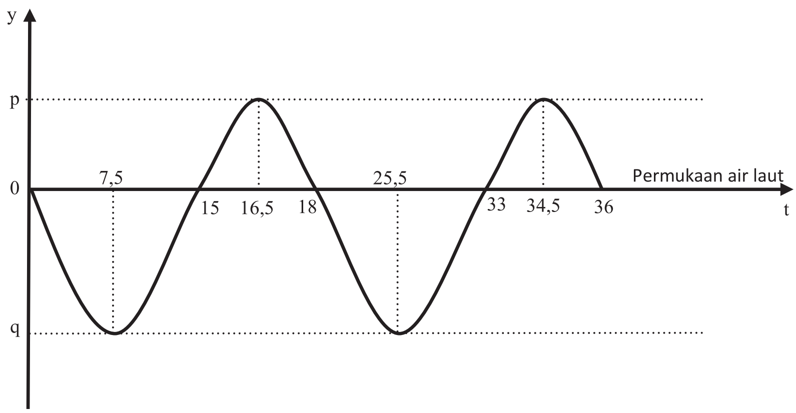
Masalah-11.4

Seorang nelayan melihat seekor lumba-lumba sedang berenang mengikuti kecepatan perahu mereka. Lumba-lumba tersebut berenang cepat, terkadang menyelam dan tiba-tiba melayang ke permukaan air laut. Pada saat nelayan tersebut melihat lumba-lumba menyelam maka ia akan melihatnya melayang ke permukaan 15 detik kemudian dan kembali ke permukaan air laut setelah 3 detik di udara. Demikan pergerakan lumba-lumba tersebut diamati berperiode dalam beberapa interval waktu pengamatan.

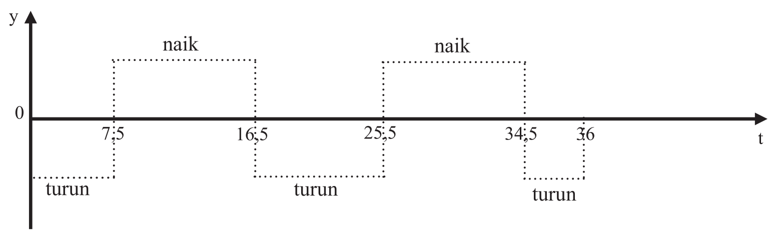
Permasalahan

Dari ilustrasi ini, dapatkah kamu sketsa pergerakan lumba-lumba tersebut dalam 2 periode? Ingat pengertian periode pada pelajaran trigonometri di kelas X. Dapatkah kamu tentukan pada interval waktu berapakah lumba-lumba tersebut bergerak naik atau turun? Dapatkah kamu temukan konsep fungsi naik/turun?

Alternatif Penyelesaian



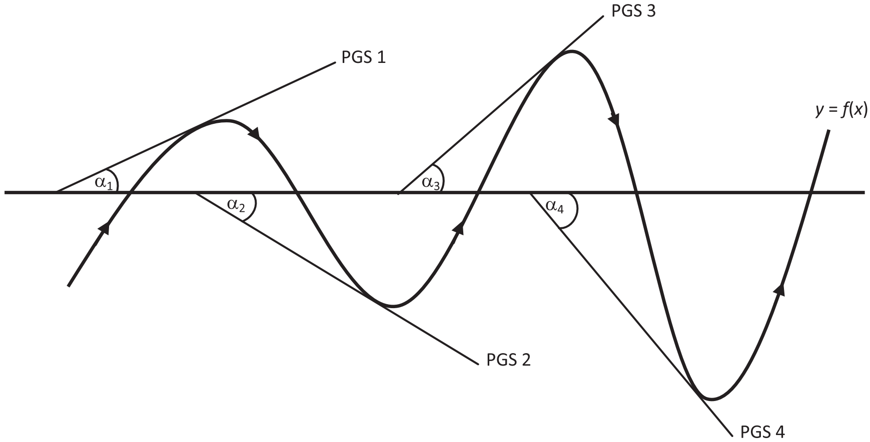
Gambar 11.7 Sketsa pergerakan lumba-lumba dalam pengamatan tertentu



Gambar 11.8 Sketsa pergerakan naik/turun lumba-lumba dalam pengamatan tertentu

Secara geometri pada sketsa di atas, lumba-lumba bergerak turun di interval $0 < t < 7{,}5$ atau $16{,}5 < t < 25{,}5$ atau $34{,}5 < t < 36$ dan disebut bergerak naik di interval $7{,}5 < t < 16{,}5$ atau $25{,}5 < t < 34{,}5$.

- Coba kamu amati beberapa garis singgung yang menyinggung kurva di saat fungsi naik atau turun di bawah ini. Garis singgung 1 dan 3 menyinggung kurva pada saat fungsi naik dan garis singgung 2 dan 4 menyinggung kurva pada saat fungsi turun.



Gambar 11.9 Garis singgung di interval fungsi naik/turun

Selanjutnya, mari kita bahas hubungan persamaan garis singgung dengan fungsi naik atau turun. Pada konsep persamaan garis lurus, gradien garis adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif. Pada persamaan garis singgung, gradien adalah tangen sudut garis tersebut dengan sumbu x positif sama dengan nilai turunan pertama fungsi di titik singgungnya. Pada gambar di atas, misalkan besar masing-masing sudut adalah $0^0 < \alpha_1 < 90^0$, $0^0 < \alpha_2 < 90^0$, $0^0 < \alpha_3 < 90^0$, $0^0 < \alpha_4 < 90^0$ sehingga nilai gradien atau tangen sudut setiap garis singgung ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 11.1 Hubungan gradien garis singgung dengan fungsi naik/turun

PGS	Sudut	Nilai tangen	Menyinggung di
PGS 1	α_1	$m = \tan(\alpha_1) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 2	$360^0 - \alpha_2$	$m = \tan(360^0 - \alpha_2) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun
PGS 3	α_3	$m = \tan(\alpha_3) = f'(x) > 0$	Fungsi Naik
PGS 4	$360^0 - \alpha_4$	$m = \tan(360^0 - \alpha_4) = f'(x) < 0$	Fungsi Turun

Coba kamu amati Gambar 11.9 dan Tabel 11.1! Apakah kamu melihat konsep fungsi naik/turun. Coba kamu perhatikan kesimpulan berikut:

- Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi naik maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran I. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah positif atau $m = f'(x) > 0$.

- Jika garis singgung menyinggung di grafik fungsi turun maka garis singgung akan membentuk sudut terhadap sumbu x positif di kuadran IV. Hal ini menyebabkan besar gradien adalah negatif atau $m = f'(x) < 0$.

Dengan demikian, dapat kita simpulkan bahwa fungsi $f(x)$ yang dapat diturunkan pada interval I, akan mempunyai kondisi sebagai berikut:

Tabel 11.2 Hubungan turunan pertama dengan fungsi naik/turun

No.	Nilai turunan pertama	Keterangan
1	$f'(x) > 0$	Fungsi selalu naik
2	$f'(x) < 0$	Fungsi selalu turun
3	$f'(x) \geq 0$	Fungsi tidak pernah turun
4	$f'(x) \leq 0$	Fungsi tidak pernah naik

Sifat 11.2

Misalkan f adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada setiap $x \in I$ maka

1. Jika $f'(x) > 0$ maka fungsi selalu naik pada interval I.
2. Jika $f'(x) < 0$ maka fungsi selalu turun pada interval I.
3. Jika $f'(x) \geq 0$ maka fungsi tidak pernah turun pada interval I.
4. Jika $f'(x) \leq 0$ maka fungsi tidak pernah naik pada interval I.

Konsep di atas dapat digunakan jika kita sudah memiliki fungsi yang akan dianalisis. Tetapi banyak kasus sehari-hari harus dimodelkan terlebih dahulu sebelum dianalisis. Perhatikan kembali permasalahan berikut!

Masalah-11.5

Tiga orang anak sedang berlomba melempar buah mangga di ketinggian 10 meter. Mereka berbaris menghadap pohon mangga sejauh 5 meter. Anak pertama akan melempar buah mangga tersebut kemudian akan dilanjutkan dengan anak kedua bila tidak mengenai sasaran. Lintasan lemparan setiap anak membentuk kurva parabola. Lemparan anak pertama mencapai ketinggian 9 meter dan batu jatuh 12 meter dari mereka. Lemparan anak kedua melintas di atas sasaran setinggi 5 meter. Anak ketiga berhasil mengenai sasaran. Tentu saja pemenangnya anak ketiga, bukan?

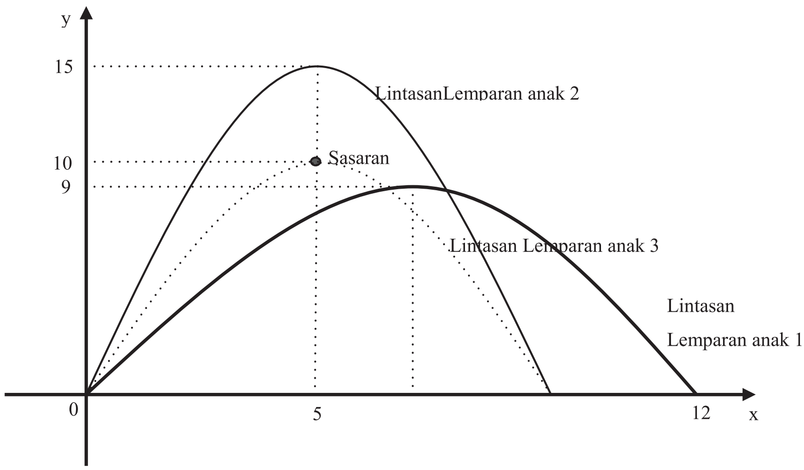
Permasalahan.

Dapatkah kamu mensketsa lintasan lemparan ketiga anak tersebut? Dapatkah kamu membuat model matematika lintasan lemparan? Dapatkah kamu menentukan interval jarak agar masing-masing lemparan naik atau turun berdasarkan konsep turunan?

Alternatif Penyelesaian

a. Sketsa Lintasan Lemparan

Permasalahan di atas dapat kita analisis setelah kita modelkan fungsinya. Misalkan posisi awal mereka melempar adalah posisi titik asal O(0,0) pada koordinat kartesius, sehingga sketsa permasalahan di atas adalah sebagai berikut.



Gambar 11.11 Sketsa lemparan 1, 2 dan 3

b. Model Lintasan Lemparan

Kamu masih ingat konsep fungsi kuadrat, bukan? Ingat kembali konsep fungsi kuadrat di kelas X Fungsi kuadrat yang melalui titik puncak $P(x_p, y_p)$ dan titik sembarang $P(x, y)$ adalah $y - y_p = a(x - x_p)^2$ sementara fungsi kuadrat yang melalui akar-akar x_1, x_2 dan titik sembarang $P(x, y)$ adalah $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, dengan $x_p = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ dan $a \neq 0$, a bilangan real. Jadi, model lintasan lemparan setiap anak tersebut adalah:

Lintasan lemparan anak pertama

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak $P_1(6,9)$.

$y = a(x - 0)(x - 12) \quad \Leftrightarrow 9 = a(6 - 0)(6 - 12)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow a = -0,25$

Fungsi lintasan lemparan anak pertama adalah $y = -0,25x^2 + 3x$.

Lintasan lemparan anak kedua

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak $P_2(5,15)$.

$y - 15 = a(x - 5)^2 \quad \Leftrightarrow 0 - 15 = a(0 - 5)^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow a = -0,6$

Fungsi lintasan lemparan anak kedua adalah $y = -0,6x^2 + 6x$.

Lintasan lemparan anak ketiga

Lintasan melalui titik O(0,0) dan puncak $P_3(5,10)$.

$y - 0 = a(x - 5)^2 \quad \Leftrightarrow 0 - 10 = a(0 - 5)^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow a = -0,4$

Fungsi lintasan lemparan anak ketiga adalah $y = -0,4x^2 + 4x$.

C. Interval Fungsi Naik/Turun Fungsi Lintasan

Coba kamu amati kembali Gambar 11.11! Secara geometri, jelas kita lihat interval fungsi naik/turun pada masing-masing lintasan, seperti pada tabel berikut:

Tabel 11.3 Fungsi dan interval naik/turun fungsi lemparan anak 1, 2, dan 3

Lintasan ke	Fungsi	Secara Geometri	
		Interval Naik	Interval Turun
1	$y = -0,25x^2 + 3x$	$0 < x < 6$	$6 < x < 12$
2	$y = -0,6x^2 + 6x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$
3	$y = -0,4x^2 + 4x$	$0 < x < 5$	$5 < x < 10$

Mari kita tunjukkan kembali interval fungsi naik/turun dengan menggunakan konsep turunan yang telah kita pelajari sebelumnya.

Fungsi naik/turun pada lintasan lemparan anak 1

Fungsi yang telah diperoleh adalah $y = -0,25x^2 + 3x$ sehingga $y = -0,5x^2 + 3x$. Jadi,

fungsi akan naik: $y = -0,5x^2 + 3x \Leftrightarrow x < 6$

fungsi akan turun: $y = -0,5x + 3 < 0 \Leftrightarrow x > 6$

Menurut ilustrasi, batu dilempar dari posisi awal O(0,0) dan jatuh pada posisi akhir $Q(12,0)$ sehingga lintasan lemparan akan naik pada $0 < x < 6$ dan turun pada $6 < x < 12$.

- Bagaimana menunjukkan interval fungsi naik/turun dengan konsep turunan pada fungsi lintasan lemparan anak 2 dan anak 3 diserahkan kepadamu.

Contoh 11.13

Tentukanlah interval fungsi naik/turun fungsi $f(x) = x^4 - 2x^2$

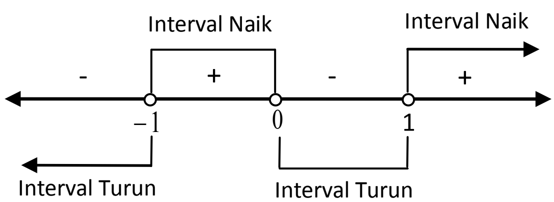
Alternatif Penyelesaian

Berdasarkan konsep, sebuah fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$ sehingga:

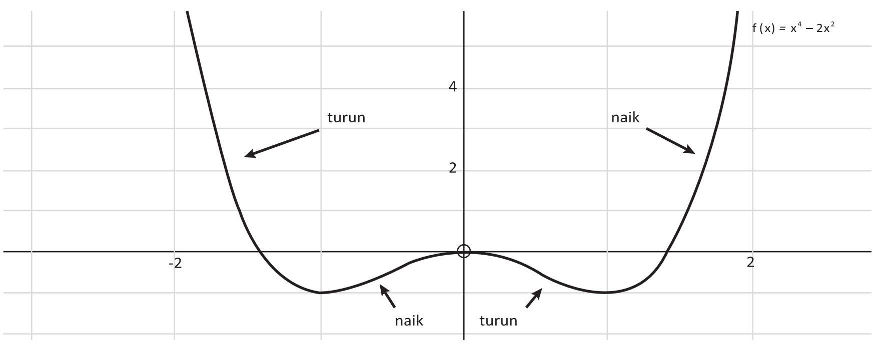
$f'(x) = 4x^3 - 4x > 0 \Leftrightarrow 4x(x - 1)(x + 1) > 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 1$ atau $x = -1$

Dengan menggunakan interval.



Jadi, kurva fungsi tersebut akan naik pada interval $1 -1 < x < 0$ atau $x > 1$ tetapi turun pada interval $x < -1$ atau $0 < x < 1$. Perhatikan sketsa kurva $f(x) = x^4 - 2x^2$ tersebut.



Gambar 11.12 Fungsi naik/turun kurva $f(x) = x^4 - 2x^2$

Contoh 11.14

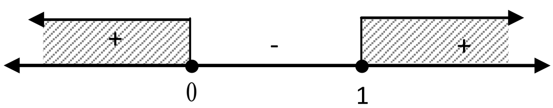
Tentukanlah interval fungsi naik $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$

Alternatif Penyelesaian

Masih ingatkah kamu syarat numerus $\sqrt{P(x)}$ adalah $P(x) \geq 0$. Jadi, syarat numerus $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ adalah $x^2 - x \geq 0$. Ingatlah kembali cara-cara menyelesaikan pertidaksamaan.

$$
\begin{aligned}
x^2 - x \geq 0 \quad & \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 1
\end{aligned}
$$

Dengan menggunakan interval.

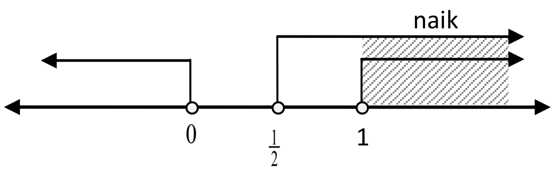


Jadi, syarat numerus bentuk akar di atas adalah $x \leq 0$ atau $x \geq 1$ Berdasarkan konsep, sebuah fungsi akan naik jika $f'(x) > 0$ sehingga:

$$
f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x}} > 0 \quad \Leftrightarrow 2x - 1 > 0 \text{ karena } \sqrt{x^2 - x} > 0 \text{ dan } x \neq 0, x \neq 1
$$

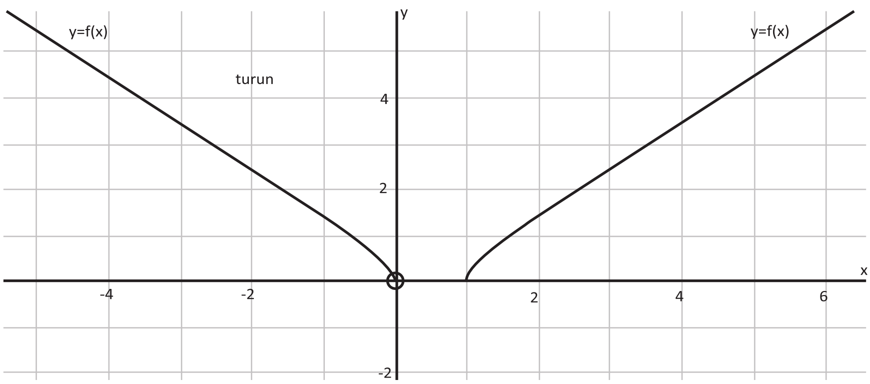
$$
\Leftrightarrow x > \frac{1}{2}
$$

Dengan menggunakan interval.



Jadi, kurva fungsi tersebut akan naik pada interval $x > 1$.

Perhatikanlah grafik fungsi $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ berikut!



Gambar 11.13 Fungsi naik/turun $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

- Coba kamu lakukan dengan cara yang sama untuk mencari interval fungsi turun! Jika kamu benar mengerjakannya maka fungsi turun pada interval $x < 0$.

2.3 Aplikasi Konsep Turunan dalam Permasalahan Maksimum dan Minimum

Setelah menemukan konsep fungsi naik dan turun, kita akan melanjutkan pembelajaran ke permasalahan maksimum dan minimum serta titik belok suatu fungsi. Tentu saja, kita masih melakukan pengamatan terhadap garis singgung kurva. Aplikasi yang akan dibahas adalah permasalahan titik optimal fungsi dalam interval terbuka dan tertutup, titik belok, dan permasalahan kecepatan maupun percepatan.

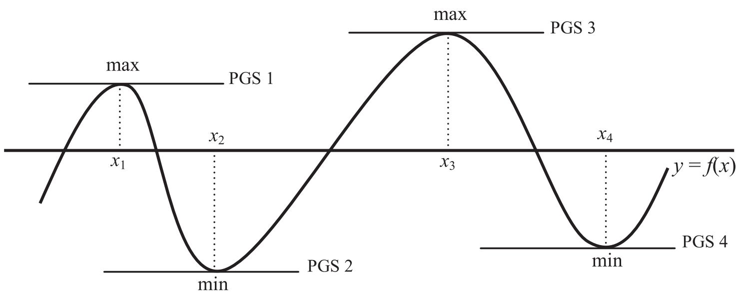
2.2.1 Menemukan konsep maksimum dan minimum di interval terbuka

Masalah-11.6

Seorang anak menarik sebuah tali yang cukup panjang. Kemudian dia membuat gelombang dari tali dengan menghentakkan tali tersebut ke atas dan ke bawah sehingga terbentuk sebuah gelombang berjalan. Dia terus mengamati gelombang tali yang dia buat. Dia melihat bahwa gelombang tali memiliki puncak maksimum maupun minimum. Dapatkah kamu menemukan konsep nilai maksimum ataupun minimum dari sebuah fungsi?

Alternatif Penyelesaian

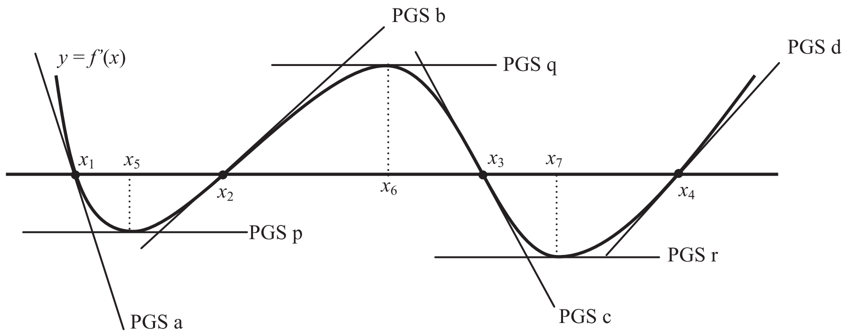
Gradien garis singgung adalah tangen sudut yang dibentuk oleh garis itu sendiri dengan sumbu x positif atau turunan pertama dari titik singgungnya.



Gambar 11.15 Sketsa gelombang tali

Coba kamu amati gambar di atas. Garis singgung (PGS 1, PGS 2, PGS 3 dan PGS 4) adalah garis horizontal atau $y = c$, c konstan, sehingga gradiennya adalah m = 0. Keempat garis singgung tersebut menyinggung kurva di titik puncak/optimal, di absis $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, dan $x = x_4$. Dari pengamatan, dapat disimpulkan bahwa sebuah fungsi akan mencapai optimal (maksimum/minimum) pada suatu daerah jika $m = f\,'(x) = 0$. Titik yang memenuhi $f\,'(x) = 0$ disebut titik stasioner. Berikutnya, kita akan mencoba menemukan hubungan antara titik stasioner dengan turunan kedua fungsi. Pada Gambar 11.15, $f\,'(x_1) = 0$, $f\,'(x_2) = 0$, $f\,'(x_3) = 0$ dan $f\,'(x_4) = 0$. Artinya kurva turunan pertama fungsi melalui sumbu x di titik $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $C(x_3, 0)$ dan $D(x_4, 0)$.

- Coba kamu amati kurva turunan pertama fungsi dan garis singgungnya sebagai berikut. Kesimpulan apa yang kamu dapat berikan?



Gambar 11.16 Hubungan garis singgung kurva m = f '(x) dengan titik stasioner

Titik $A(x_1, y_1)$ adalah titik maksimum pada Gambar 11.15 sehingga titik dengan absis $x = x_1$ adalah titik stasioner karena $f'(x_1) = 0$. Persamaan garis singgung kurva dengan gradien M pada fungsi $m = f'(x)$ menyinggung di titik $x = x_1$ membentuk sudut di kuadran IV sehingga nilai tangen sudut bernilai negatif. Hal ini mengakibatkan $M = m' = f''(x_1) < 0$. Dengan kata lain, titik $A(x_1, y_1)$ adalah titik maksimum jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) < 0$.

Kesimpulan: lihat Gambar 11.16 misalkan gradien persamaan garis singgung kurva $m = f'(x)$ adalah M sehingga $M = m' = f''(x)$ maka hubungan turunan kedua dengan titik stasioner adalah:

Tabel 11.4 Hubungan turunan kedua fungsi dengan titik optimal (stasioner)

PGS	Gradien $M = m' = f''(x)$	Jenis Titik	Pergerakan kurva
a	$M_a = f''(x_1) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
b	$M_b = f''(x_2) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
c	$M_c = f''(x_3) < 0$	Max	Naik-Max-Turun
d	$M_d = f''(x_4) > 0$	Min	Turun-Min-Naik
p	$M_p = f''(x_5) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun
q	$M_q = f''(x_6) = 0$	T. Belok	Naik-Belok-Naik
r	$M_r = f''(x_7) = 0$	T. Belok	Turun-Belok-Turun

Sifat 11.3

Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan memiliki turunan pertama dan kedua pada $x_1 \in I$ sehingga:

1. Jika $f'(x_1) = 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$disebut stasioner/kritis
2. Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) > 0$ maka titk $(x_1, f(x_1))$ disebut titik balik minimum fungsi
3. Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) < 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$ disebut titik balik maksimum fungsi
4. Jika $f''(x_1) = 0$ maka titik $(x_1, f(x_1))$ disebut titik belok fungsi

Contoh 11.15

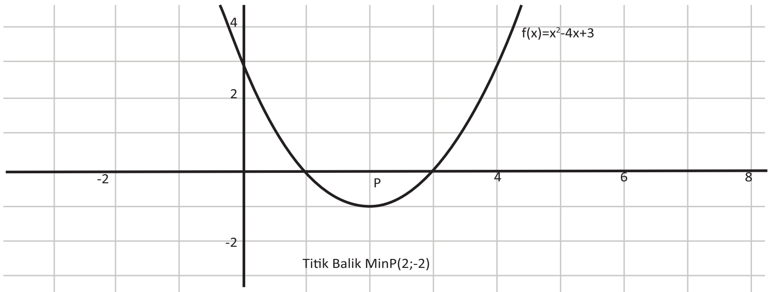
Tentukanlah titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Alternatif Penyelesaian 1 (Berdasarkan Konsep Fungsi Kuadrat)

Dengan mengingat kembali pelajaran fungsi kuadrat. Sebuah fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik balik $B(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a})$ di mana fungsi mencapai maksimum untuk $a < 0$ dan mencapai minimum untuk $a > 0$ sehingga fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ mempunyai titik balik minimum pada $B(-\frac{-4}{2(1)}, -\frac{(-4)^2 - 4(1)(3)}{4(1)}) = B(2,-1)$.

Alternatif Penyelesaian 2 (Berdasarkan Konsep Turunan)

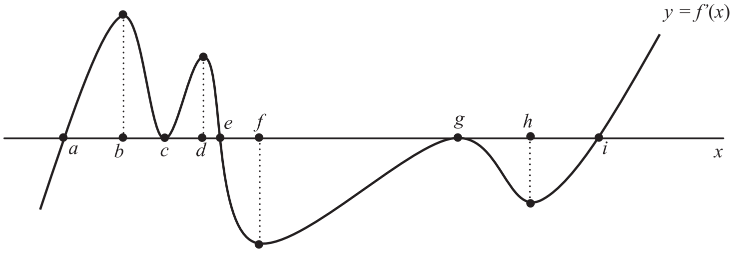
Dengan menggunakan konsep turunan di atas maka fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 3$ mempunyai stasioner: $f'(x) = 2x - 4 = 0$ atau $x = 2$ dan dengan mensubstitusi nilai $x = 2$ ke fungsi $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ diperoleh $y = -1$ sehingga titik stasioner adalah $B(2, -1)$. Mari kita periksa jenis keoptimalan fungsi tersebut dengan melihat nilai turunan keduanya pada titik tersebut. $f''(x) = 2$ atau $f''(2) = 2 > 0$. Berdasarkan konsep, titik tersebut adalah titik minimum. Jadi, titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$ adalah minimum di $B(2, -1)$.



Gambar 11.17 Titik balik fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Contoh 11.16

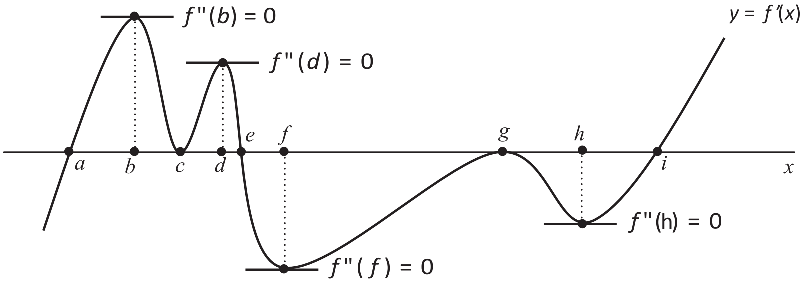
Analisislah kurva fungsi $y = f(x)$ berdasarkan sketsa kurva turunan pertamanya berikut.



Gambar 11.18 Sketsa turunan pertama suatu fungsi $y = f(x)$

Alternatif Penyelesaian

Secara geometri sketsa turunan pertama fungsi di atas, nilai setiap fungsi di bawah sumbu x adalah negatif dan bernilai positif untuk setiap fungsi di atas sumbu x.



Gambar 11.19 Analisis fungsi berdasarkan konsep turunan fungsi $y = f(x)$

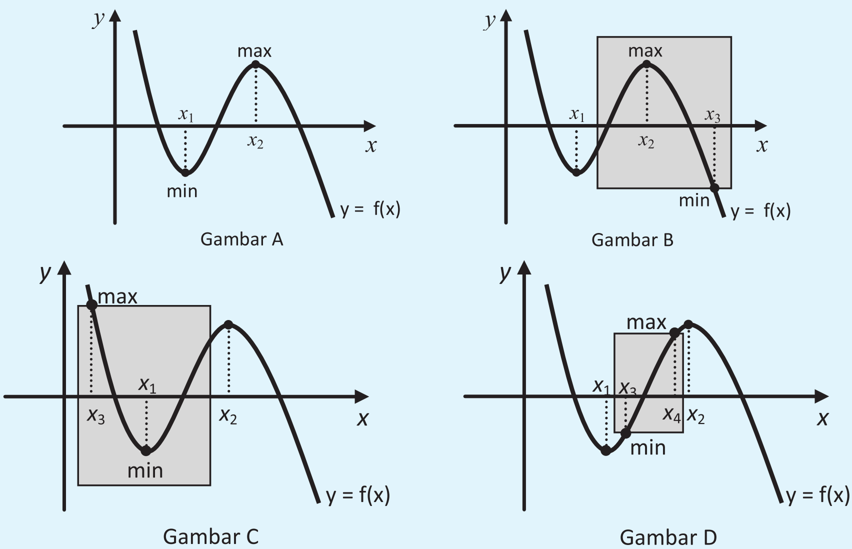
Dengan demikian, melalui pengamatan dan terhadap grafik turunan pertama dan konsep turunan maka fungsi $y = f(x)$ akan:

- Naik ($f'(x) > 0$) pada $a < x < c$, $c < x < e$ dan $x > i$
- Turun ($f'(x) < 0$) pada $x < a$, $e < x < g$ dan $g < x < i$
- Stasioner ($f'(x) = 0$) pada absis $x = a$, $x = c$, $x = e$, $x = g$ dan $x = i$
- Optimal maksimum ($f'(x) = 0$ dan $f''(x) < 0$) pada absis $x = e$
- Optimal minimum ($f'(x) = 0$ dan $f''(x) > 0$) pada absis $x = a$ dan $x = i$
- Titik belok ($f''(x) = 0$) pada absis $x = b$, $x = c$, $x = d$, $x = f$, $x = g$ dan $x = h$

2.2.2 Menemukan konsep maksimum dan minimum di interval terbuka

Masalah-11.7

Coba kamu amati posisi titik maksimum dan minimum dari beberapa gambar berikut.



Gambar 11.20 Titik maksimum dan minimum suatu fungsi

Kesimpulan apa yang kamu peroleh?

Alternatif Penyelesaian

Gambar A di atas telah kita bahas pada permasalahan 11.6. Jika kamu amati dengan teliti, perbedaan antara gambar A dengan ketiga gambar lainnya (B, C dan D) adalah terdapat sebuah daerah yang membatasi kurva. Dengan demikian, gambar A adalah posisi titik maksimum/minimum sebuah fungsi pada daerah terbuka dan ketiga gambar lainnya adalah posisi titik maksimum/minimum sebuah fungsi pada daerah tertutup. Nilai maksimum dan minimum fungsi tidak hanya bergantung pada titik stasioner fungsi tersebut tetapi bergantung juga pada daerah asal fungsi.

Contoh 11.7

Sebuah pertikel diamati pada interval waktu (dalam menit) tertentu berbentuk kurva $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$ pada $0 \leq t \leq 6$. Tentukanlah nilai optimal pergerakan partikel tersebut.

Alternatif Penyelesaian.

Daerah asal fungsi adalah $\{t \mid 0 \leq t \leq 6\}$ Titik stasioner $f'(t) = 0$

$f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 16$ sehingga $f'(t) = 3(t^2 - 6t + 8)$ dan $f''(t) = 6t - 18$

$f'(t) = 3(t - 2)(t - 4) = 0$

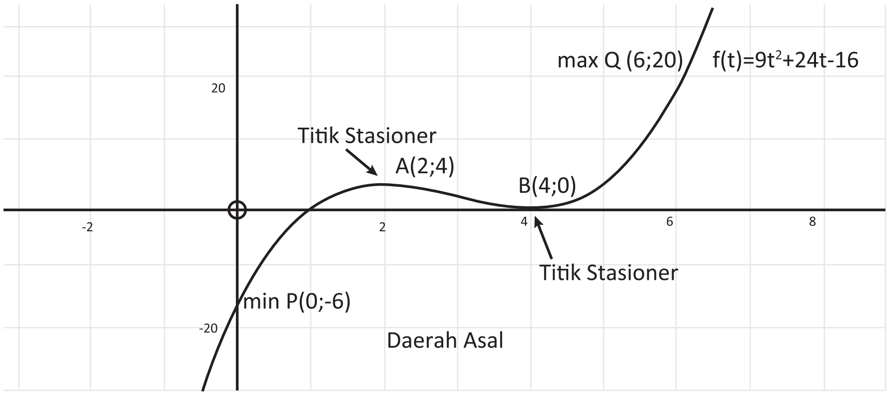
$t = 2 \rightarrow f(2) = 4$ dan $t = 4 \rightarrow f(4) = 0$

Karena daerah asal $\{t \mid 0 \leq t \leq 6\}$ dan absis $t = 2$, $t = 4$ ada dalam daerah asal sehingga:

$t = 0 \rightarrow f(0) = -16$ dan $t = 6 \rightarrow f(6) = 20$

Nilai minimum keempat titik adalah -16 sehingga titik minimum kurva pada daerah asal adalah A(0,-16) dan nilai maksimum keempat titik adalah 20 sehingga titik maksimum kurva pada daerah asal adalah B(6,20).

Perhatikan gambar.



Gambar 11.21 Titik optimal kurva *f*(*t*) = *t*3 – 9*t*2 + 24*t* – 16 untuk 0 ≤ *t* ≤ 6.

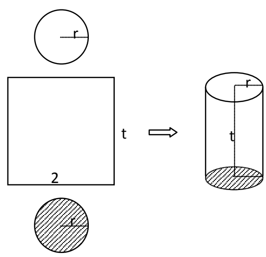
Masalah-11.8

Seorang anak berencana membuat sebuah tabung dengan alas berbentuk lingkaran tetapi terbuat dari bahan yang berbeda. Tabung yang akan dibuat harus mempunyai volume 43.120 cm^3. Biaya pembuatan alas adalah Rp150,- per cm^2, biaya pembuatan selimut tabung adalah Rp80,- per cm^2 sementara biaya pembuatan atap adalah Rp50,- per cm^2. Berapakah biaya minimal yang harus disediakan anak tersebut?

Alternatif Penyelesaian.

Mari kita sketsa tabung yang akan dibuat. Misalkan r adalah radius alas dan atap tabung, t adalah tinggi tabung $\pi = \dfrac{22}{7}$.

$$V = \frac{22}{7}r^2 t = 43120 \Leftrightarrow t = \frac{7}{22} \text{ x } \frac{43120}{r^2}$$



Gambar 11.22 Tabung

Biaya = (Luas alas × biaya alas) + (Luas selimut × biaya selimut) + (Luas atap × biaya atap)

$$\text{Biaya} = \frac{22}{7}r^2 \times 50 + \frac{22}{7}rt \times 80 + \frac{22}{7}r^2 \times 50$$

$$\text{Biaya} = \frac{22}{7}r^2 \times 150 + \frac{22}{7}r \times \frac{7}{22} \times \frac{43120}{r^2} \times 80 + \frac{22}{7}r^2 \times 50$$

$$\text{Biaya} = \frac{22}{7}r^2 \times 200 + \frac{43120}{r} \times 80$$

Biaya B(*r*) adalah fungsi atas radius *r* (dalam Rupiah).

$$B(r) = \frac{4400}{7}r^2 + \frac{3449600}{r}$$

$$B'(r) = \frac{8800}{7}r - \frac{3449600}{r^2} = 0$$

$$\frac{88}{7}r^3 = \frac{34496}{r^2}$$

$r^3 = 2744 = 14^3 \Leftrightarrow r = 14$

$$\begin{aligned}\text{Jadi biaya minimum } &= \frac{22}{7} \times 14^2 \times 200 + \frac{43120}{14} \times 80 \\ &= 616 \times 200 + 3080 \times 80 \\ &= 123200 + 246400 \\ &= 369.600\end{aligned}$$

Biaya minimum adalah Rp369.600,-

Contoh 11.18

Kamu masih ingat soal pada Bab Limit Fungsi di kelas X, bukan? Sebuah bidang logam dipanaskan di bagian tengah dan memuai sehingga mengalami pertambahan luas sebagai fungsi waktu $f(t) = 0,25t^2 + 0,5t$(cm^2). Tentukanlah kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit.

Alternatif penyelesaian pertama (dengan Numerik)

Kecepatan perubahan pertambahan luas adalah besar pertambahan luas dibandingkan dengan besar selisih waktu.

Perhatikan tabel!

Tabel 11.5: Nilai pendekatan $f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$ pada saat t mendekati 5

12	$\Delta t = t\text{-}5$	$\Delta f = f(t)\text{-}f(5)$	$\Delta f / \Delta t$
1	-4	-8	2
2	-3	-6,75	2,25
3	-2	-5	2,5
4	-1	-2,75	2,75
4,5	-0,5	-1,4375	2,875
4,9	-0,1	-0,2975	2,975
4,99	-0,01	-0,029975	2,9975
4,999	-0,001	-0,00299975	2,99975
4,9999	-0,0001	-0,000299997	2,999975
5	0,0000	0	?
5,0001	0,0001	0,000300002	3,000025
5,001	0,001	0,00300025	3,00025
5,01	0,01	0,030025	3,0025
5,1	0,1	0,3025	3,025
5,5	0,5	1,5625	3,125
6	1	3,25	3,25

Dengan melihat tabel di atas, pada saat t mendekati 5 maka Δt mendekati 0 dan $f(t)$ akan mendekati 3 (cm^2/menit).

Alternatif Penyelesaian kedua (dengan konsep Limit)

$f(t) = 0{,}25t^2 + 0{,}5t$
$f(5) = 0{,}25(5)^2 + 0{,}5(5) = 8{,}75$

$$\lim_{t \to 5} \frac{f(t) - f(5)}{t-5} = \lim_{t \to 5} \frac{(0{,}25t^2 + 0{,}5t) - f(5)}{t-5}$$

$$= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}25t^2 + 0{,}5t - 8{,}75}{t-5}$$

$$= \lim_{t \to 5} \frac{0{,}5(0{,}5t^2 + t - 17{,}5)}{t-5}$$

$$= \lim_{t \to 5} \frac{0,5(0,5t+3,5)(t-5)}{t-5}$$
$$= \lim_{t \to 5} 0,5(0,5t+3,5)$$
$$= 0,5(0,5 \text{ x } 5+3,5)$$
$$= 3$$

Alternatif Penyelesaian ketiga (dengan konsep Turunan)

$f(t) = 0,25t^2 + ,5t$

$f'(t) = 0,5t + 0,5 = 0$

$f(5) = 2,5 + 0,5 = 3$

Kecepatan perubahan pertambahan luas bidang tersebut pada saat $t = 5$ menit adalah 3 (cm^2/menit).

Contoh 11.19

Seorang karyawan berencana akan tinggal di rumah kontarakan setelah dia diterima bekerja di sebuah pabrik. Untuk menghemat biaya pengeluaran, ia berharap dapat tinggal di kontrakan yang tidak jauh dari tempat dia bekerja dan uang sewa kontrakan yang juga mendukung. Jika dia tinggal x km dari tempat bekerja maka biaya transportasi adalah c rupiah per km per tahun. Biaya kontrakan adalah $\frac{b}{x+1}$ per tahun (dalam rupiah), dengan b dan c adalah konstanta bernilai real positif dan $b > c$. Dapatkah kamu tentukan biaya minimum pengeluaran karyawan tersebut?

Alternatif Penyelesaian

Langkah 1. Modelkan permasalahan

Biaya = Biaya transportasi + Biaya sewa (per tahun)

$$B(x) = cx + \frac{b}{x+1} \text{ dengan daerah asal } x \geq 0$$

Langkah 2. Tentukan titik stasioner

$B(x) = cx + b(x + 1)^{-1}$sehingga $B'(x) = c - b(x + 1)^{-2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{c(x+1)^2 - b}{(x+1)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 - \sqrt{\frac{b}{c}} \text{ atau } x = -1 + \sqrt{\frac{b}{c}}$$

Karena $b > c$ dan $x \geq 0$ maka nilai x yang digunakan adalah $x = -1 + \sqrt{\frac{b}{c}}$

Langkah 3. Uji titik stasioner ke turunan kedua fungsi

$B'(x) = c - b(x + 1)^{-2}$ sehingga $B''(x) = 2b(x + 1)^{-3} = \dfrac{2b}{(x+1)^3}$

$$B''(-1 + \sqrt{\frac{b}{c}}) = \frac{2b}{(\sqrt{\frac{b}{c}})^3} = \frac{2c\sqrt{c}}{\sqrt{b}}$$

Karena b dan c adalah konstanta bernilai real positif maka $B''(-1 + \sqrt{\frac{b}{c}}) > 0$ atau merupakan ekstrim minimum.

Langkah 4. Tentukan biaya minimum

Mensubstitusikan nilai $x = -1 + \sqrt{\frac{b}{c}}$ ke fungsi $B(x)$ sehingga

$$B(-1 + \sqrt{\frac{b}{c}}) = -c + 2\sqrt{bc}$$

Jadi, biaya minimum karyawan tersebut adalah: $-c + 2\sqrt{bc}$ (dalam rupiah) per tahun.

2.4 Aplikasi Konsep Turunan dalam Permasalahan Kecepatan dan Percepatan

Secara arti fisis, konsep turunan yang berkaitan dengan fungsi naik atau turun, nilai optimal maksimum atau minimum serta titik belok berhubungan dengan kecepatan dan percepatan suatu fungsi. Amati dan pelajarilah permasalahan berikut!

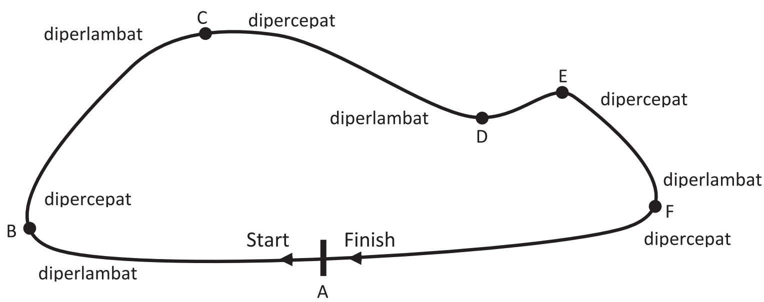
Masalah-11.9

Seorang pembalap melakukan latihan di sebuah arena balap dengan lintasan yang berkelok-kelok. Dia melaju kencang meninggalkan garis start dengan kecepatan yang diatur dengan baik. Di setiap belokan lintasan, dia menurunkan kecepatannya tetapi berharap dengan secepat mungkin menaikkan kecepatan setelah meninggalkan titik belokan tersebut. Demikian dia berlatih membalap dan akhirnya dia berhenti mendekati titik finish. Apakah kamu dapat menemukan hubungan jarak lintasan dan kecepatan? Dapatkah kamu jelaskan ilustrasi di atas berdasarkan konsep turunan?

Alternatif Penyelesaian.

Permasalahan di atas dapat diselesaikan dengan menemukan konsep turunan dan mengaplikasikannya kembali. Misalkan lintasan arena balap tersebut adalah sebuah lintasan yang berupa siklis yaitu garis start dan garis finish adalah sama, tetapi dipandang berlawanan arah. Garis start berarti garis tersebut ditinggalkan atau bergerak menjauhi sementara garis finish berarti garis tersebut didekati.

Perhatikan gambar berikut:



Gambar 11.24 Lintasan balap

Pada arena balap yang menjadi variabel adalah waktu sehingga lintasan yang ditempuh merupakan fungsi waktu $s = f(t)$. Dengan demikian, daerah asal fungsi adalah waktu $t \geq 0$ karena dihitung sejak diam. Setiap titik pada lintasan akan didekati dan dijauhi, bukan? Hal ini berarti ada peranan kecepatan $v(t)$. Untuk titik yang dijauhi berarti kecepatan positif, dan titik yang akan didekati berarti kecepatan negatif.

Tabel 11.6 Kecepatan suatu fungsi dan posisinya

Posisi	Nilai
Diam	$v(t)= 0$
Bergerak menjauhi titik tetap (Start)	$v(t) > 0$
Bergerak mendekati titik tetap (Finish)	$v(t) < 0$

Jadi, bergerak semakin menjauhi ataupun semakin mendekati berarti terjadi perubahan pergerakan pada lintasan, sehingga kecepatan adalah laju perubahan dari lintasan, ada waktu perubahan waktu yaitu:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) \text{ atau } \mathrm{v(t) = s'(t)}$$

Pergerakan pembalap pada lintasan di titik belok diperlambat atau dipercepat, sehingga posisi percepatan adalah sebagai berikut:

Tabel 11.7 Percepatan suatu fungsi dan posisinya

Posisi	Nilai
Konstan	$a(t) = 0$
Bergerak diperlambat	$a(t) < 0$
Bergerak dipercepat	$a(t) > 0$

Jadi, bergerak dipercepat atau diperlambat berhubungan dengan kecepatan kenderaan tersebut, yaitu terjadi perubahan kecepatan kenderaan. Percepatan $a(t)$ adalah laju perubahan dari kecepatan, yaitu:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Contoh 11.20

Pada pengamatan tertentu, sebuah partikel bergerak mengikuti sebuah pola yang merupakan fungsi jarak s atas waktu t yaitu $s(t) = t^4 - 6t^2 + 12$.Tentukanlah panjang lintasan dan kecepatan pada saat percepatannya konstan.

Alternatif Penyelesaian

Diketahui: $s(t) = t^4 - 6t^2 + 12$

Ditanya: $s(t)$ dan $v(t)$ pada saat $a(t) = 0$

Proses penyelesaian

Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi

$v(t) = s'(t) = 4t^2 - 12t$

Percepatan adalah turunan pertama dari kecepatan

$a(t) = v'(t) = 12t^2 - 12 = 0$

$12(t + 1)(t - 1) = 0$

Jadi, percepatan akan konstan pada saat $t = 1$ sehingga:

$v(1) = s'(1) = 4(1)^3 - 12(1) = -8$

$s(1) = (1)^4 - 6(1)^2 + 12 = 7$

3. Sketsa Kurva Suatu Fungsi dengan Konsep Turunan

Berdasarkan konsep turunan yang diperoleh di atas, maka kita dapat menggambar kurva suatu fungsi dengan menganalisis titik stasioner, fungsi naik atau turun, titik optimalnya (maksimum atau minimum) dan titik belok. Perhatikan dan pelajarilah contoh berikut.

Contoh 11.21

Analisis dan sketsalah kurva fungsi $f(x) = x^4 + 2x^3$.

Alternatif Penyelesaian.

Langkah 1. Menentukan nilai pembuat nol fungsi.

$$\begin{aligned} f(x) = x^4 + 2x^3 \quad &\Leftrightarrow x^3(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 = 0 \text{ atau } x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -2 \end{aligned}$$

Jadi, kurva melalui sumbu x di titik A(0,0) atau B(-2,0)

Langkah 2. Menentukan titik stasioner.

$$\begin{aligned} f'(x) = 4x^3 + 6x^2 = 0 \quad &\Leftrightarrow 2x^2(2x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = 0 \text{ atau } 2x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Nilai $f(0) = 0$ atau $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$

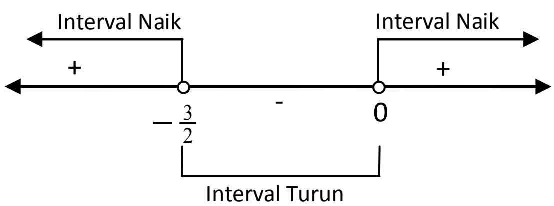
Jadi, titik stasioner fungsi adalah A(0,0) atau $C(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$.

Langkah 3. Menentukan interval fungsi naik/turun Interval pembuat fungsi naik adalah:

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 > 0 \quad \Leftrightarrow 2x^2(2x + 3) > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = -\frac{3}{2}$$

Ingat pelajaran pertidaksamaan pada kelas X.



Jadi, fungsi akan naik pada $x < -\frac{3}{2}$ atau $x > 0$ dan turun pada $-\frac{3}{2} < x < 0$.

Langkah 4. Menentukan titik balik fungsi Untuk menentukan titik balik maksimum atau minimum fungsi, kita akan menguji titik stasioner ke turunan kedua fungsi.

$f''(x) = 12x^2 + 12x$ sehingga $f''(0) = 0$

Titik A(0,0) bukanlah sebuah titik balik.

$f''(x) = 12x^2 + 12x$ sehingga $f''(-\frac{3}{2}) = 9 > 0$

Titik $C(-\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$ adalah titik balik minimum.

Langkah 5. Menentukan titik belok

$$f''(x) = 12x^2 + 12x = 0 \quad \Leftrightarrow 12x(x + 1) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $12x = 0$ atau $x + 1 = 0$

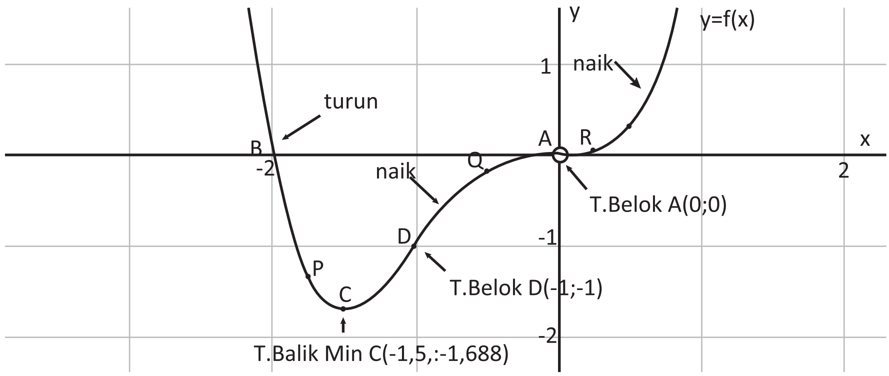
$\Leftrightarrow$ $x = 0$ atau $x = -1$

Nilai $f(0) = 0$ atau $f(-1) = -1$

Jadi, titik belok fungsi adalah A(0,0) atau D(–1, –1).

Langkah 6. Menentukan beberapa titik bantu

x	-7/4	-1/2	1/4	1/2
$y = x^4 + 2x^3$	-343/256	-3/16	9/256	5/16
(x,y)	P(-7/4,-343/256)	Q(-1/2,-3/16)	R(1/4,9/256)	S(1/2,5/16)



Gambar 11.25 Sketsa kurva fungsi $f(x) = x^4 + 2x^3$.

Contoh 11.12

Analisis dan sketsalah kurva fungsi $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Alternatif Penyelesaian.

Langkah 1. Menentukan nilai pembuat nol fungsi.

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $x^2 = 0$ dan $x - 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $x = 0$ dan $x \neq 1$

Jadi, kurva melalui sumbu x pada titik A(0,0)

Langkah 2. Menentukan titik stasioner.

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x(x-1) - x^2(1) = 0 \text{ dan } (x-1)^2 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \text{ dan } x \neq 1$$

$\Leftrightarrow x(x-2)$ dan $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 2$

Nilai $f(0) = 0$ atau $f(2) = 4$ Jadi, titik stasioner fungsi adalah A(0,0) atau B(2,4).

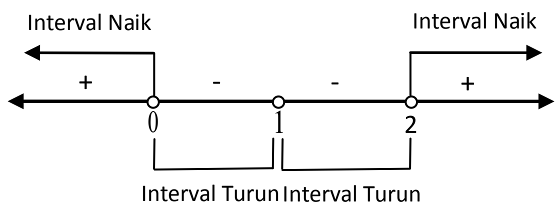
Langkah 3. Menentukan interval fungsi naik/turun. Interval pembuat fungsi naik adalah:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)(x-1)^2 > 0$$

$\Leftrightarrow x(x-2)(x-1)^2 > 0$

$\Leftrightarrow x = 0, x = 2$ atau $x = 1$

Ingat pelajaran pertidaksamaan pada kelas X.



Jadi, fungsi akan naik pada $x < 0$ atau $x > 2$ dan fungsi akan turun pada $0 < x < 1$ atau $1 < x < 2$.

Langkah 4. Menentukan titik balik fungsi. Untuk menentukan titik balik maksimum atau minimum fungsi, kita akan menguji titik stasionernya ke turunan kedua fungsi.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \text{ sehingga}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x)2(x-1)(1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$f''(0) = -2 < 0$ dan $f''(2) = 2 > 0$

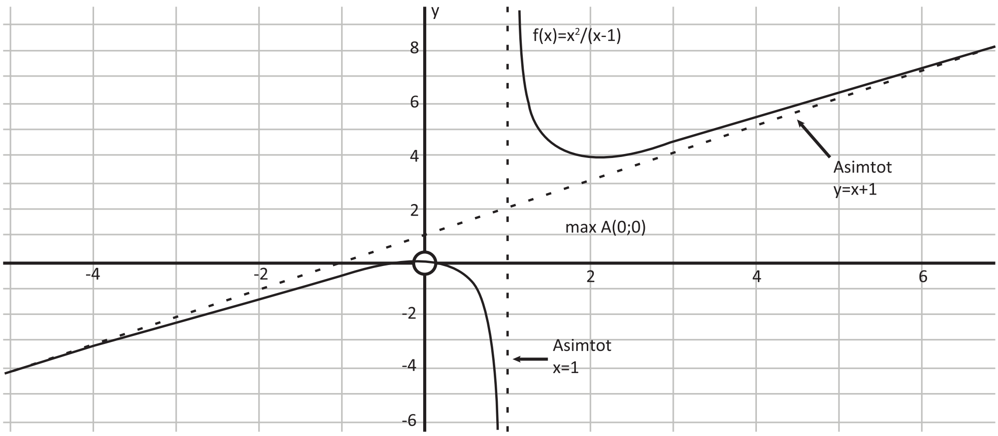
Titik A(0, 0) adalah titik balik maksimum dan titik A(2, 4) adalah titik balik minimum.

Langkah 5. Menentukan titik belok

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3} = 0 \Leftrightarrow$ tidak ada nilai x pembuat fungsi turunan adalah nol

Jadi, tidak ada titik belok pada fungsi tersebut.

Langkah 6. Menentukan beberapa titik bantu



Gambar 11.26 Sketsa kurva fungsi $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

Uji Kompetensi 11.2

1. Tentukanlah titik balik fungsi-fungsi berikut!

   a. $f(x) = x^2 - 2x$

   b. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}$

   c. $f(x) = x^3 - x$

   d. $f(x) = x^3 - 6x - 9x + 1$

   e. $f(x) = x^4 - x^2$

2. Analisis dan sketsalah bentuk kurva dari fungsi-fungsi berikut dengan menunjukkan interval fungsi naik/turun, titik maksimum/minimum dan titik belok!

   a. $f(x) = x^2 - 2x$

   b. $f(x) = x^3 - x$

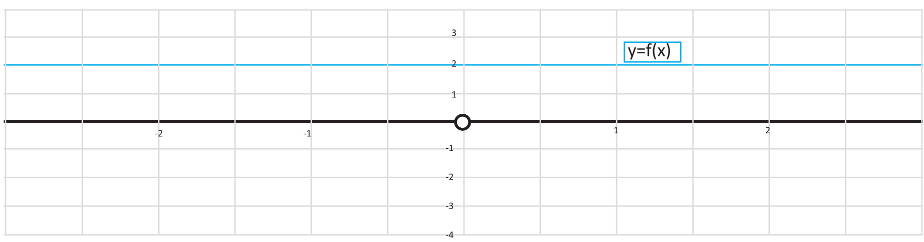
   c. $f(x) = x^4 - x^2$

   d. $f(x) = \frac{1}{x-1}$

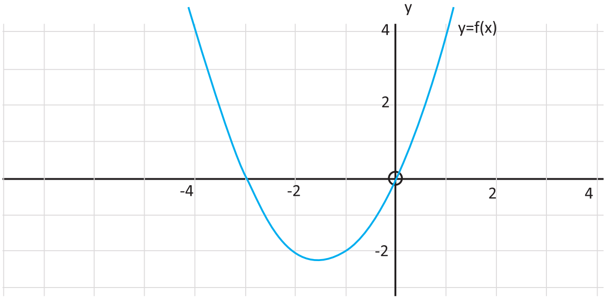
   e. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

3. Analisis (fungsi naik/turun, maksimum/minimum, titik belok) kurva dari suatu fungsi berdasarkan sketsa turunan pertamanya.

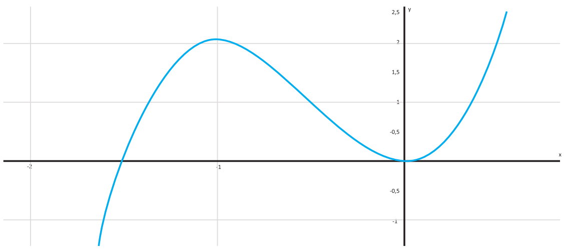
   a.



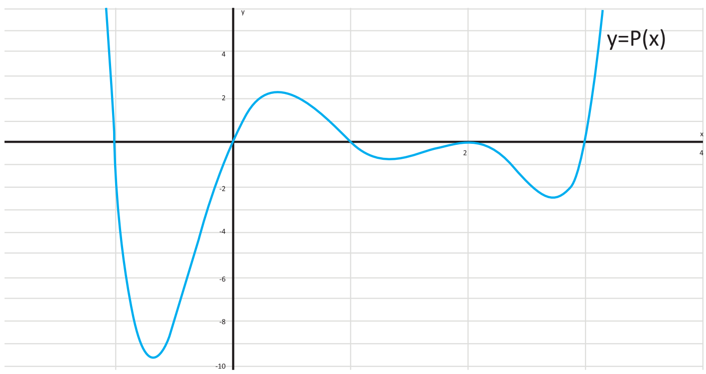
b.



c.



d.



4. Seorang anak menggambar sebuah kurva tertutup setengah lingkaran dengan diameter 28 cm. Kemudian, dia berencana membuat sebuah bangun segiempat di dalam kurva tersebut dengan masing-masing titik sudut segiempat menyinggung keliling kurva.
   a. Sketsalah kurva tertutup setengah lingkaran tersebut.
   b. Buatlah segiempat yang mungkin dapat dibuat dalam kurva. Sebutkanlah jenis-jenis segiempat yang dapat dibuat.

c. Hitunglah masing-masing segiempat yang diperoleh.

d. Segiempat yang manakah yang mempunyai luas terbesar? Carilah luas segiempat terbesar yang dapat dibuat dalam kurva tersebut dengan menggunakan konsep diferensial.

5. Sebuah segiempat OABC dibuat pada daerah yang dibatasi oleh sumbu x, sumbu y dan kurva fungsi $y = (x - 1)^2$. Jika O adalah titik asal koordinat, A pada sumbu x, B pada kurva dan C pada sumbu y maka tentukanlah persamaan garis singgung dan persamaan garis normal di titik B agar luas OABC maksimum. Sketsalah permasalahan di atas.

Projek

Jika f adalah fungsi bernilai real pada $-\infty < x < \infty$. Berdasarkan konsep, turunan adalah sebuah limit fungsi, yaitu $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Nyatakanlah turunan kedua fungsi $f''(x)$ sebagai limit fungsi. Kemudian tentukanlah turunan kedua dari $f(x) = \sqrt{2x}$ pada $x > 0$.

Buatlah laporan projekmu dan presentasikanlah di depan teman-temanmu dan gurumu!

D. PENUTUP

Kita telah menemukan konsep turunan fungsi dan sifat-sifatnya dari berbagai pemecahan dunia nyata. Berdasarkan sajian materi terkait berbagai konsep dan sifat turunan fungsi di atas, beberapa hal penting dapat kita rangkum sebagai berikut:

1. Misalkan $f: R \to R$ adalah fungsi kontinu dan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ pada kurva f. Garis sekan adalah yang menghubungkan titik P dan Q dengan gradien $m_{sec} = \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

2. Misalkan f adalah fungsi kontinu bernilai real dan titik $P(x_1, y_1)$ pada kurva. Gradien garis tangen/singgung di titik $P(x_1, y_1)$ adalah nilai limit garis sekan di titik $P(x_1, y_1)$, ditulis $m_{tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{sec} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

3. Misalkan fungsi $f: S \rightarrow R, S \subseteq$ P dengan $(c - \Delta x, c + \Delta x)$. Fungsi f dapat diturunkan pada titik c jika dan hanya jika nilai $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ ada.

4. Misalkan $f: S \rightarrow R$ dengan $S \subseteq R$. Fungsi f dapat diturunkan pada S jika dan hanya jika fungsi f dapat diturunkan pada setiap titik c di S.

5. Misalkan fungsi $f: S \rightarrow R$, $S \subseteq R$ dengan $c \in S$ dan $L \in R$. Fungsi f dapat diturunkan di titik c jika dan hanya jika nilai turunan kiri sama dengan nilai turunan kanan, ditulis:
$f'(c) = \lim\limits_{x \to c^+} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c^-} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = L$.

6. Aturan Turunan:
Misalkan f, u, v adalah fungsi bernilai real pada interval I, a bilangan real, dapat diturunkan maka:
$f(x) = a \rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = ax \rightarrow f'(x) = a$
$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = ax^{n-1}$
$f(x) = au(x) \rightarrow f'(x) = au'(x)$
$f(x) = a[u(x)]^n \rightarrow f'(x) = au'(x)[u(x)]^{n-1}$
$f(x) = u(x) \pm v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$
$f(x) = u(x)v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$

7. Misalkan f adalah fungsi bernilai real dan dapat diturunkan pada $x \in I$ maka
Jika $f'(x) > 0$ maka kurva selalu naik pada interval I
Jika $f'(x) < 0$ maka kurva selalu turun pada interval I
Jika $f'(x) \geq 0$ maka kurva tidak pernah turun pada interval I
Jika $f'(x) \geq 0$ maka kurva tidak pernah naik pada interval I

8. Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang kontinu dan ada turunan pertama dan kedua pada $x_1 \in I$ sehingga:

Jika $f'(x_1) = 0$ maka titik $P(x_1, f(x))$ disebut dengan stasioner/kritis.

Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) > 0$ maka titik $P(x_1, f(x))$ disebut titik balik minimum fungsi.

Jika $f'(x_1) = 0$ dan $f''(x_1) < 0$ maka titik $P(x_1, f(x))$ disebut titik balik maksimum fungsi.

Jika $f''(x_1) = 0$ maka titik $P(x_1, f(x_1))$ disebut titik belok.

9. Kecepatan adalah laju perubahan dari fungsi $s = f(t)$ terhadap perubahan waktu t, yaitu:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t) \text{ atau } v(t) = s'(t)$$

Percepatan adalah laju perubahan dari fungsi kecepatan $v(t)$ terhadap perubahan waktu t, yaitu:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Bab 12

INTEGRAL

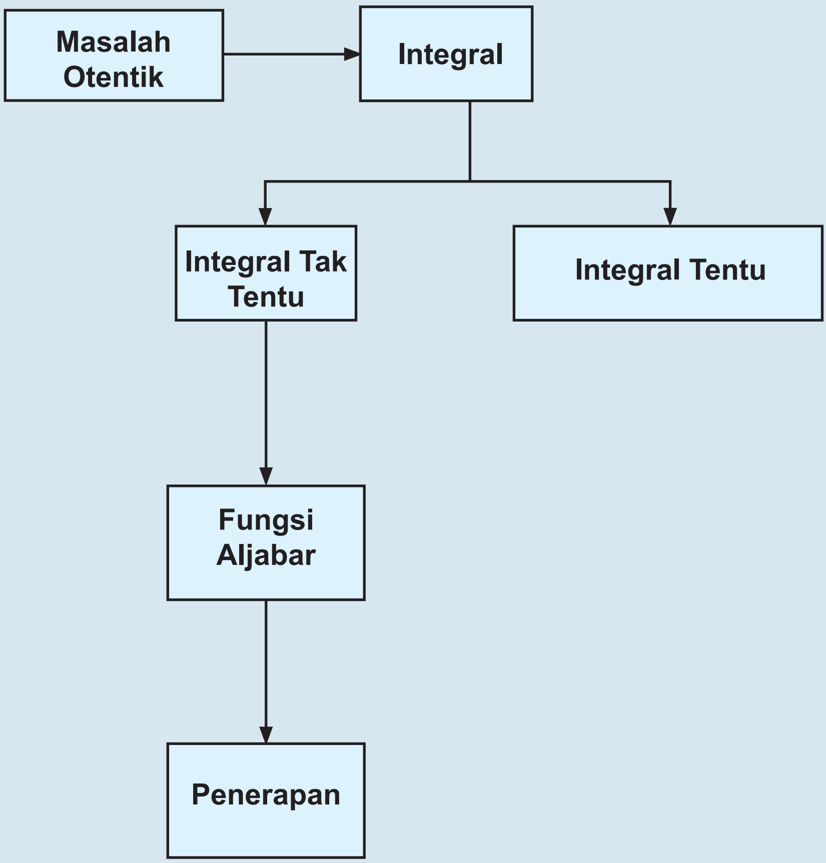
A. KOMPETENSI DASAR DAN PENGALAMAN BELAJAR

Kompetensi Dasar	Pengalaman Belajar
Setelah mengikuti pembelajaran integral siswa mampu: 1. Mampu mentransformasi diri dalam berperilaku jujur, tangguh menghadapi masalah, kritis dan disiplin dalam melakukan tugas belajar matematika. 2. Mendeskripsikan konsep integral tak tentu suatu fungsi sebagai kebalikan dari turunan fungsi. 3. Memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah dunia nyata dan matematika yang melibatkan turunan dan integral tak tentu dan memeriksa kebenaran langkah-langkahnya. 4. Menurunkan aturan dan sifat integral tak tentu dari aturan dan sifat turunan fungsi. 5. Memilih strategi yang efektif dan menyajikan model matematika Dalam memecahkan masalah nyata tentang integral tak tentu dari fungsi aljabar.	Melalui proses pembelajaran integral, siswa memiliki penga-laman belajar sebagai berikut. • menemukan konsep integral melalui pemecahan masalah otentik; • berkolaborasi memecahkan masalah aktual dengan pola interaksi sosial kultur; • berpikir tingkat tinggi (berpikir kritis, kreatif) dalam menyelidiki dan mengaplikasikan konsep integral dalam memecahkan masalah otentik.

Istilah Penting

- *Integral tak tentu*
- *Fungsi aljabar*
- *Derivatif*
- *Antiderivatif*

B. PETA KONSEP



C. MATERI PEMBELAJARAN

1. Menemukan Konsep Integral Tak Tentu sebagai Kebalikan dari Turunan Fungsi

Mari kita ingat kembali konsep aplikasi turunan pada bidang fisika. Kecepatan adalah turunan pertama dari fungsi jarak dan percepatan adalah turunan pertama dari fungsi kecepatan. Bila kita berpikir kembali tentang aplikasi ini, bagaimana hubungan kecepatan jika percepatan yang diketahui. Hal ini mempunyai pemikiran terbalik dengan turunan, bukan? Nah, konsep inilah yang akan kita pelajari, yang disebut dengan integral.

Integral adalah konsep yang juga banyak berperan dalam perkembangan ilmu matematika dan penerapan diberbagai bidang. Ini berarti integral banyak diterapkan di kehidupan sehari-hari. Keterlibatan integral dalam terapan ilmu lain seperti geometri, teknologi, biologi, ekonomi sangat membantu untuk pengembangan ilmu pengetahuan.

Menurut sejarah, orang yang pertama kali mengemukakan tentang ide integral adalah Archimedes yang merupakan seorang ilmuwan bangsa Yunani yang berasal dari Syracusa (287 – 212 SM). Archimedes menggunakan ide integral tersebut untuk mencari luas daerah suatu lingkaran, luas daerah yang dibatasi oleh parabola dan tali busur, dan sebagainya. Prinsip-prinsip dan teknik integrasi dikembangkan terpisah oleh Isaac Newton dan Gottfried Leibniz pada akhir abad ke-17. Menurut sejarah pengembangan kalkulus juga sangat besar jasa dan peranan dari George Friederick Benhard Riemann (1826 – 1866).

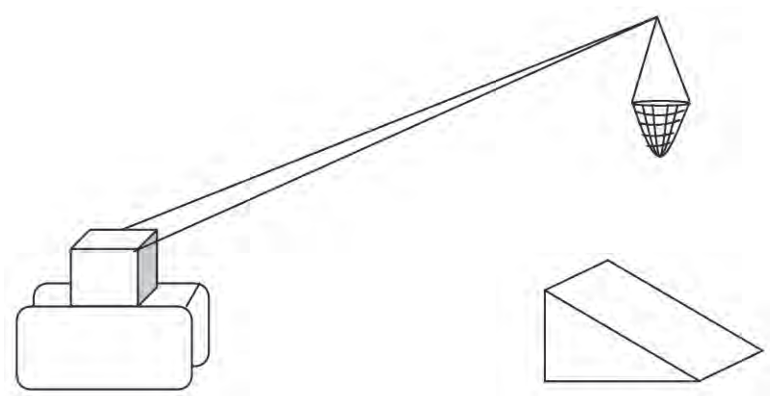
Pada bab ini akan dibahas tentang arti "***antiturunan***" (anti derivatif), "***integral tak tentu***", dan beberapa hal dasar yang pada akhirnya membantu kita untuk menemukan teknik yang sistematik dalam menentukan suatu fungsi jika turunannya diketahui.

Masalah-12.1

Di pelabuhan selalu terjadi bongkar muat barang dari kapal ke dermaga dengan menggunakan mesin pengangkat/pemindah barang. Barang dalam jaring diangkat dan diturunkan ke dermaga. Terkadang barang diturunkan ke sebuah bidang miring agar mudah dipindahkan ke tempat yang diharapkan. Dari permasalahan ini, dapatkah kamu sketsa perpindahan barang tersebut? Dapatkah kamu temukan hubungan masalah ini dengan konsep turunan (Ingat pelajaran Turunan pada Bab XI)

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan masalah di atas kita sketsa dengan sederhana pada gambar berikut:

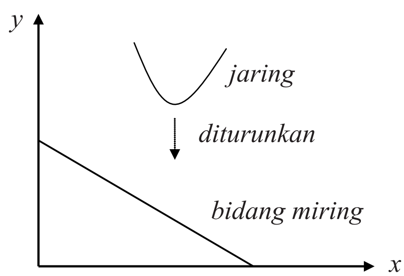


Gambar 12.1 Barang yang diturunkan ke bidang miring

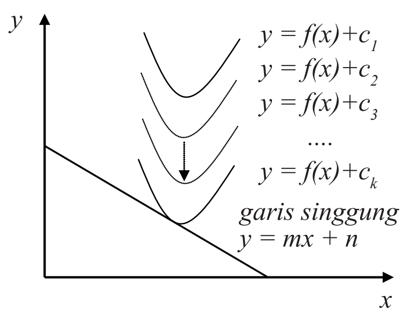
Sekarang, kita misalkan jaring (barang) yang diturunkan adalah sebuah fungsi, bidang miring sebuah garis, ketinggian adalah sumbu y, dan permukaan dermaga adalah sumbu x maka gambar tersebut dapat disketsa ulang dengan sederhana pada bidang koordinat kartesius.

Jika jaring tersebut sebuah kurva dan diturunkan pada Gambar 12.2 maka berdasarkan konsep Transfromasi (translasi) pada Bab X, terjadi perubahan nilai konstanta pada fungsi tersebut sampai akhirnya kurva tersebut akan menyingung bidang miring atau garis. Perhatikan gambar kembali.

Berdasarkan Gambar 12.3, kurva yang bergerak turun akan menyinggung garis tersebut. Ingat kembali konsep gradien sebuah garis singgung pada Bab XI bahwa gradien garis singgung adalah turunan pertama fungsi yang disinggung garis tersebut. Berdasarkan konsep tersebut maka Gambar 12.3 memberikan informasi bahwa: m adalah turunan pertama y'



Gambar 12.2 Jaring dan bidang miring sebagai kurva dan garis pada bidang koordinat kartesius



Gambar 12.3 Perubahan konstanta fungsi pada translasi kurva

atau $m = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ (ingat notasi turunan di Bab XI) sehingga y adalah anti turunan dari m. Dengan demikian anti turunan dari m adalah $y = f(x) + c_k$. Hal ini berarti bahwa nilai konstanta c_k dapat berubah-ubah.

Jadi, kita telah memahami bahwa integral adalah antiturunan dari sebuah fungsi. Dan anti turunan dari sebuah fungsi akan mempunyai konstanta yang belum dapat ditentukan nilainya. Untuk lebih memahaminya, kita ingat kembali proses turunan sebuah fungsi pada masalah berikut.

Masalah-12.2

Berdasarkan konsep turunan, beberapa fungsi tersebut bila diturunkan menghasilkan fungsi yang sama. Jika digunakan konsep antiturunan pada fungsi tersebut, bagaimanakah fungsinya? Apakah dapat kembali ke fungsi asal? Berikut adalah fungsi-fungsi yang akan diamati. a) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4$, b) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 4$, c) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 8$, d) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{2}$, e) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{13}{207}$. Turunkan fungsi-fungsi tersebut kemudian amatilah turunan nilai konstantanya! Hubungkan kembali fungsi awal dengan turunannya serta anti turunannya! Buatlah kesimpulan dari hasil pengamatan dari penyelesaian yang kamu peroleh! (petunjuk: turunan fungsi $F(x)$ adalah $F'(x) = f(x) = y'$

Alternatif Penyelesaian:

a) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4$ Adalah $F'(x) = f(x) = y' = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{4}x^4\right] = x^3$

b) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + 4$ adalah $F'(x) = f(x) = y' \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{4}x^4 + 4\right] = x^3$

c) $F(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - 8$ adalah $F'(x) = f(x) = y' = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{4}x^4 - 8\right] = x^3$

d) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}$ adalah $F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\right] = x^3$

e) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}$ adalah $F'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{13}{207}\right] = x^3$

Jika dilakukan pengamatan kepada ketiga fungsi, maka seluruh fungsi $F(x)$ tersebut di atas adalah antiturunan dari fungsi $f(x) = x^3$, sementara fungsi $F(x)$ mempunyai konstanta yang berbeda-beda. Jadi, dapat ditunjukkan bahwa sebuah fungsi dapat memiliki banyak antiturunan. Jika F(x) adalah fungsi yang dapat diturunkan, yaitu $f(x)$ maka antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x) + c$ dengan c adalah sembarang konstanta.

$$\boxed{F(x)} \xrightarrow{\text{turunan}} \boxed{f(x)} \xrightarrow{\text{anti turunan}} \boxed{F(x) + c}$$

Perhatikan dan pahami definisi dan sifat berikut.

Definisi 12.1

$f : R \to R$ dan $F : R \to R$ disebut antiturunan atau integral tak tentu f jika $F'(x) = f(x)\ \forall x \in R$

Sifat 12.1

Proses menemukan y dari $\frac{dy}{dx}$ merupakan kebalikan dari sebuah proses turunan dan dinamakan antiturunan.

Sifat 12.2

Jika $F(x)$ adalah sebuah fungsi dengan $F'(x) = f(x)$ dapat dikatakan bahwa

a. turunan $F(x)$ adalah $f(x)$ dan

b. antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x)$

Contoh 12.1

Jika $m = 2x - 4$ adalah gradien garis singgung dari sembarang kurva $f(x)$. Tunjukkan bahwa terdapat banyak fungsi $f(x)$ yang memenuhi.

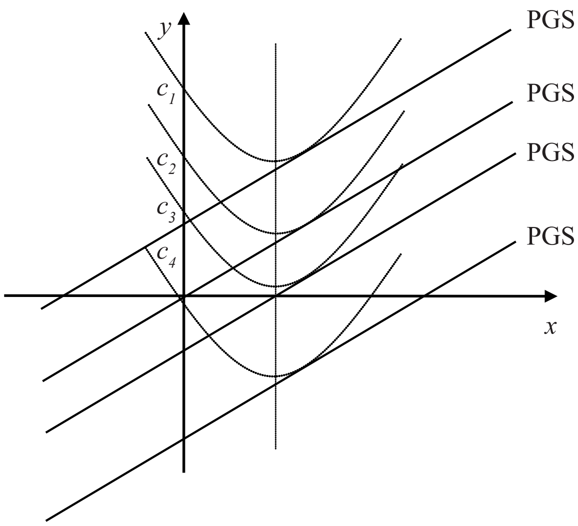
Alternatif Penyelesaian:

Dengan mengingat konsep gradien suatu garis singung dengan turunan bahwa gradien adalah turunan pertama fungsi tersebut maka $m = \frac{dy}{dx} = 2x - 4$.

Berdasarkan Definisi 12.1 maka y adalah antiturunan dari gradien $\frac{dy}{dx} = 2x - 4$ sehingga dengan konsep turunan maka $y = x^2 - 4x + c$ dengan c adalah konstanta bernilai real.

Dengan c adalah konstanta bernilai real maka terdapat banyak fungsi $y = f(x)$ yang memenuhi gradien garis singgung tersebut.

Perhatikan gambar berikut!



Gambar 12.4 Persamaan garis singgung dan fungsi f(x)

Pada Gambar 12.4 terdapat banyak persamaan garis singgung yang sejajar. Ingat kembali definisi persamaan garis yang sejajar. Dengan demikian, terdapat juga banyak fungsi (kurva) yang disinggung oleh garis singgung tersebut.

Uji Kompetensi 12.1

1. Tentukan antiturunan dari
   a. $f(x) = 2x$
   b. $f(x) = 3x$
   c. $f(x) = 4x$
   d. $f(x) = 4x$
   e. $f(x) = 6x$
   f. $f(x) = 7x$
   g. $f(x) = 8x$
   h. $f(x) = 9x$

2. Tentukan antiturunan dari fungsi f(x) berikut!
   a. $f(x) = 2x^2$
   b. $f(x) = 2x^3$
   c. $f(x) = 3x^2$
   d. $f(x) = 3x^3$
   e. $f(x) = 4x^2$
   f. $f(x) = 4x^3$
   g. $f(x) = ax^n$

3. Tentukan antiturunan dari
   a. $f(x) = x^{-2}$
   b. $f(x) = 2x^{-3}$
   c. $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$
   d. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$
   e. $f(x) = 5x^{-\frac{1}{3}}$
   f. $f(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}$
   g. $f(x) = 100x^{-\frac{1}{4}}$
   h. $f(x) = \frac{a}{b}x^{n-1}$ dengan a, b bilangan real, $b \neq 0$, n rasional.

4. Tentukan antiturunan $f(x)$ dengan memanfaatkan turunan fungsi $g(x)$ dibawah ini!
   a. Jika $f(x) = 8x^3 + 4x$ dan $g(x) = x^4 + x^2$
   b. Jika $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x\sqrt{x}$
   c. Jika $f(x) = (x + 2)^3$ dan $g(x) = (x + 2)^4$

5. Jika gradien m suatu persamaan garis singgung terhadap fungsi $f(x)$ memenuhi $m = x^2 - 1$. Tunjukkan dengan gambar bahwa terdapat banyak fungsi $f(x)$ yang memenuhi gradien tersebut.

2. Notasi Integral dan Rumus Dasar Integral Tak Tentu

2.1 Notasi Integral

Kita telah banyak membahas tentang turunan dan antiturunan serta hubungannya pada beberapa fungsi yang sederhana pada sub-bab di atas. Pada kesempatan ini, kita akan menggunakan sebuah notasi operator antiturunan tersebut. Antiturunan dari sebuah fungsi $f(x)$ ditulis dengan menggunakan notasi "$\int$" (baca: integral).

Perhatikan kembali Masalah 12.2. Alternatif penyelesaian di atas, dapat kita tuliskan kembali dengan menggunakan notasi integral tersebut.

a) $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ Adalah $F\,'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4\right] = x^3$ sehingga diperoleh

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

b) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 4$ adalah $F\,'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 + 4\right] = x^3$ sehingga diperoleh

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8$ adalah $F\,'(x) = f(x) = y' = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4}x^4 - 8\right] = x^3$ sehingga diperoleh

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

Contoh 12.2

Jika $y = 3x^4 + 2x^3$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$, kemudian tentukan $\int 4x^3 + 2x^2 dx$.

Alternatif Penyelesaian:

Jika $y = 3x^4 + 2x^3$ maka $\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 6x^2$ sehingga diperoleh

$$\int 12x^3 + 6x^2 dx = 3x^4 + 2x^3 + c$$

$$\int 3(4x^3 + 2x^2)dx = 3x^4 + 2x^3 + c$$

$$3 \int 4x^3 + 2x^2 dx \quad = 3x^4 + 2x^3 + c$$

$$\int 4x^3 + 2x^2 dx \quad = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

2.2 Rumus Dasar Integral Tak Tentu

Berdasarkan pengamatan pada beberapa contoh di atas, jika semua fungsi yang hanya dibedakan oleh nilai konstantanya diturunkan maka akan menghasilkan fungsi turunan yang sama sehingga bila diintegralkan akan mengembalikan fungsi turunan tersebut ke fungsi semula tetapi dengan konstanta c. Nilai konstanta c disebut tak tentu karena dapat digantikan oleh semua bilangan. Nilai konstanta c akan dapat ditentukan bila diketahui titik yang dilalui oleh fungsi asal tersebut. Titik asal (*initial value*) dapat disubstitusi ke fungsi hasil antiturunan sehingga nilai c dapat ditentukan.

Sifat 12.3

Jika $F(x)$ adalah fungsi dengan $F'(x)$ maka $\int f(x)dx = F(x) + c$

Dengan c sembarang konstanta

Masalah-12.3

Pada konsep turunan, kita dapat memperoleh aturan turunan dengan menggunakan konsep limit fungsi sehingga proses penurunan sebuah fungsi dapat dilakukan dengan lebih sederhana dan cepat. Bagaimana dengan konsep integral suatu fungsi? Adakah aturan yang dapat dimiliki agar proses integrasi suatu fungsi atau mengembalikan fungsi turunan ke fungsi semula dapat dilakukan dengan cepat?

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menjawab permasalahan ini, kita akan melakukan beberapa pengamatan pada beberapa contoh turunan dan antiturunan suatu fungsi yang sederhana. Kamu diminta mengamati dan menemukan pola dari proses antiturunan fungsi tersebut. Perhatikan Tabel 12.1

Tabel 12.1 Pola hubungan turunan dan antiturunan fungsi $y = ax^n$

Turunan Fungsi ($f(x)$)	Antiturunan Fungsi ($F(x)$)	Pola
1	x	$1x^0 = \frac{1}{1}x^1 = \frac{1}{0+1}x^{0+1}$
$2x$	x^2	$2x^1 = \frac{2}{2}x^2 = \frac{2}{1+1}x^{1+1}$
$3x^2$	x^3	$3x^1 = \frac{3}{3}x^3 = \frac{3}{2+1}x^{2+1}$
$8x^3$	$2x^4$	$8x^3 = \frac{8}{4}x^3 = \frac{8}{3+1}x^{3+1}$
$25x^4$	$5x^5$	$25x^4 = \frac{25}{5}x^5 = \frac{25}{4+1}x^{4+1}$
...	...	...
anx^{n-1}	ax^n	$anx^{n-1} = \frac{a}{1}x^n = \frac{an}{(n-1)+1}x^{(n-1)+1}$
ax^n	?	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$

Dari pengamatan pada tabel tersebut, kita melihat sebuah aturan integrasi atau pola anti turunan dari turunannya yaitu $\int ax^n dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$.

Agar kamu dapat melihat kebenaran pola ini, kamu harus memperlihatkan lebih banyak contoh yang melahirkan aturan tersebut seperti pada Tabel 12.1. Kamu lakukan kembali proses yang dilakukan pada Tabel 12.1 pada kegiatan berikut.

Kegiatan 12.1

Tentukanlah turunan dan antiturunan fungsi-fungsi yang diberikan pada tabel berikut seperti yang dilakukan pada Tabel 12.1

Tabel 12.2 Pola hubungan turunan dan antiturunan beberapa fungsi F(x)

Turunan Fungsi ($f(x)$)	Antiturunan Fungsi ($F(x)$)	Pola
...	x^{10}	...
...	x^{-2}	...
...	$-3x^{-12}$	...
...	$-3x^{5} + 4x^{-5}$	...
...	$0{,}5x^{0{,}5} - 1{,}25x^{1{,}5} + 2{,}5x^{-1{,}5}$	...
...	$2x^{\frac{1}{3}}$	...
	$\frac{1}{2}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}$	
	$\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{2}}$	
...	$2x^{-1}$	...
...	$0{,}55x^{-1}$	...
...	$\frac{3}{2}x^{-1}$	...

Dari hasil pengamatanmu pada Tabel 12.2, dapatkah kamu tentukan syarat n pada $y = ax^n$ agar pola integrasi tersebut berlaku secara umum? Apa yang kamu peroleh pada tiga baris terakhir pada Tabel 12.2? Tariklah sebuah kesimpulan dari hasil pengamatanmu.

Dengan adanya aturan tersebut, proses penyelesaian soal pada Contoh 12.2 dapat lebih sederhana. Kamu amati kembali proses penyelesaian contoh tersebut pada Contoh 12.3 berikut tanpa melihat fungsi asalnya.

Contoh 12.3

Tentukan nilai $\int 4x^3 + 2x^2 dx$.

Alternatif Penyelesaian:

$$\int 4x^3 + 2x^2 dx = \frac{4}{3+1}x^{3+1} + \frac{2}{2+1}x^{2+1} + c$$

$$= \frac{4}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

$$= x^4 + \frac{2}{3}x^3 + c$$

Jadi, dengan menggunakan aturan tersebut, kita tidak perlu mengetahui terlebih dahulu fungsi awalnya, tetapi cukup diketahui fungsi turunannya. Dengan demikian jika

$F'(x) = 4x^3 + 2x^2$, maka $F(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{c}$

$F(x) = x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{c}$

Berdasarkan konsep yang telah kita peroleh pada subbab di atas, setiap hasil integrasi suatu fungsi menghasilkan fungsi dengan konstanta c, bukan? Konstanta c dapat ditentukan nilainya jika diketahui titik awal (*initial value*) yang dilalui fungsi asal tersebut. Perhatikan contoh berikut!

Contoh 12.4

Jika fungsi $F(x)=\int 3x^3+2x^2-x+1dx$ melalui titik $A(1,-\frac{1}{12})$ maka tentukanlah nilai $F(x)$

Alternatif Penyelesaian:

$$F(x)=\int 3x^3+2x^2-x+1dx$$

$$F(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+c$$

Jika fungsi melalui titik $A(1,-\frac{1}{12})$ artinya $F(1)=-\frac{1}{12}$ sehingga diperoleh:

$$F(1)=\frac{3}{4}1^4+\frac{2}{3}1^3-\frac{1}{2}1^2+1+c=-\frac{1}{12}$$

$\frac{23}{12}+c=-\frac{1}{12}$ atau $c=-2$.

Jadi, Fungsi tersebut adalah $F(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-2$

Dengan demikian, berdasarkan pengamatan pada tabel di atas, kita menarik sebuah kesimpulan akan aturan sebuah integrasi, sebagai berikut:

Sifat 12.4

Untuk n bilangan rasional dengan $n \neq -1$, dan a, c adalah bilangan real maka berlaku aturan:

a. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$

b. $\int ax^n\, dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1}+c$

Contoh 12.5

Hitunglah integral berikut!

a. $\int 4x^3\, dx$

b. $\int \frac{1}{x^2}\, dx$

c. $\int \sqrt{x^3}\, dx$

d. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx$

Alternatif Penyelesaian

a. $\int 4x^3\, dx = \frac{4}{3+1}x^{3+1} + c$

$= x^4 + c$

b. $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx$

$= \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + c$

$= -x^{-1} + c$

$= -\frac{1}{x} + c$

c. $\int \sqrt{x^3}\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx$

$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}$

$= \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}$

$= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c$

d. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx$

$$= \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1}$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$$

Sifat 12.5

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan dua fungsi yang dapat diintegralkan dan c, k bilangan real, maka:

1. $\int dx = x + c$
2. $\int k\,dx = kx + c$
3. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
4. $\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$
5. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
6. $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Contoh 12.6

Tentukanlah hasil dari

a. $\int 2x^4\sqrt{x^3}\,dx$

b. $\int (x+1)^2\,dx$

c. $\int \left(\frac{x^3 - 2x}{\sqrt{x}}\right)dx$

Alternatif Penyelesaian:

a. $\int 2x^4\sqrt{x^3}\,dx = \int 2x^4 . x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= 2\int x^4 . x^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= 2\int x^{4+\frac{3}{2}}\,dx$

$= 2\int x^{\frac{11}{2}}\,dx$

$= 2\left[\dfrac{1}{\frac{11}{2}+1}x^{\frac{11}{2}+1}+c\right]$

$= 2\left[\dfrac{1}{\frac{13}{2}}x^{\frac{13}{2}}+c\right]$

$= \dfrac{4}{13}x^{\frac{13}{2}}+c$

b. $\int (x+1)^2\,dx = \int x^2+2x+1\,dx$

$= \dfrac{1}{2+1}x^{2+1}+\dfrac{2}{1+1}x^{1+1}+x+c$

$= \dfrac{1}{3}x^3+x^2+x+c$

c. $\int\left(\dfrac{x^3-2x}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}-\dfrac{2x}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int\left(x^3 . x^{-\frac{1}{2}}-2x . x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$= \int\left(x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1} - \frac{2}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{1}{\frac{7}{2}} x^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} - \frac{4}{3} x\sqrt{x} + c$$

Contoh 12.7

Diketahui biaya marginal (M_C) dalam memproduksi suatu barang (Q) setiap bulan adalah merupakan fungsi biaya terhadap banyak produksi barang dengan $M_C = \frac{dC}{dQ} = \frac{2Q+6}{3}$. Tentukan fungsi biaya total C dalam satu bulan!

dimana:

Q = banyak produksi (*Quantity*)

C = Biaya produksi total (*Total Cost*)

MC = Biaya marginal (*Marginal Cost*)

Alternatif Penyelesaian:

$$C(Q) = \int \left(\frac{2Q+6}{3} \right) dQ$$

$$= \int \frac{2}{3}(Q+3) dQ$$

$$= \frac{2}{3} \int Q + 3\, dQ$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}Q^2 + 3Q + c\right)$$

$$= \frac{1}{3}Q^2 + 2Q + c$$

Contoh 12.8

Tentukan fungsi $y = F(x)$ dari persamaan diferensial $\dfrac{x^2 dy}{dx} = -y^2\sqrt{x}$ dengan $y = 1$ di $x = 1$

Alternatif Penyelesaian:

Langkah 1. Ubah bentuk persamaan diferensial tersebut menjadi:

$$\frac{x^2 dy}{dx} = -y^2\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2} = -\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow y^{-2}dy = x^{-\frac{3}{2}}dx \text{ (ingat sifat eksponen)}$$

Langkah 2. Dengan mengintegralkan kedua ruas diperoleh:

$$\Leftrightarrow \int y^{-2}dy = \int x^{-\frac{3}{2}}dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{-2+1}y^{-2+1} = \frac{1}{-\frac{3}{2}+1}x^{-\frac{3}{2}+1} + c$$

$$\Leftrightarrow -y^{-1} = -2x^{-\frac{1}{2}} + c$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$$

Langkah 3. Dengan mensubstitusi titik awal ke $-\dfrac{1}{y} = \dfrac{-2}{\sqrt{x}} + c$

Karena $y = 1$ di $x = 1$ maka $-\dfrac{1}{1} = \dfrac{-2}{\sqrt{1}} + c$ atau $c = 1$. Jadi, fungsi tersebut adalah $-\dfrac{1}{y} = \dfrac{-2}{\sqrt{x}} + 1$ atau $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$.

Sifat 12.6

Misalkan $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ adalah fungsi yang dapat diintegralkan. Integral tak tentu hasil penjumlahan dua fungsi atau lebih sama dengan integral tak tentu dari masing-masing fungsi, yaitu:

$$\int (f_1(x) + ... + f_n(x))dx = \int f_1(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$$

Contoh 12.9

Tentukan nilai dari $\int (3x^6 - 2x^2 + 1)\,dx$

Alternatif Penyelesaian:

$$\int (3x^6 - 2x^2 + 1)\,dx = 3\int 3x^6 dx - 2\int x^2 dx + \int 1 dx$$

$$= \frac{3}{7}x^7 - \frac{2}{3}x^3 + x + C$$

Contoh 12.10

Carilah nilai $f(x)$ jika $f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ dan $f(0) = 1$

Alternatif Penyelesaian:

$f'(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ maka $f(x) = \int x^3 - 4x^2 + 3\,dx$

$f(x) = \int x^3 - 4x^2 + 3\,dx$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x + c$, karena $f(0) = 1$

$\Rightarrow f(0) = 0 - 0 + 0 + c = 1$, berarti $c = 1$ sehingga $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 3x + 1$

Contoh 12.11

Tentukanlah integral dari fungsi-fungsi berikut!

a. $F(x) = (x + 2)^4$

b. $F(x) = (2x – 3)^5$

c. $F(x) = (3x – 2)^6$

d. $F(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n$

e. $F(x) = (ax + b)^n$

Alternatif Penyelesaian:

Untuk menyelesaian contoh soal berikut, kita harus menjabarkan atau dengan menggunakan Binomial Newton. Untuk itu, ingat kembali prinsip Binomial Newton pada Bab 8.

a. $F(x) = (x + 2)^4 = (x + 2)(x + 2)(x + 2)(x + 2)$ sehingga diperoleh

$F(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

$\int F(x)dx = \int x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16dx$ (dengan menggunakan Sifat 12.6)

$$\int F(x)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 + \frac{32}{2}x^2 + 16x + c$$

$$\int F(x)dx = \frac{1}{5}x^5 + 2x^4 + 8x^3 + 16x^2 + 16x + c$$

(Coba kerjakan kembali dengan Binomial Newton)

b. Coba kerjakan dengan menjabarkan berdasarkan definisi perpangkatan dan dengan menggunakan Bonomial Newton (diserahkan kepada siswa)

c. Dengan menggunakan Binomial Newton maka diperoleh:

$F(x) = (3x – 2)^6$

$F(x) = C_0^6(3x)^6(-2)^0 + C_1^6(3x)^5(-2)^1 + C_2^6(3x)^4(-2)^2 + C_3^6(3x)^3(-2)^3 + C_4^6(3x)^2(-2)^4 + C_5^6(3x)^1(-2)^5 + C_6^6(3x)^0(-2)^6$

$F(x) = (1)(729)(1)x^6 + (6)(243)(-2)x^5 + (15)(81)(4)x^4 + (20)(27)(-8)x^3 + (15)(9)(16)x^2 + (6)(3)(-32)x + (1)(1)(64)$

$$F(x) = 729x^6 - 2916x^5 + 4860x^4 - 4320x^3 + 2160x^2 - 576x + 64$$

sehingga dengan menggunakan Sifat 12.6

$$\int F(x)dx = \int 729x^6 - 2916x^5 + 4860x^4 - 4320x^3 + 2160x^2 - 576x + 64dx$$

$$\int F(x)dx = \frac{729}{7}x^7 - \frac{2916}{6}x^6 + \frac{4860}{5}x^5 - \frac{4320}{4}x^4 + \frac{2160}{3}x^3 - \frac{576}{2}x^2 + 64x + c$$

$$\int F(x)dx = \frac{729}{7}x^7 - 486x^6 + 972x^5 - 1080x^4 + 720x^3 - 288x^2 + 64x + c$$

d. Dengan menggunakan Sifat 12.6.

$$\int F(x)dx = \int \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n dx$$

$$\int F(x)dx = \frac{1}{1.0!}x + \frac{1}{2.1!}x^2 + \frac{1}{3.2!}x^3 + \frac{1}{4.3!}x^4 + \frac{1}{5.4!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(n+1)n!}x^{n+1}$$

$$\int F(x)dx = \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}$$

e. Coba kerjakan kembali dengan Binomial Newton. (diserahkan kepada siswa)

Masalah-12.4

Konsep antiturunan atau integral banyak berperan dalam menyelesaikan permasalahan di bidang Fisika. Pada bidang ini juga banyak diperankan oleh konsep Turunan, contohnya adalah permasalahan kecepatan dan percepatan. Dengan mengingat integral adalah balikan dari turunan, maka dapatkah kamu temukan hubungan konsep turunan dan integral dalam permasalahan kecepatan dan percepatan? Coba kamu tunjukkan peran integrasi pada hubungan besaran tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Kita ingat kembali konsep yang telah diuraikan pada pelajaran Turunan pada bab sebelumnya.

Pergerakan sebuah objek yang semakin menjauhi ataupun semakin mendekati berarti ada terjadi perubahan pergerakan pada lintasan, sehingga kecepatan adalah laju perubahan dari lintasan terhadap perubahan waktu, yaitu:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \text{ atau } v(t) = s'(t) \text{ sehingga } s(t) = \int v(t)dt$$

Pergerakan dipercepat atau diperlambat berhubungan dengan kecepatan objek tersebut, yaitu terjadi perubahan kecepatan kendaraan. Percepatan adalah laju perubahan kecepatan terhadap perubahan waktu, yaitu:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \text{ atau } a(t) = v'(t) = s''(t) \text{ sehingga } v(t) = \int a(t)dt$$

dimana:

t = waktu

s(t) = fungsi lintasan

v(t) = fungsi kecepatan

a(t) = fungsi percepatan

Contoh 12.12

Sebuah partikel diamati pada interval waktu tertentu dan diperoleh data bahwa fungsi percepatan memenuhi pola dengan fungsi $a(t) = -2t^2 + 3t + 1$. Tentukan fungsi lintasan partikel tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

Dengan menggunakan konsep di atas maka:

$$v(t) = \int a(t)dt \text{ atau } v(t) = \int -2t^2 + 3t + 1dt$$

$$v(t) = -\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t + c$$

kemudian

$$s(t) = \int v(t)dt \text{ atau } s(t) = \int -\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + t + cdt$$

$$s(t) = \frac{-\frac{2}{3}}{4}t^4 + \frac{\frac{3}{2}}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + ct + d$$

$$s(t) = -\frac{1}{6}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + ct + d$$

Uji Kompetensi 12.2

1. Selesaikanlah!

   a. Jika $y = x^8$, carilah $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int x^7\, dx$ dan tentukan $\int 2x^7 dx$

   b. Jika $y = x^{\frac{1}{2}}$, carilah $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan nilai $\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$ dan tentukan $\int 2x^{\frac{1}{2}}\, dx$

   c. Jika $y = 4x^4 - 2x^2$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int \left(16x^3 - 4x\right) dx$

   d. Jika $y = (3x+1)^4$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int (3x+1)^3 dx$

   e. Jika $y = \sqrt{1-4x}$, carilah nilai $\frac{dy}{dx}$ kemudian tentukan $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x}} dx$

2. Selesaikan integral berikut!

   a. $\int 3x\, dx$
   b. $\int 3x^3\, dx$
   c. $\int 5x^4\, dx$
   d. $\int -x^5\, dx$
   e. $\int x^{10}\, dx$
   f. $\int 28x^{27}\, dx$
   g. $\int 20x^{59}\, dx$
   h. $\int \frac{2}{x^{-4}} dx$

3. Tentukan nilai dari

a. $\int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right) dx$

b. $\int \left(\frac{1}{2x} + x^2 - x\right) dx$

c. $\int \left(5x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{x}\right) dx$

4. Buktikan!

a. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

b. $\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$

Petunjuk: anggap $F(x)$ merupakan antiturunan dari $f(x)$ dan $G(x)$ merupakan antiturunan dari $g(x)$. selanjutnya carilah $\frac{d}{dx}\left(F(x) + G(x)\right)$ atau $\frac{d}{dx}\left(F(x) - G(x)\right)$

5. Tentukan nilai dari

a. $\int \frac{3x + 2}{\sqrt{x}} dx$

b. $\int \frac{x^2 - 4x + 10}{x^2\sqrt{x}} dx$

c. $\int (x+1)^3\, dx$

6. Selesaikanlah integral berikut!

a. $\int x\left(\sqrt{x} - 1\right) dx$

b. $\int 2\left(\frac{1}{x} - x\right) dx$

c. $\int 3x\left(\frac{3}{x^2} - 1\right) dx$

d. $\int \frac{x^9 - 3}{x^3} dx$

e. $\int \frac{x^2 - 3}{x^2} dx$

f. $\int \left(2x - \frac{3}{x}\right)^2 dx$

7. Tentukan nilai y jika

a. $\frac{dy}{dx} = 10$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10}$

c. $\frac{dy}{dx} = 2x^2 - 4$

d. $\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3x^2$

e. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 2x - 5}{x^2}$

f. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x}$

8. Carilah nilai $f(x)$ dan $f(1) = 1$ jika

a. $f'(x) = 2x - 1$

b. $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

9. Selesaikanlah persamaan-persamaan diferensial berikut:

a. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 1$, $y = 5$ di $x = 2$

b. $\frac{dy}{dx} = (2x+1)^4$, $y = 6$ di $x = 0$

c. $\frac{dy}{dx} = -y^2\left(x^2+2\right)^2$, $y = 1$ di $x = 0$

10. Tentukan persamaan fungsi implisit $F(x, y) = 0$ yang melalui titik $(2, -1)$ dan gradien garis singgung di setiap titik (x, y), pada grafiknya ditentukan persamaan $y = \frac{x}{4y}, y \neq 0$.

11. Tentukan persamaan fungsi f, jika fungsi $y = f(x)$ terdefinisi untuk $x > 0$ yang melalui titik $(4, 0)$ dan gradien garis singgungnya di setiap titik ditentukan oleh persamaan $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$.

12. Tentukan persamaan fungsi f jika grafik fungsi $y = f(x)$ melalui titik $(1, 2)$ dan gradien garis singgung di setiap titiknya ditentukan oleh persamaan $y' = 1 - 16x^{-4}, x \neq 0$.

13. Sebuah objek berjalan sepanjang suatu garis koordinat menurut percepatan a (dalam centimeter per detik) dengan kecepatan awal v_0 (dalam centimeter per detik) dan jarak s_0 (dalam centimeter). Tentukanlah kecepatan v beserta jarak berarah s setelah 2 detik.

    a. $a = t, v_0 = 2, s_0 = 0$

    b. $a = (1+t)^{-3}, v_0 = 4, s_0 = 6$

    c. $a = \sqrt[3]{2t+1}, v_0 = 0, s_0 = 10$

    d. $a = (1+t)^{-3}, v_0 = 4, s_0 = 0$

Projek

Kumpulkanlah masalah tentang penerapan integral tak tentu dari fungsi aljabar dalam berbagai bidang maupun masalah nyata yang ada di sekitarmu. Ujilah sifat-sifat dan rumus dasar tentang integral tak tentu di dalam pemecahan masalah tersebut, kemudian buatlah laporan hasil karyamu untuk disajikan di depan kelas.

D. PENUTUP

Beberapa hal penting sebagai kesimpulan dari hasil pembahasan materi Integral, disajikan sebagai berikut:

1. Integral merupakan antiturunan, sehingga integral saling invers dengan turunan.
2. Jika $F(x)$ adalah sebuah fungsi dengan $F'(x) = f(x)$ dapat dikatakan bahwa
    a. Turunan dari $F(x)$ adalah $f(x)$ dan
    b. Antiturunan dari $f(x)$ adalah $F(x)$
3. Jika $F(x)$ adalah sebarang antiturunan dari $f(x)$ dan C adalah sebarang konstanta, maka $F(x) + C$ juga antiturunan dari $f(x)$.
4. Jika $F'(x) = f(x)$ maka $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

DAFTAR PUSTAKA

Anton. Howard, Rorres. Chris. (2005). *Elementary Linear Algebra with Applications*. John Wiley & Sons, Inc

Ball, Deborah Loewenberg. (2003). *Mathematical Proficiency for All Students (Toward a Strategic Research and Development Program in Mathematics Education*). United States of America: RAND.

Checkley , Kathy (2006). *The Essentials of Mathematics, Grades 7 -12*. United States of America: The Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Chung, Kai Lai. (2001). *A Course in Probability Theory*, USA: Academic Press.

Committee on science and mathematics teacher preparation, center for education national research council (2001). *Educating Teachers of science, mathematics, and technology (new practice for new millennium*. United States of America: the national academy of sciences.

Douglas. M, Gauntlett. J, Gross. M. (2004). *Strings and Geometry*. United States of America: Clay Mathematics Institute.

Hefferon, Jim (2006). *Linear Algebra*. United States of America: Saint Michael's College Colchester.

Howard, dkk. (2008). *California Mathematics. Consepts, Skills, and Problem Solving 7*. Columbus-USA, The McGraw-Hill Companies, Inc.

Johnstone. P.T. (2002). *Notes on Logic and Set Theory*. New York: University of Cambridge.

Magurn A, Bruce. (2002). Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. United Kingdom: United Kingdom at the University Press, Cambridge.

Slavin, Robert, E. (1994). *Educational psychology, theories and practice*. Fourth Edition. Masschusetts: Allyn and Bacon Publishers.

Sinaga, Bornok. (2007). *Pengembangan Model Pembelajaran Matematika Berdasarkan Masalah Berbasis Budaya Batak*. Surabaya: Program Pascasarjana UNESA.

Tan, Oon Seng. (1995). *Mathematics. A Problem Solving Approach*. Singapore: Federal Publication (S) Pte Lsd.

Urban. P, Owen. J, Martin. D, Haese. R, Haese. S. Bruce. M. (2005). *Mathematics For Yhe International Student* (*International Baccalaureate Mathematics HL Course*). Australia: Haese & Harris Publication.

Van de Walle, John A. (1990). *Elementary school mathematics: teaching developmentally*. New York: Longman.

Van de Walle. Jhon, dkk. (2010). Elementary and Middle School Mathematics (teaching developmentally). United States of America: Allyn & Bacon.

Catatan:

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....